Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Física

Introducción al Modelado Continuo

Gabriel Mindlin

Segundo Cuatrimestre 2024

Practica 2. Series y transformadas de Fourier

Series de Fourier

1. Para estas funciones periódicas, calcular las series de Fourier.

a. Sea $f(x): R \to R, 2\pi$ periódica, definida asi en $(-\pi, \pi]$:

$$f(x)\begin{cases} 1 & si\ |x| \leq \pi/2 \\ 0 & si - \pi < x < \pi/2 \ \ o\ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

a1. Dibujar $f(x)$ en $(-\pi, 3\pi]$

a2. Escribir la serie de Fourier

a3. Establecer para que valores del dominio la serie y la funcion coinciden

b. Sea $f(x): R \to R, 2\pi$ periódica, definida asi en $(-\pi, \pi]$:

$$f(x)\begin{cases} 1 & si. 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -1 & si\ -\pi/2 \leq x < 0 \\ 0 & si - \pi < x < -\pi/2 \ \ o\ \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

b1. Dibujar $f(x)$

b2. Escribir la serie de Fourier

c. Sea $f(x): R \to R, 2\pi$ periódica, definida asi en $(-\pi, \pi]$:

$$f(x)\begin{cases} 1 & si. -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ 0 & si\ -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Y $f_2(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x f(t)dt$

c1. Calcular los coeficientes de Fourier para $f(x)$
c2. Escribir explícitamente $f_2(x)$ y graficarla
c3. Obtener los coeficientes de Fourier para $f_2(x)$
c4. Hay algún valor en los que $f(x)$ y $f_2(x)$ difieran?

2. Sea la funcion

$$f(x)\begin{cases} -2x^2 & si -\pi/2 \leq x < 0 \\ 2x^2 & si\ 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}, \quad f(x+\pi) = f(x)$$

2.a. Dibujar la funcion
2.b. Calcular los coeficientes de Fourier en$[-\pi/2, \pi/2]$

3. Sean $f_1(x) = |x|,\ f_2(x) = 3x^2$.

(**a**) Mostrar que para $|x| \leq \pi$,

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \cdots + \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2} + \cdots\right)$$

$$f_2(x) = \pi^2 + 12\sum_1^\infty \frac{(-1)^2}{n^2}\cos(nx)$$

(**b**)Integrando, mostrar que para $0 \leq x < \pi$

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}(\sin(x) + \frac{\sin(x)}{3^3} + \cdots + \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} + \cdots)$$

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2^3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin((n)x)}{(n)^3} + \cdots)$$

(**c**) Usar el resultado para mostrar que:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Mostrar que:

$$xsin(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x) - 2(\frac{\cos(2x)}{2^2 - 1} - \frac{\cos(3x)}{3^2 - 1} + \cdots + (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 - 1} + \cdots)$$

Transformadas de Fourier

5. Calcular la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-\alpha|t|}$.

6. Calcular la transformada de Fourier de $f(t) = \delta(t)$

7. Calcular la transformada de un pulso finito de oscilaciones:

$$f(t)\begin{cases} \sin\,(\omega_0 t) & si\ |t| \leq {}^{N\pi}/_{\omega_0} \\ 0 & si\ |t| > {}^{N\pi}/_{\omega_0} \end{cases}$$

8.

Nota: Para representar una funcion que describa un evento localizado al extremo (una cantidad que vale cero en todas partes menos en un valor particular), se define un dispositivo algorítmico a través de las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = 0. \;\; si\ x \neq 0$$

$$f(0) = \int_a^b f(x)\delta(x)dx, \qquad si\ f(x) es\ bien\ comportada, y\ a < 0 < b.$$

Este dispositivo no es una funcion, pero es el limite de una secuencia de funciones:

1. $\delta_n(x)\begin{cases} 0 & si.\ x \leq -1/2n \\ n & si\ -1/2n \leq x < 1/2n \\ 0 & 1/2n \leq x \end{cases}$

2. $\delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x} = \int_{-n}^{n} e^{ixt} dt$

3. $\delta_n(x) = \frac{\mathrm{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$

Estas distintas representaciones de la delta de Dirac suelen usarse en diferentes contextos. Por ejemplo, la tercera, cuando tengamos que derivar una expresión que incluya deltas.

Mostrar que usando la primera representación,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = f(0)$$

Representación integral de Fourier de una funcion.

9. Mostrar que $\quad e^{-\alpha|t|} = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\alpha^2+\omega^2} d\omega$

Transformadas en 3 dimensiones

Aplicando el operador en cada una de las variables de un espacio tridimensional Euclideo, podemos definir:

$$[f(\boldsymbol{r})]^T(\boldsymbol{k}) \equiv g(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} d^3r$$
$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} d^3k$$

10. Mostrar que $[f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^T(\boldsymbol{k}) = e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{R}} g(\boldsymbol{k})$
11. Mostrar que $[f(\alpha\boldsymbol{r})]^T(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\alpha^3} g(\alpha^{-1}\boldsymbol{k})$
12. Mostrar que $[\nabla f(\boldsymbol{r})]^T(\boldsymbol{k}) = -i\boldsymbol{k} g(\boldsymbol{k})$

13. Mostrar que $[\nabla^2 f(\boldsymbol{r})]^T(\boldsymbol{k}) = -(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k})$

El pasaje de ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas

14. Ecuación de ondas. Sea $y = y(x,t)$ la amplitud de una cuerda vibrante (apartamiento de la posición de equilibrio). Su dinámica viene dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$y(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

Aplicar la transformada de Fourier (en la variable x), para convertir la ecuación diferencia a derivadas parciales, en una ecuación diferencial ordinaria para la transformada Fourier de *y.* Resolverla, anti-transformar, y mostrar que la solución de la ecuación es:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(f(x - vt) + f(x + vt))$$

15. Ecuación del calor. Sea $\psi = \psi(x,t)$ el campo de temperaturas de un problema unidimensional. En ausencia de fuentes de calor, la evolución de la temperatura en el espacio tiempo vienen dada por:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Transformando Fourier la dependencia espacial, resolver la ecuación diferencial ordinaria temporal, anti transformar, y mostrar que el campo evoluciona de la siguiente manera:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(y) e^{-\alpha^2 y^2 t} e^{-iyx} dy$$

16. Sea la ecuación diferencial (1-D difusión de neutrones)

$$-D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+K^2\psi = Q\delta(x)$$

Mostrar que $\psi(x) = \frac{Q}{2KD}e^{-|Kx|}$

El teorema de convolución

17. Sea la convolución entre dos funciones f, g definida asi:

$$(f * g)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy$$

Mostrar que

$$[(f * g)]^T(\omega) = G(\omega)F(\omega)$$

18. Mostrar (relación de Parseval) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)G(\omega)d\omega$$

Con F , G, las transformadas de f y g respectivamente

19. Sea $f(x) = 1 - |x/2|$ para $-2 \leq x \leq 2$, y $f(x) = 0$ en cualquier otro lado. Calcular la transformada de Fourier, mostrando que

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)^2$$

Y emplear la relacion de Parseval para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt = \frac{2\pi}{3}$$

20. Resolver la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\epsilon_0$$

Para ello , primero tomar la transformada de Fourier a ambos lados, y resolver para la transformada del campo escalar. Luego, anti transformar.

Pistas: 1. Usar el teorema de convolucion para anti transformar, y para ello, 2., usar que

$$\left[\frac{1}{r}\right]^T(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{4\pi}{k^2}$$

Transformada discreta de Fourier.

21. Considerar el caso $f(x) = \cos(3x)\ \ en\ [0,2\pi]$. Supongamos que queremos tratar el problema con N=4 puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi/2\right)$. Que funcion obtenemos si calculamos la transformada inversa de los cuatro puntos $(1,0,-1,0)$? Interprete.