Parcial de Cosmología
27/11/2014

Problema 1

Considere un universo espacialmente plano cuyo contenido material es un fluido perfecto con ecuación de estado $p = w\rho$, donde w es un número real estrictamente mayor que -1. Obtenga el factor de escala y la densidad de energía como funciones del tiempo, en términos de w y de las constantes de integración que correspondan.

Problema 2

a) Calcule el cociente entre la temperatura de los fotones y la de los neutrinos después de la aniquilación electrón-positrón. *Ayuda*: la densidad de entropía de las especies no relativistas es despreciable frente a la de las relativistas.

b) Durante la era de dominio de la radiación, exceptuando el breve lapso en que se produce la aniquilación electrón-positrón, la densidad de energía en el universo satisface $\rho = \kappa T^4$, donde κ es una constante y T es la temperatura de los fotones. Calcule κ antes y después de la aniquilación electrón-positrón.

c) Sabiendo que $G^{-1/2} = 1.221 \times 10^{22}$ MeV y que 1 MeV$^{-1} = 6.58 \times 10^{-22}$ s, y también que el universo es espacialmente plano, obtenga una ecuación que exprese su edad en segundos durante la era de dominio de la radiación como función de la temperatura de los fotones en MeV, en términos de κ.

d) Calcule la edad del universo cuando los neutrinos se desacoplan ($T = 1.5$ MeV) y cuando empieza la nucleosíntesis ($T = 0.07$ MeV).

Problema 3

Vamos a ocuparnos de la primera recombinación del helio, esto es, el proceso $\mathrm{He}^{2+} + e^- \to \mathrm{He}^+ + \gamma$, por el cual cada núcleo de helio captura un electrón libre dando lugar a un ion de carga e.

a) Ignorando las interacciones spin-órbita y spin-spin en el He^+ se obtiene que su número de grados de libertad internos satisface $g_+ = g_{2+} g_e$. Teniendo esto en cuenta, y asumiendo que la primera recombinación del helio es un proceso de equilibrio, exprese la combinación de densidades numéricas $n_{2+} n_e / n_+$ como función de la temperatura, en términos de la masa del electrón y la energía de ligadura del He^+, $B_+ = m_{2+} + m_e - m_+$.

b) Durante la primera recombinación del helio, la densidad numérica de electrones libres se puede aproximar por la densidad numérica total de electrones. Pruebe que esta última es $0.875\, n_N$, donde n_N denota la densidad numérica total de nucleones.

c) Exprese el cociente de densidades numéricas n_{2+}/n_+ como función de la temperatura, en términos de m_e, B_+ y $\eta_{10} = 10^{10} n_N / n_\gamma$.

d) Sabiendo que $m_e = 0.511$ MeV, $B_+ = 54.4$ eV y $\eta_{10} \simeq 6$, y recordando que $\zeta(3) \simeq 1.202$, calcule la temperatura de la primera recombinación del helio, esto es, la temperatura para la cual $n_{2+}/n_+ = 1$. ¿A qué redshift corresponde? Recuerde que 1 K$= 0.86 \times 10^{-4}$ eV.

e) Sabiendo que $\Omega_m = 0.32$ y $\Omega_r = 0.94 \times 10^{-4}$, donde Ω_i denota el cociente entre la densidad de energía actual de la especie i y la densidad crítica actual, y donde los subíndices m y r denotan materia no relativista y radiación respectivamente, determine si la primera recombinación del helio ocurre durante la era de dominio de la radiación o durante la era de dominio de la materia no relativista.

Problema 4

Consideremos el modelo inflacionario más sencillo que existe: un universo espacialmente plano en presencia de un campo escalar ϕ con potencial $V(\phi) = m^2\phi^2/2$, donde m es una constante con unidades de masa que se llama la masa del campo.

a) Encuentre en qué regiones del dominio de V se satisfacen las condiciones de slow roll,

$$\frac{1}{24\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1 \qquad \frac{1}{24\pi G}\left|\frac{V''}{V}\right| \ll 1.$$

b) Obtenga las soluciones tipo slow roll (es decir, tales que $\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)$ y $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V'(\phi)|$) de las ecuaciones acopladas de Klein-Gordon y Friedmann,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \qquad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right]$$

(recuerde que una solución de estas ecuaciones es un campo escalar $\phi(t)$ y un factor de escala $a(t)$). *Ayuda*: para obtener el factor de escala use que $H = d\log a/dt = \dot{\phi}\, d\log a/d\phi$.

c) Inflación termina cuando dejan de cumplirse las condiciones de slow roll. Teniendo esto en cuenta, obtenga qué valor inicial debe tomar el campo escalar para que haya 70 e-foldings de inflación.

d) Calcule la duración de la inflación para el valor inicial del campo escalar obtenido en el apartado anterior, en el caso en que $m = 10^{13}$ GeV. Exprésela en segundos, usando la conversión especificada en el apartado (c) del problema 2.