



Clase 8:

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

- Motivación en el marco de la materia
- Transformada de Fourier en señales
 - Interpretación
 - Discretización
- Transformada de Fourier Discreta (DFT)
- Transformada Rápida de Fourier (FFT)
- Bibliografía

Motivación en el marco de la materia

- Transformada de Fourier

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Señales

Interpretación

Qué cambia?

Discretización

The diagram illustrates the motivation for the Fourier transform within the context of the subject. It features the Fourier transform equation: $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$. From the right side of the equation, two arrows point outwards. The upper arrow points to the word 'Interpretación', and the lower arrow points to the phrase 'Qué cambia?'. Above the upper arrow, the word 'Señales' is written in green. Below the lower arrow, the word 'Discretización' is written in green.

Generalización de series de Fourier

Para funciones periódicas de período $2L$ (en lugar de 2π)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi x/L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$c_k = \frac{1}{2L} \langle f(x), \psi_k \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ik\pi x/L} dx.$$

Cambia el período de las funciones base y la normalización

Interpretación de la transformada

En el contexto de análisis de señales, veamos cómo interpretar la transformada

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx. \quad \Longleftrightarrow \quad c_n = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$$

Los coeficientes son muestras discretas de la transformada de Fourier

La transformada me da la composición espectral (frecuencia) de una señal

Transformada de Fourier Discreta



Cuando tengo datos, lo que tengo son valores discretos

$$x = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$$

Para transformar, ahora en lugar de una integral tengo una sumatoria

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad X = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]$$

En notación matricial

$$X = W \cdot x \quad W_{kn} = e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}$$

Transformada de Fourier Discreta

$$X = W \cdot x \quad W_{kn} = e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}$$

Definimos $\omega = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$ $W_{kn} = \omega^{kn}$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Cómo puedo calcularla?

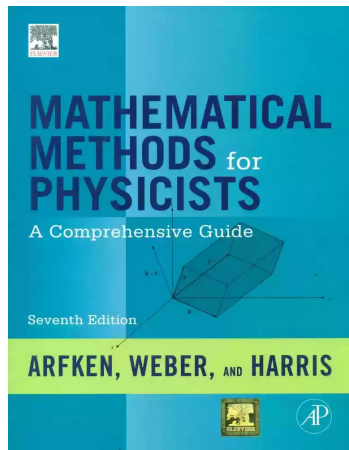
Probar con “for” y con matrices y comparar tiempos

Transformada Rápida de Fourier

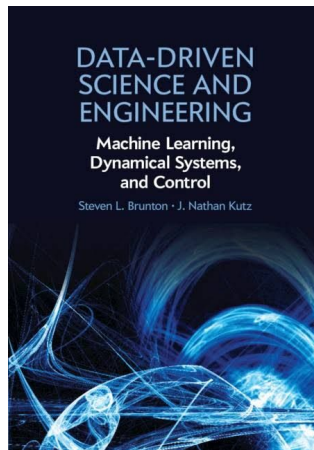


- Es un algoritmo para computar la DFT de manera mucho más eficiente
- Se basa en la estrategia divide and conquer, para resolver partes del problema por separado y después combinarlo
- Para su optimización se usan cantidad de datos potencias de 2

Bibliografía recomendada



Arfken et al 2012



Brunton & Kutz 2019

Google

 stackoverflow

towards
data science

 YouTube