Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Física

Introducción al Modelado Continuo

Gabriel Mindlin

Segundo Cuatrimestre 2024

Practica 3 Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

1. Mostrar que $a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ puede reescribirse como una ecuación ordinaria, con el cambio de variables $s=ax+by, t=bx-ay$

2. Calcular las curvas caracteristicas para

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(x+y)\varphi=0$$

3. Sea

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Mostrar que va a ser satisfecha por

$$u_1=f(cx-ay) \quad o \quad u_2=g(cx+ay)$$

4. Usar separación de variables en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0)=f(x),\;\; u(0,t)=0,\;\;\; u(L,t)=0$$

5. Usar separación de variables en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

6. Usar separación de variables en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; u(-L,t) = u(L,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$$

7. Usar separación de variables en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \;\; u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

8. Usar separación de variables en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad 0 \le x \le L; 0 \le y \le H$$

$$u(0,y) = g(y), \;\; u(L,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, u(x,H) = 0$$

9. Usar separación de variables en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; u(0,t) = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = u(L,t)$$

Resolviendo la ecuación del calor

10. Encontrar una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones de contorno.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

11. Resolver la ecuación del calor para las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

a. $f(x) = 6\sin\,(\pi x/L)$
b. $f(x) = 12\sin\left(\frac{9\pi x}{L}\right) - 7\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$

12. Resolver la ecuación del calor para las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 20, \;\; u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

13. Encontrar una solucion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

14. Encontrar una solución para la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; u(-L,t) = u(L,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$$

15. Encontrar una solución para la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad 0 \le x \le L; 0 \le y \le H$$

$$u(0,y) = g(y), \;\; u(L,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, u(x,H) = 0$$

16. Encontrar una solución para la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad 0 \le x \le L; 0 \le y \le H$$

$$u(0,y) = 0, \;\; u(L,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, u(x,H) = f(x)$$

17. Encontrar una solución para la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad 0 \le x \le L; 0 \le y \le H$$

$$u(0,y) = g_1(y), \;\; u(L,y) = g_2(y), \quad u(x,0) = f_1(x), u(x,H) = f_2(x)$$

Pensar a la solución como la superposición de cuatro soluciones, cada una con una condición de borde no nula en uno de los bordes, y nula en los otros tres.

18. Encontrar una solución para la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 u = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$|u(0,\theta)| < \infty \qquad u(a,\theta) = f(\theta)$$

$$u(r,\pi) = u(r,-\pi). \;\; \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi)$$

Problemas bien planteados

Un problema *bien planteado,* es uno para el que:

1. Existe solución
2. Esa es única
3. La solución es estable ante perturbaciones de las condiciones de borde, esto es que pequeños cambios en los valores de borde dan lugar a pequeños cambios en la solución.

19. Sea la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in R, \;\; t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in R$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad x \in R$$

Con $u = 0$ como solución.

Sea

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in R, \;\; t > 0$$

$$v(x,0) = 0, \qquad x \in R$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \epsilon \, sin(x/\epsilon) \qquad x \in R$$

Que tiene solución

$$v(x,0) = \; v^2 \, sin(x/\epsilon) \, sinh(t/\epsilon) \qquad x \in R$$

v, u son soluciones de la misma ec, con mismos valores iniciales, y

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial t}(0) - \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\| = \int (\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0))dx \; = \epsilon$$

Calcular $\|v(t) - u(t)\|$ mostrando que ecuaciones elípticas con condiciones iniciales son un problema mal planteado.

20. Reemplazar el laplaciano por el operador de la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in R, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$u(x,t) = 0$$

Mientras que con estas otras condiciones iniciales;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in R, \quad t > 0$$

$$v(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \epsilon \, sin(x/\epsilon)$$

$$v(x,t) = \epsilon^2 \, sin(x/\epsilon) \, sin(t/\epsilon)$$

Calcular

$$\|v(t) - u(t)\|$$