Recuperatorio de Cosmología
11/12/2014

Problema 1 *(3 puntos)*

a) Sabiendo que el universo es espacialmente plano y que está compuesto por radiación, materia no relativista y constante cosmológica, y asumiendo que las tres componentes materiales satisfacen la ecuación de continuidad separadamente, reescriba la primera ecuación de Friedmann (una derivada temporal) como una ecuación cerrada para el factor de escala, en términos de las constantes H_0, a_0, Ω_r, Ω_m y Ω_Λ, donde H_0 y a_0 son respectivamente el parámetro de Hubble y el factor de escala en la actualidad y Ω_i es el cociente entre los valores actuales de la densidad de energía de la componente i y la densidad de energía total.

b) Despreciando Ω_r, exprese la edad actual del universo como función de H_0, Ω_m y Ω_Λ. *Ayuda:* $\int_0^1 dx/(x\sqrt{\alpha x^{-3}+\beta}) = 2\ln(\sqrt{1+\beta/\alpha}+\sqrt{\beta/\alpha})/(3\sqrt{\beta})$.

c) Calcule la edad actual del universo teniendo en cuenta que $H_0 = 2.26\times 10^{-18}$ s^{-1}, $\Omega_m = 0.28$ y $\Omega_\Lambda = 0.72$. Exprésela en años.

Problema 2 *(3 puntos)*

a) Durante el período comprendido entre el freeze-out de los neutrones y el final de la nucleosíntesis primordial, el proceso $p + n \leftrightarrows D + \gamma$ es eficiente para mantener el equilibrio entre el deuterio y el gas de protones y neutrones libres. Teniendo esto en cuenta, y sabiendo que el deuterio tiene spin 1, calcule la combinación de concentraciones en masa $X_D/(X_p X_n)$ durante esta época como función de la temperatura, en términos de la masa del protón, la energía de ligadura del deuterio, $B_D = m_p + m_n - m_D$, y $\eta_{10} = 10^{10} n_N/n_\gamma$, donde n_N y n_γ denotan las densidades numéricas totales de nucleones y fotones respectivamente.

b) La nucleosíntesis empieza cuando $X_D \simeq 10^{-2}$. Sabiendo que $m_p = 938$ MeV, $B_D = 2.23$ MeV y $\eta_{10} = 6$, y aproximando X_n y X_p por sus valores de freeze-out, $X_n \simeq X_n^* = 0.158$ y $X_p \simeq X_p^* = 1 - X_n^*$, calcule la temperatura de inicio de la nucleosíntesis. Recuerde que $\zeta(3) \simeq 1.202$.

c) Sabiendo que $G^{-1/2} = 1.221\times 10^{22}$ MeV y que 1 MeV$^{-1} = 6.58\times 10^{-22}$ s, calcule la edad del universo en el instante de inicio de la nucleosíntesis.

d) Sabiendo que la vida media del neutrón es $\tau_n = 886$ s, calcule la concentración de neutrones libres en el instante de inicio de la nucleosíntesis. Teniendo en cuenta que todos éstos terminan en el helio-4, obtenga la concentración en masa del helio-4 al final de la nucleosíntesis.

Problema 3 *(3 puntos)*

Consideremos el siguiente modelo inflacionario: un universo espacialmente plano cuyo contenido material es un campo escalar ϕ con potencial $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$, donde λ es un número positivo.

a) Encuentre en qué regiones del dominio de V se satisfacen las condiciones de slow roll,

$$\frac{1}{24\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1 \qquad \frac{1}{24\pi G}\left|\frac{V''}{V}\right| \ll 1.$$

b) Obtenga las soluciones tipo slow roll (es decir, tales que $\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)$ y $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V'(\phi)|$) de las ecuaciones acopladas de Klein-Gordon y Friedmann,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \qquad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right]$$

(recuerde que una solución de estas ecuaciones es un campo escalar $\phi(t)$ y un factor de escala $a(t)$). *Ayuda*: para obtener el factor de escala use que $H = d\log a/dt = \dot{\phi}\, d\log a/d\phi$.

c) Inflación termina cuando dejan de cumplirse las condiciones de slow roll. Teniendo esto en cuenta, obtenga qué valor inicial debe tomar el campo escalar para que haya 70 e-foldings de inflación.

d) Calcule la duración de la inflación para el valor inicial del campo escalar obtenido en el apartado anterior, en el caso en que $\lambda = 10^{-10}$. Exprésela en segundos, usando los datos del apartado (c) del problema 2.

Problema 4 *(1 punto)*

A partir de las ecuaciones de Friedmann, demuestre que la cantidad $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$ resulta menor que 1 si y sólo si la presión p y la densidad de energía ρ satisfacen la desigualdad $p < -\rho/3$.