

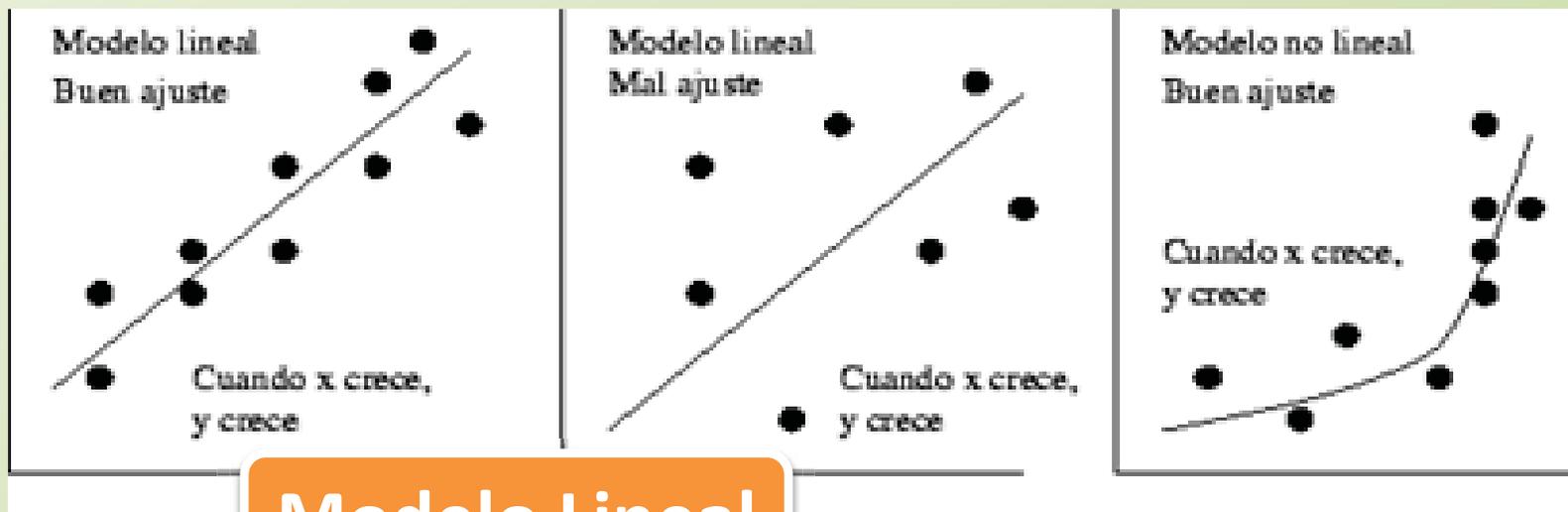
REPASO

CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre dos medidas:

Empleo un **modelo** que mejor relacione las variables
(que **mejor aproxime a mis datos experimentales**)

Caso más sencillo:



Modelo Lineal

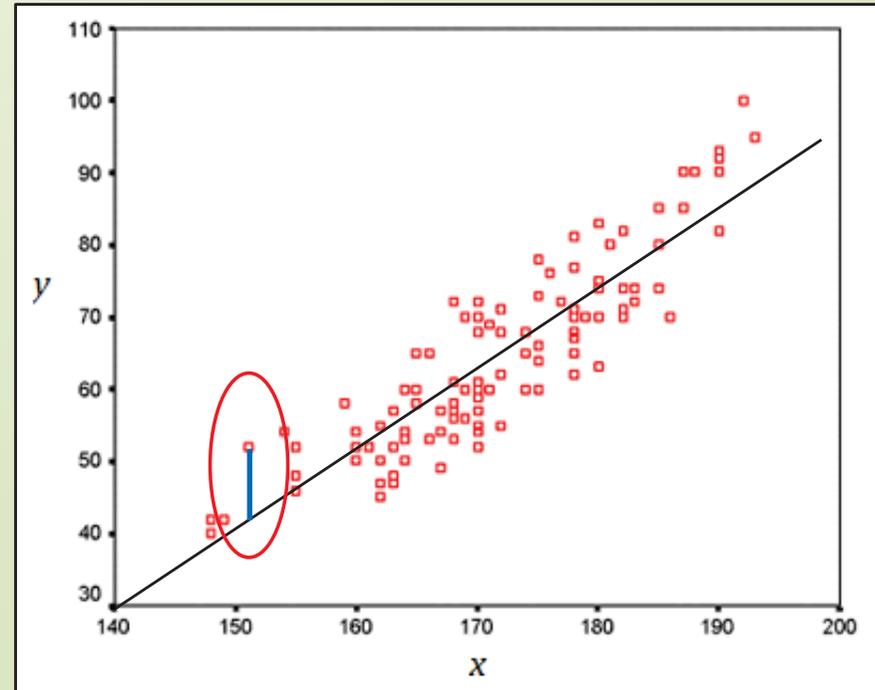
Caso aún más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)

Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

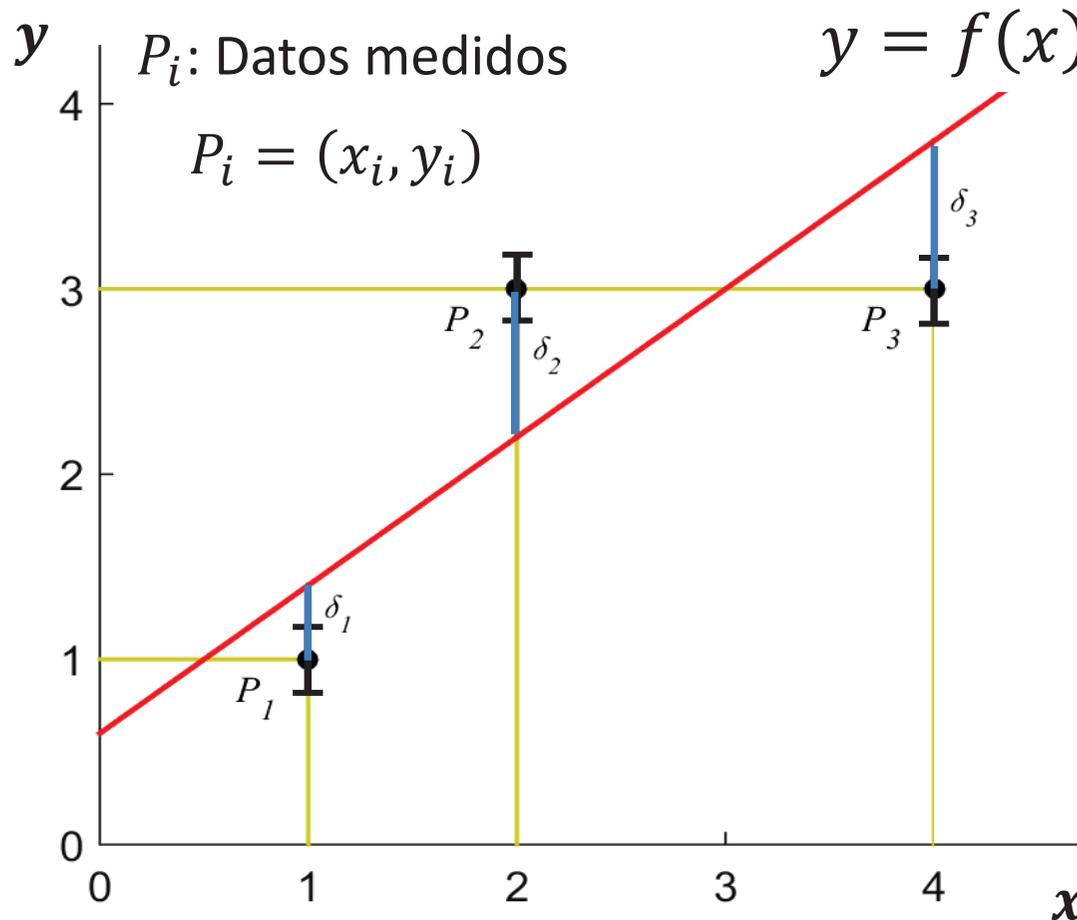


Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos experimentales al modelo sólo en el eje “y”

CUADRADOS MÍNIMOS

BUSCO un modelo que mejor aproxime a mis datos experimentales...

Caso aún más sencillo: Considerando la **Distancia en "y"**



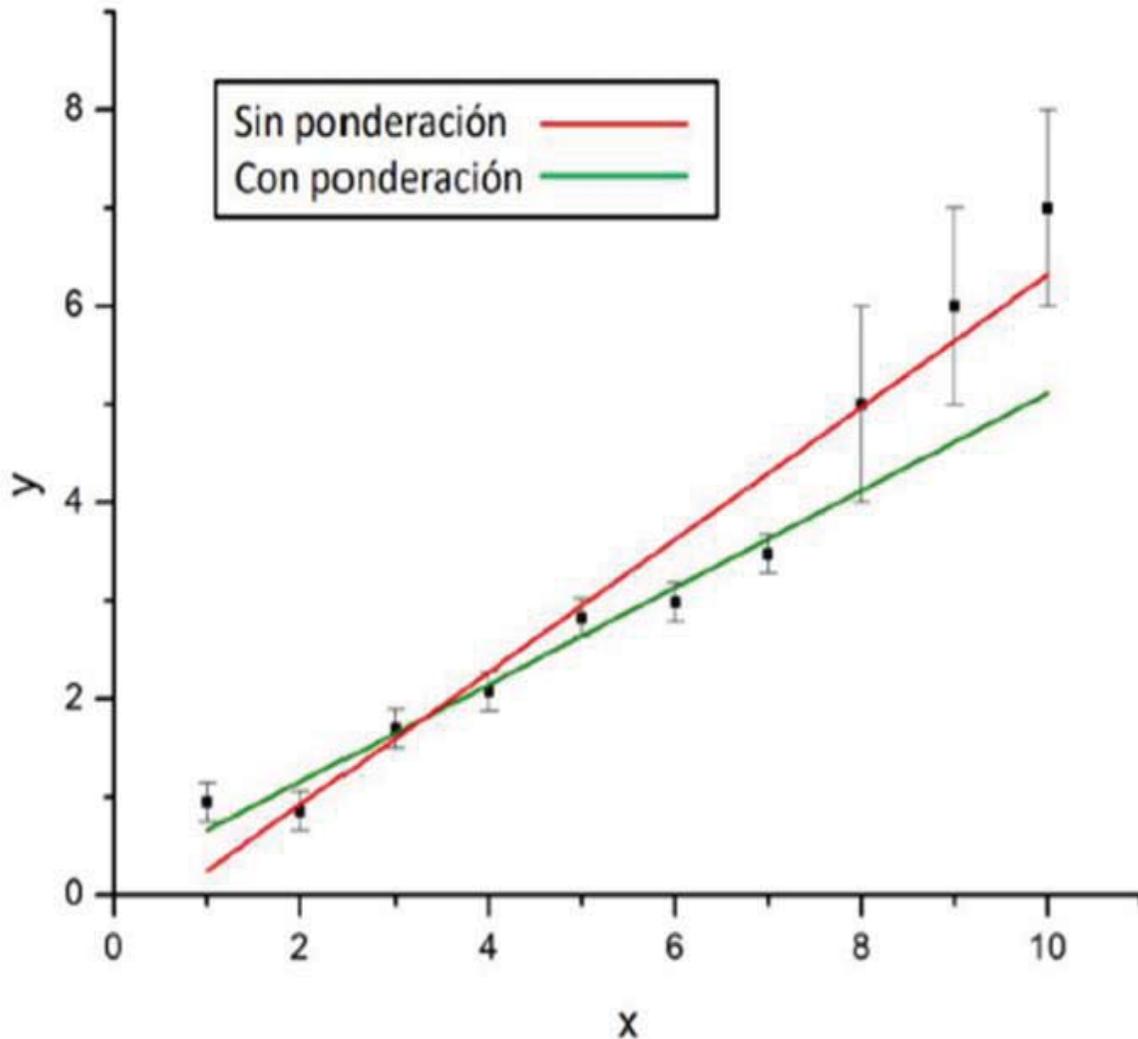
Hipótesis:

$$\epsilon_{ry} \gg \epsilon_{rx}$$

$$\epsilon_{ry} = \left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right|$$

D. C. Baird. Prentice Hall
(1991). Apéndice 2

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

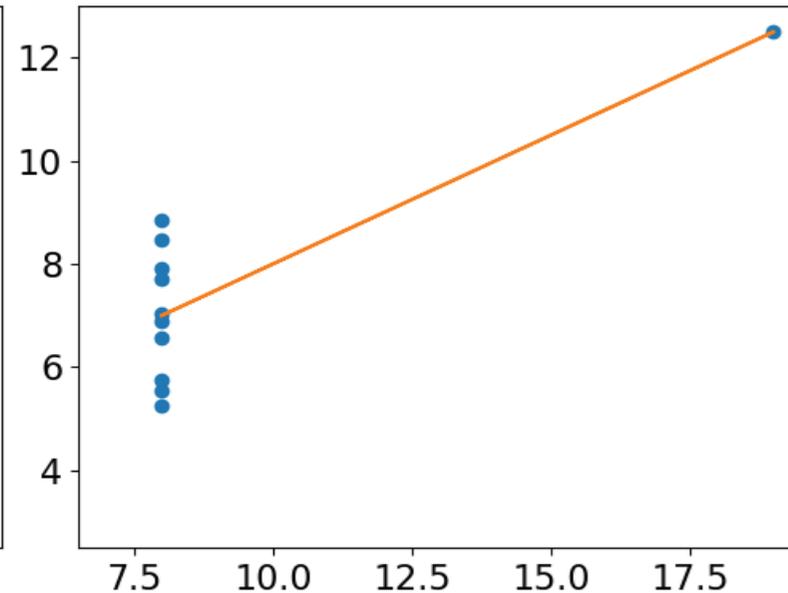
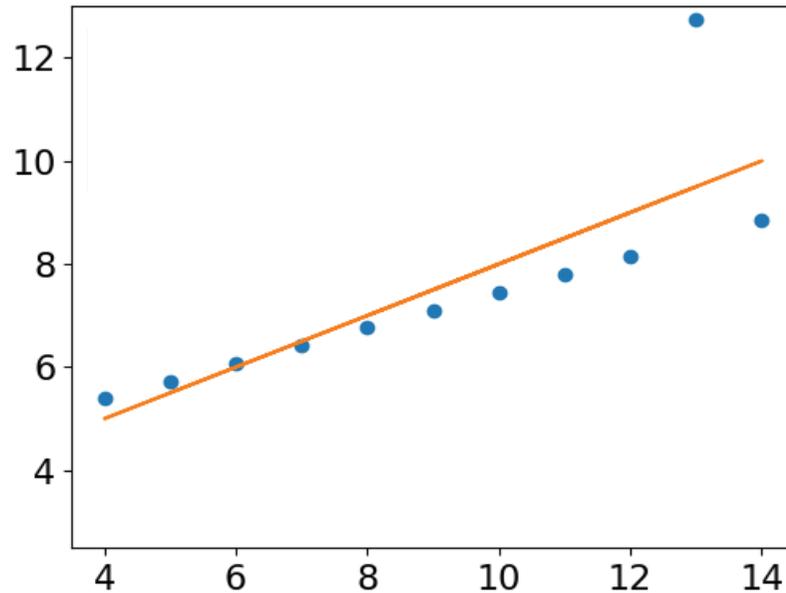
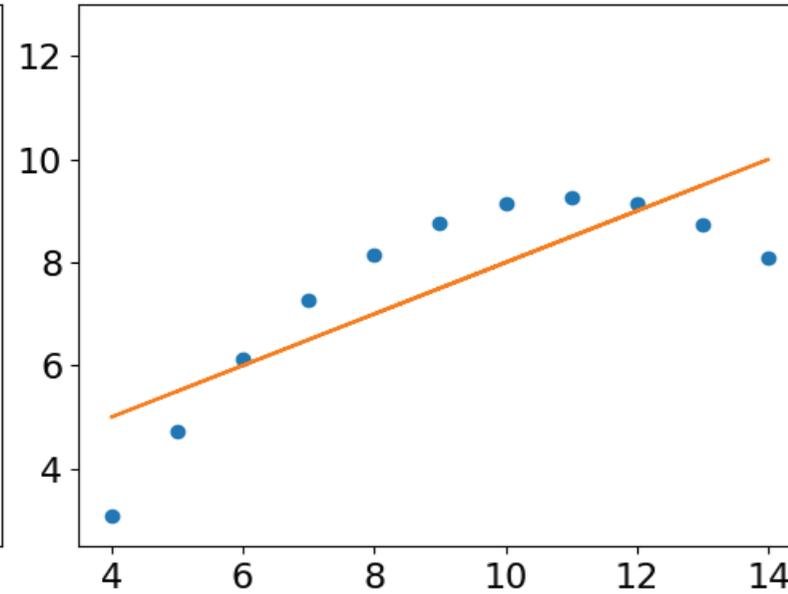
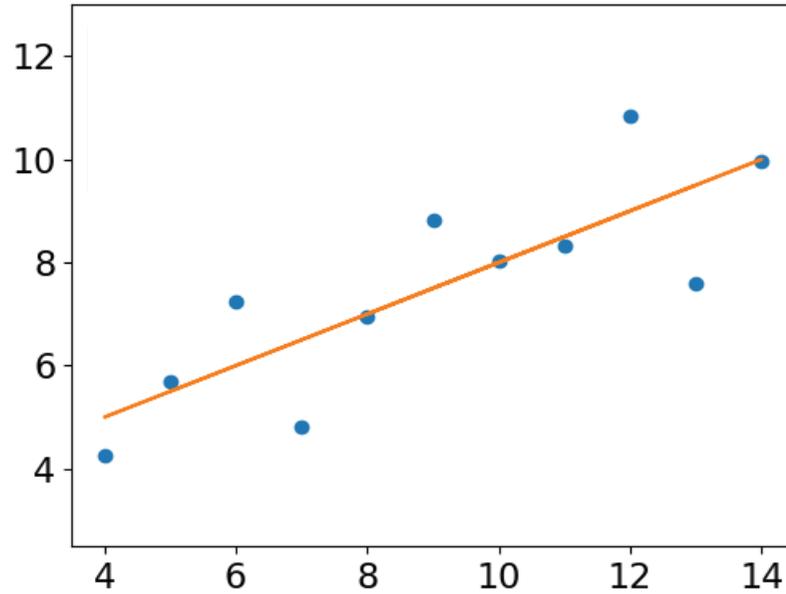
$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

OJO!!! NO siempre un modelo lineal es el adecuado



Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

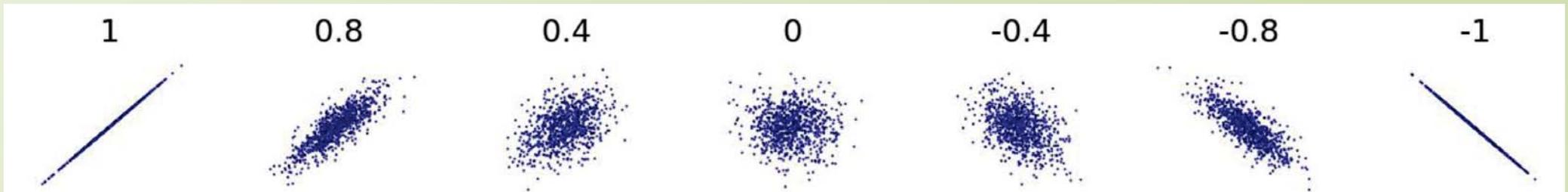
$$-1 \leq r \leq 1$$

Se espera que $|r| \sim 1$

$$\text{Var}(x) = S_x^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{Var}(y) = S_y^2 = \frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\text{Cov}(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



El coeficiente de correlación de Pearson se puede calcular en Python usando:

corrcoef() método de Numpy

Parámetros de BONDAD

Chi cuadrado reducido (χ_v^2)

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Chi cuadrado
reducido

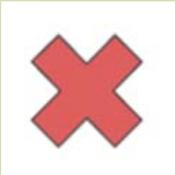
→ $\chi_v^2 = \frac{\chi^2}{N - 2}$

Caso lineal:

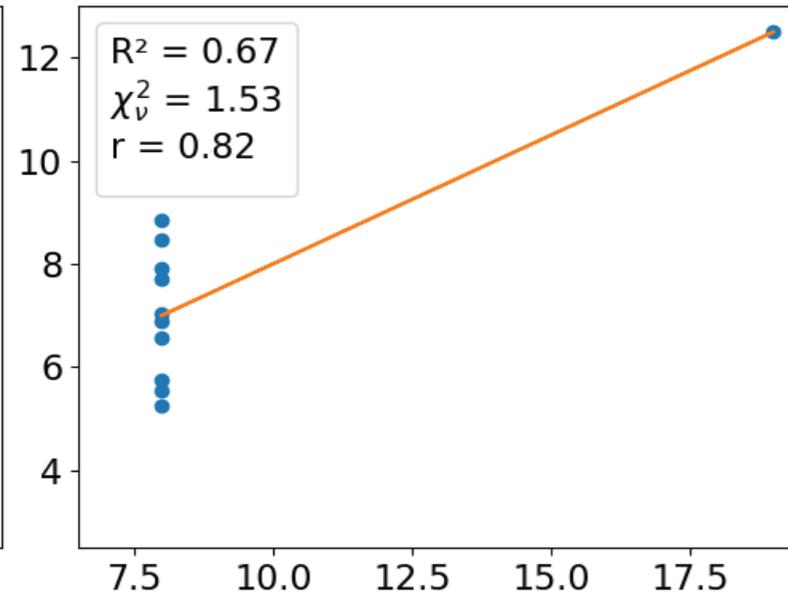
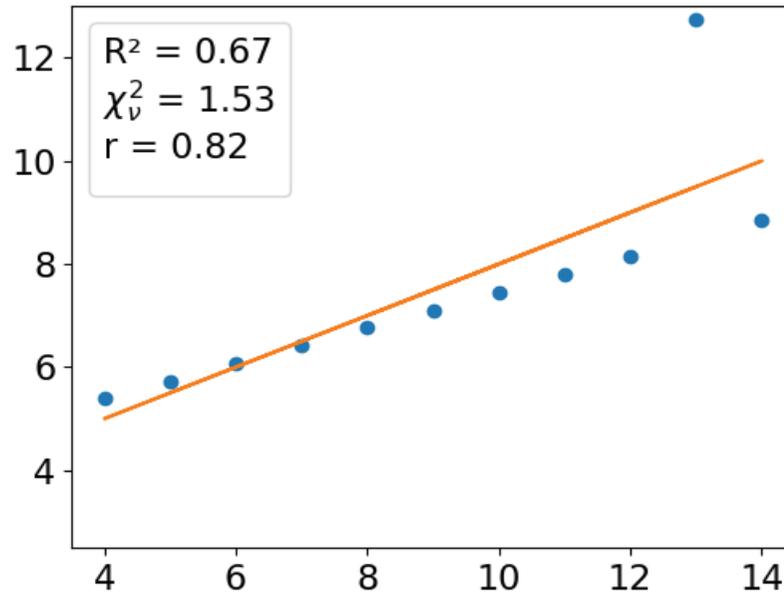
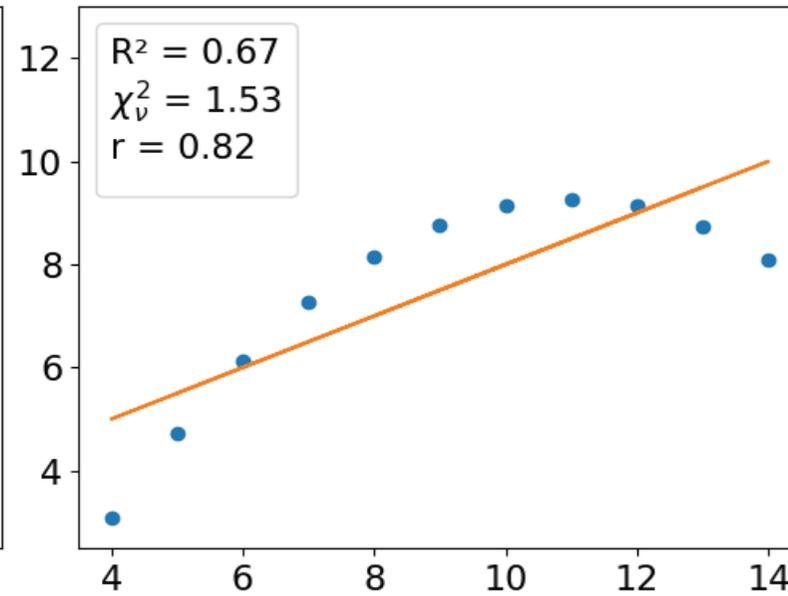
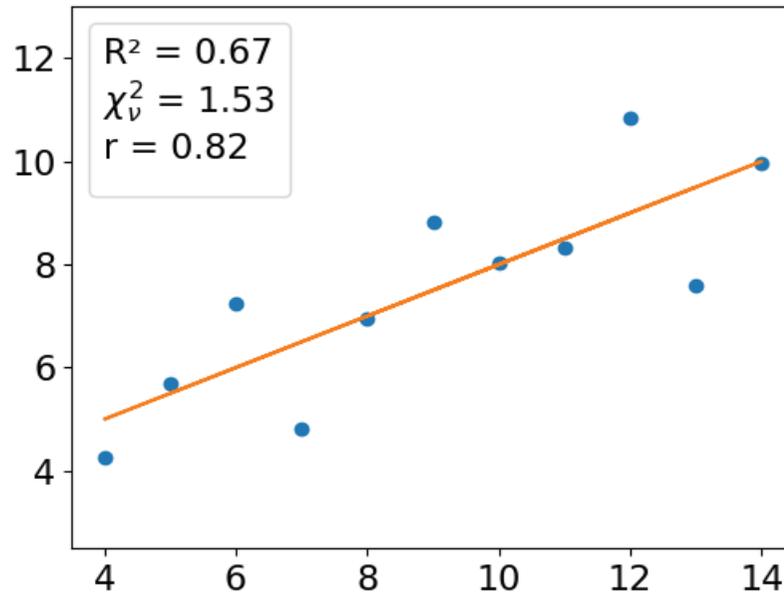
N = número de datos

2: los grado de libertad

Se espera que χ_v^2

$\chi_v^2 \sim 1$	
$\chi_v^2 \ll 1$	
$\chi_v^2 \gg 1$	

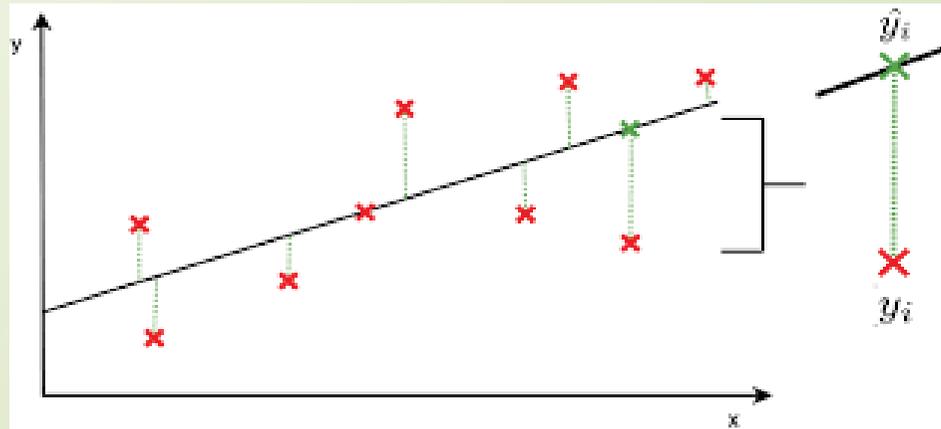
Pero **OJO!!!!** Estos ejemplos tienen igual valor de R^2 , r , χ^2_v



Parámetros de BONDAD

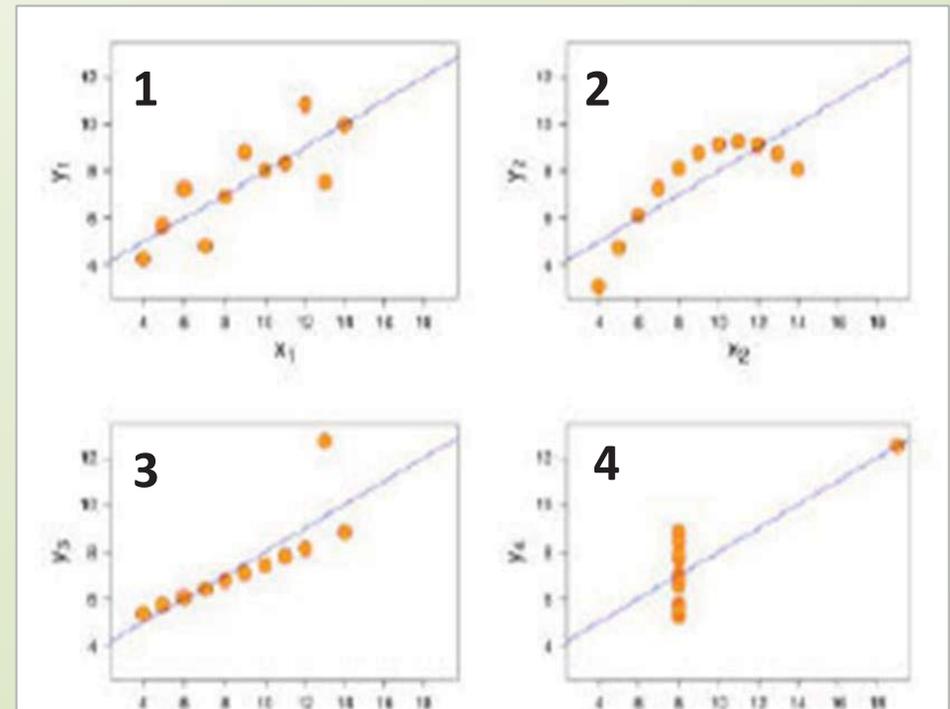
Residuos

Distancia de los puntos experimentales a la recta, en “y”

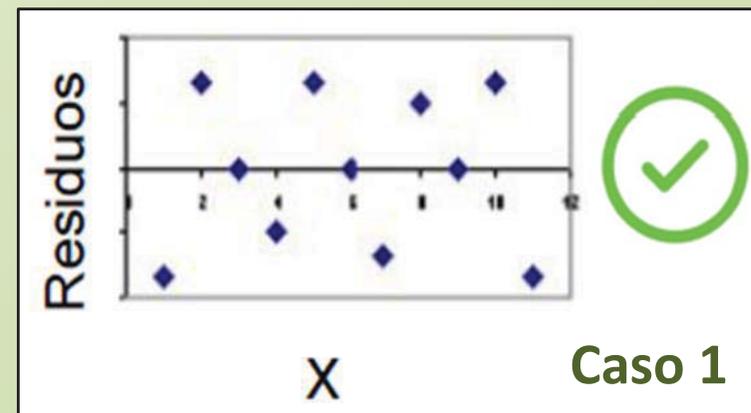
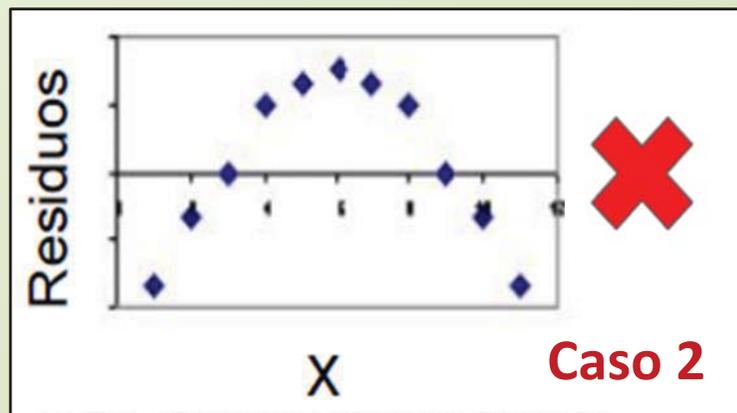


Los residuos NO DEBEN tener ESTRUCTURA

Residuos



En los **casos 2, 3 y 4** la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal. **Los residuos tienen estructura**



Parámetros de BONDAD

¿Qué esperamos?

Parámetros e BONDAD que nos servirán de ayuda

Coeficiente de
Correlación de Pearson

r →

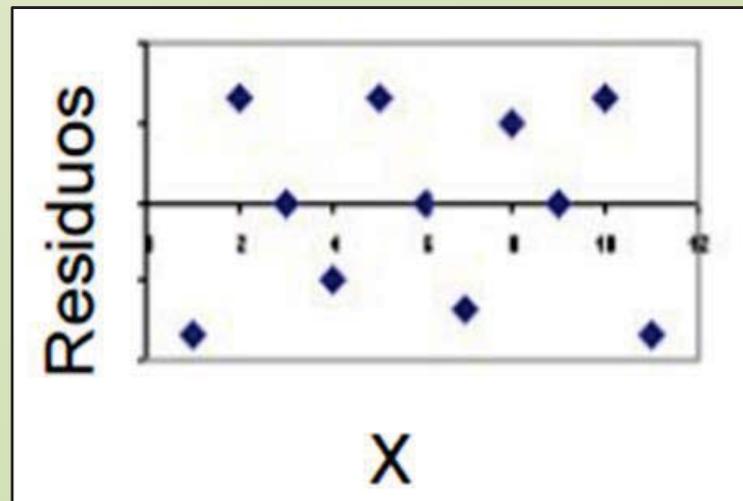
$$|r| \sim 1$$

Chi-cuadrado reducido

χ_v^2 →

$$\chi_v^2 \sim 1$$

Residuos
Sin ESTRUCTURA



Objetivo de la práctica de hoy y Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo (T) y la Longitudes (l)

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g) \text{ Ud.}$$

ACTIVIDAD 1 MEDICIÓN INDIRECTA

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T DE UNA DADA LONGITUD l

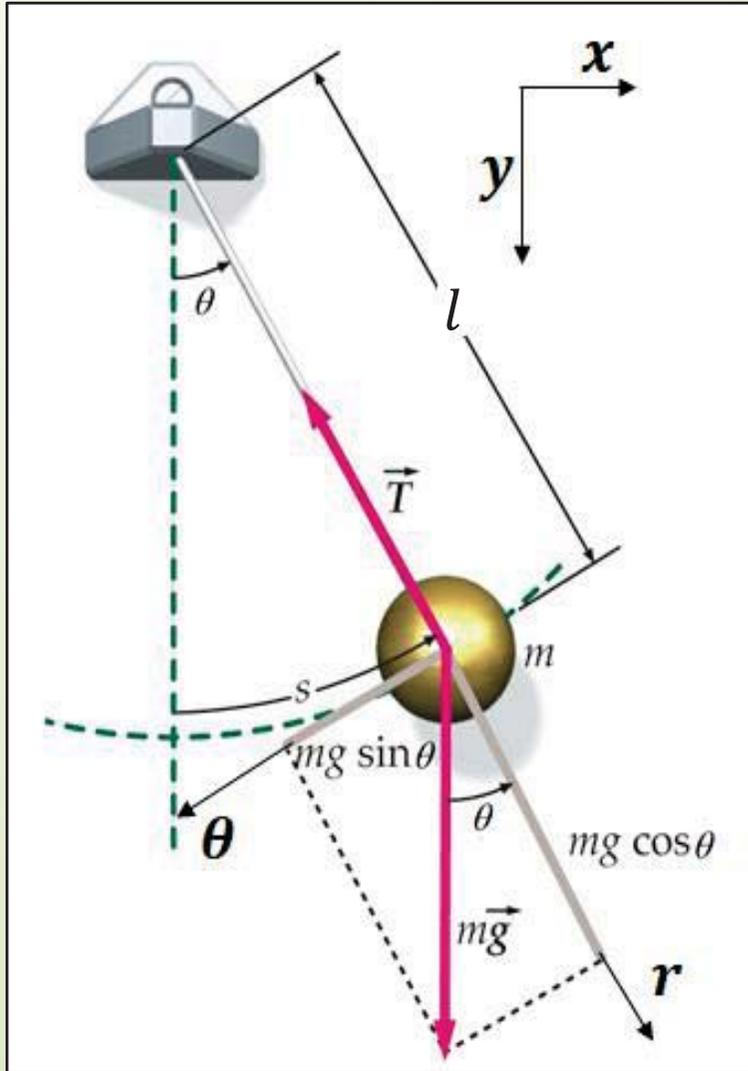
- Determinar el valor de la aceleración de la gravedad (g) a partir del resultado de T de la **CLASE 4** (*el resultado de $N = 160$*).

BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE
RELACIONE g con T

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g) Ud.$$

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{r}: mg \cos \theta - T = ma_r \rightarrow a_r = 0 \\ \hat{\theta}: -mg \sin \theta = ma_\theta \rightarrow a_\theta = -g \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= l\theta \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \\ a_\theta &= \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

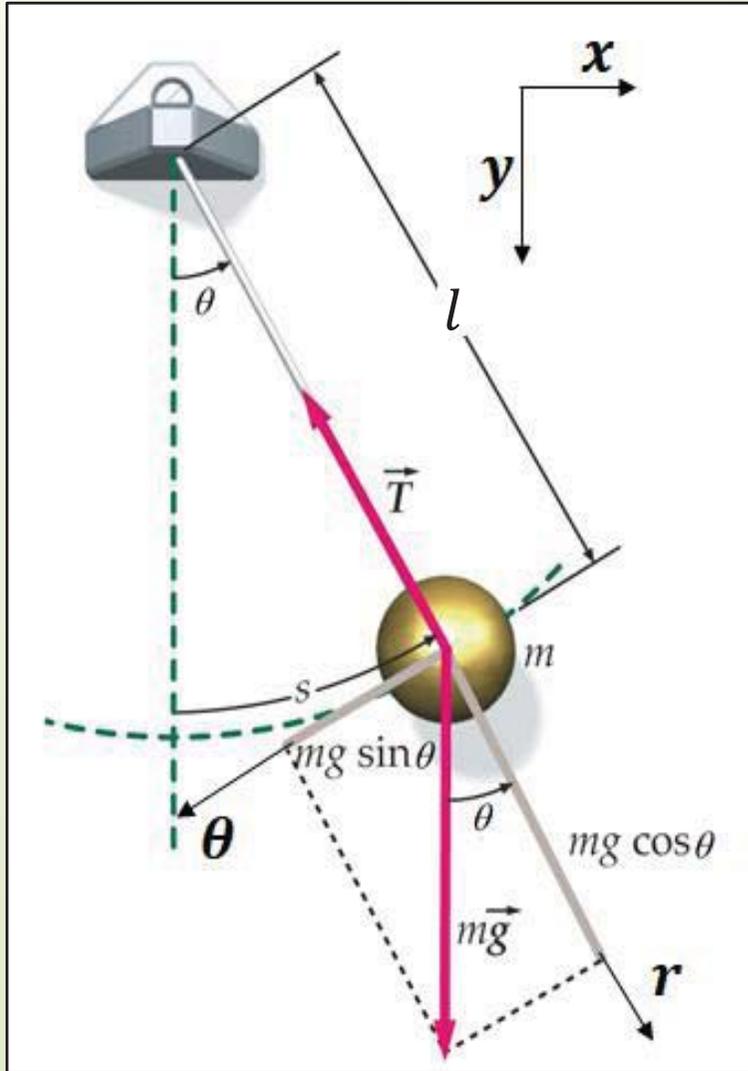
$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ecuación
diferencias
de 2^{do} orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \text{sen}\theta \approx \theta \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $f = \frac{\omega}{2\pi}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Período de un péndulo de longitud l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Período de un Péndulo Simple



Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2^{do} orden

$$l \ddot{\theta} + g \text{sen}\theta = 0$$



$\Theta(^{\circ})$	$\Theta(\text{rad})$	$\text{sen}\Theta$	dif. %	$\Theta(^{\circ})$	$\Theta(\text{rad})$	$\text{sen}\Theta$	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

ACTIVIDAD 1 MEDICIÓN INDIRECTA

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T DE UNA DADA LONGITUD l

- Determinar el valor de la aceleración de la gravedad (g) a partir del resultado de T de la **CLASE 4** (*el resultado de $N = 160$*).

BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE
RELACIONE g con T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g) \text{ Ud.}$$

ACTIVIDAD 2 CUADRADOS MÍNIMOS

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T CON DIFERENTES LONGITUDES l Y EL USO DE UN MODELO LINEAL

- Determinar el **período del péndulo (T) para 10 longitudes (l) diferentes en el rango 30 cm hasta lo máximo que puedan!**
- **Graficar T en función de l (gráfico de puntos con incertezas).**

Para la Figura 1: $T = \bar{T} \pm \Delta T$ y $l = \bar{l} \pm \Delta l$

- **Discutir:** *¿Qué forma parece tener la función graficada?*

Van a poder obtener g usando un modelo lineal a la gráfica $T(l)$?

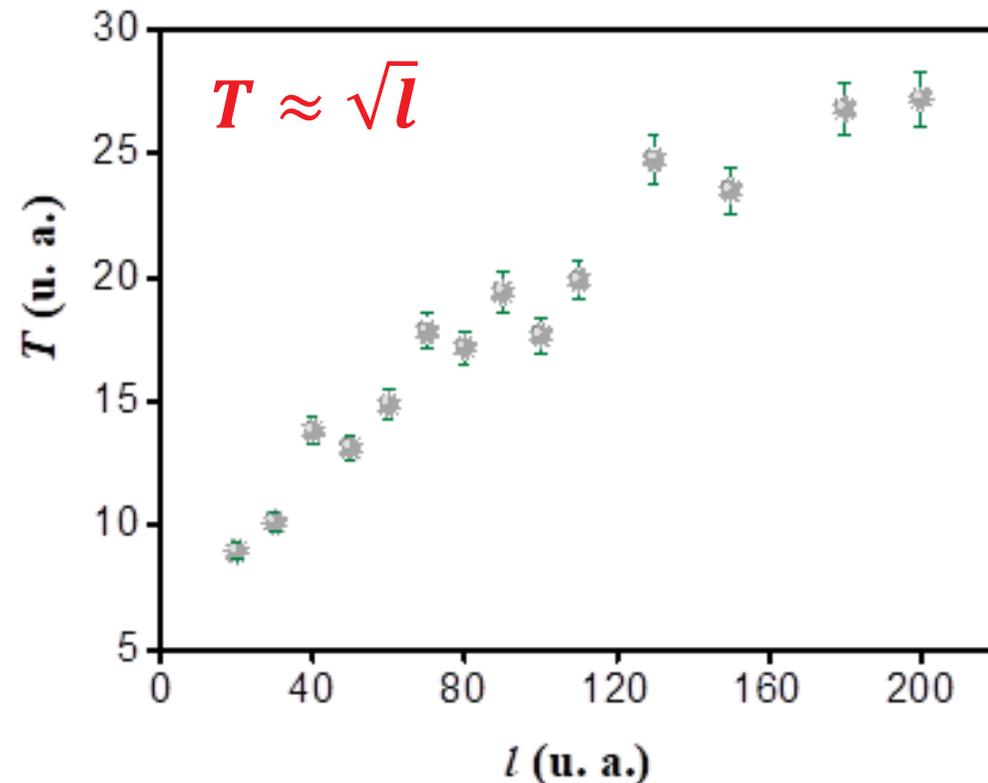
ACTIVIDAD 2 CUADRADOS MÍNIMOS

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T CON DIFERENTES LONGITUDES l Y EL USO DE UN MODELO LINEAL

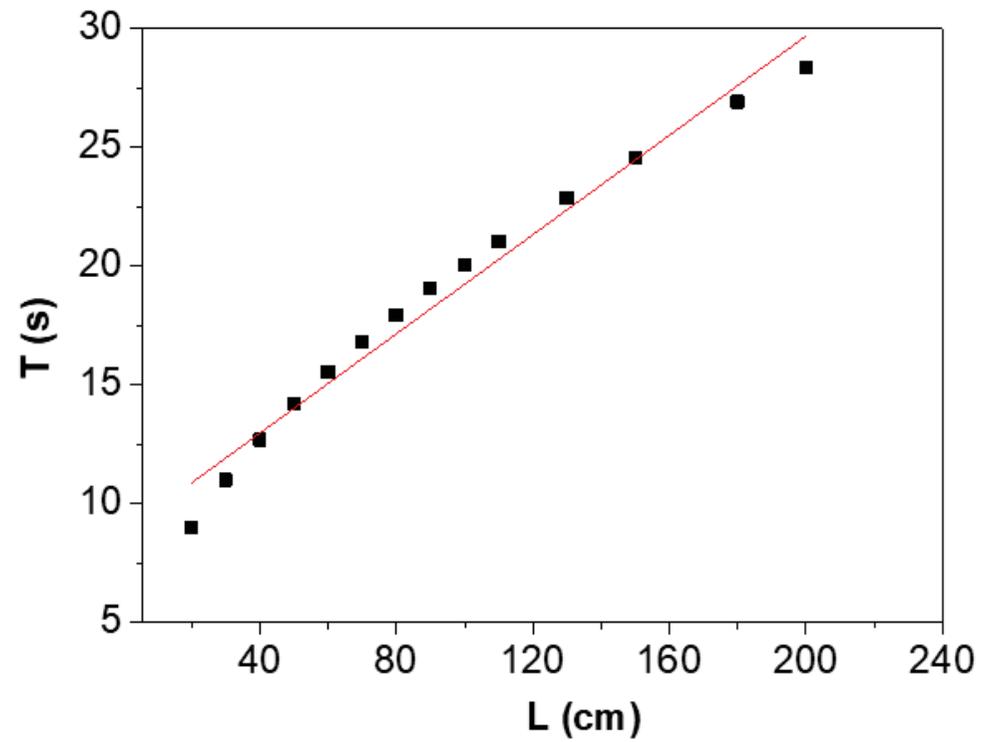
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



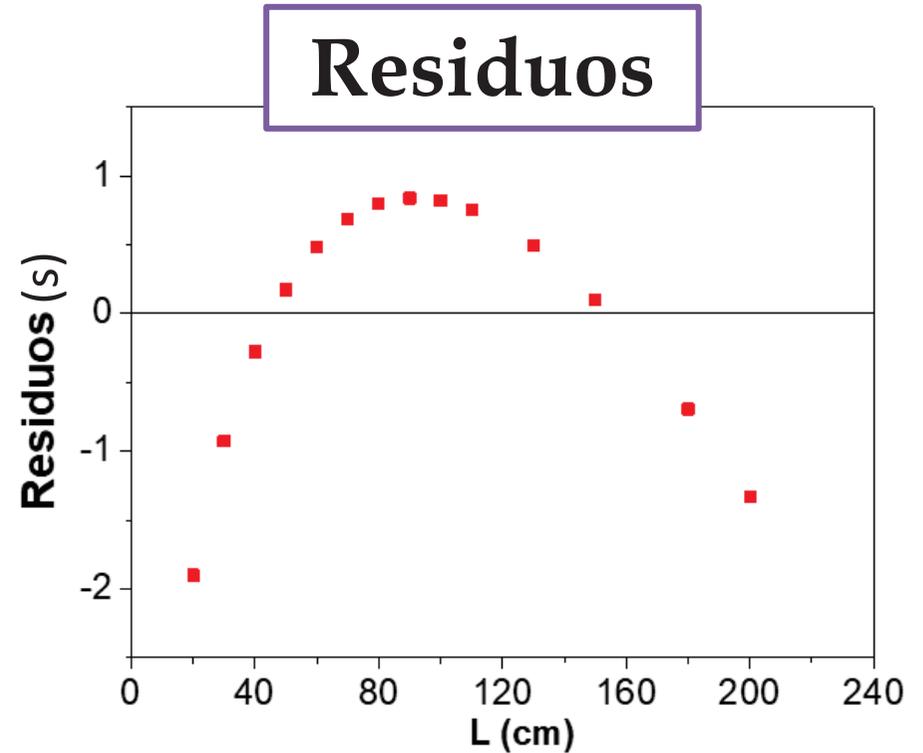
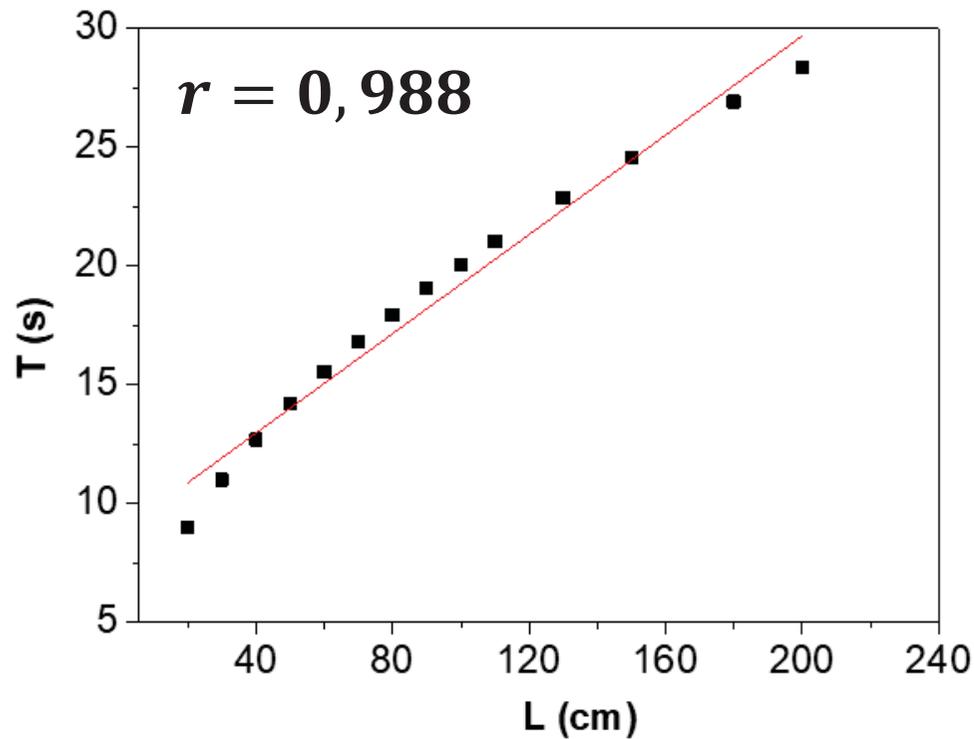
T NO ESTÁ RELACIONADO
LINEALMENTE CON l



Está bien usar el modelo lineal en este caso?

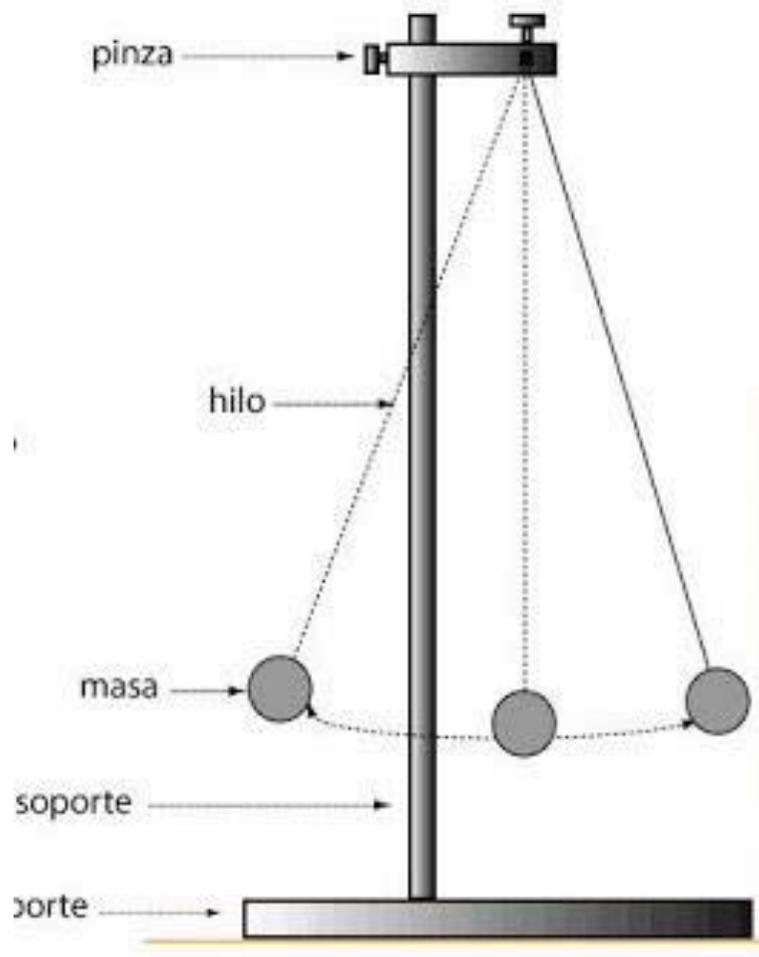


Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l !!

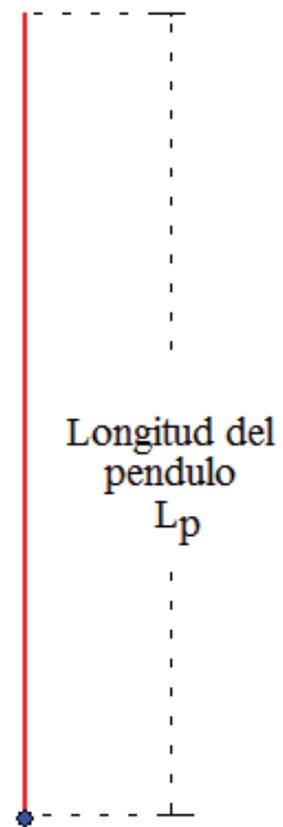


NOOOOOO es lineal!!

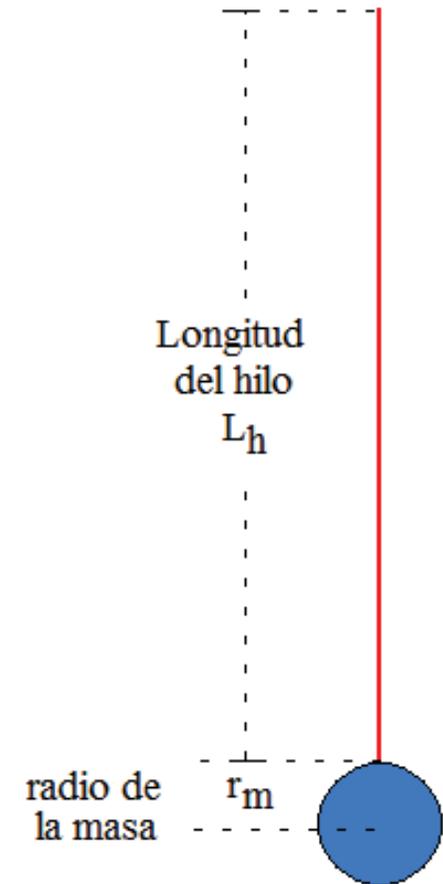
PÉNDULO



Caso ideal



Caso real



MIDO 1 VEZ N PERÍODOS JUNTOS

¿Cuál será el resultado de T ?

$$N \text{ períodos juntos } (T'): T' = N \cdot T \rightarrow T = \frac{T'}{N} \rightarrow \bar{T} = \frac{\bar{T}'}{N}$$

Propagando!

¿Y la incerteza de T ?

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 \Delta T'^2} = \frac{1}{N} \Delta T'$$

La incerteza de una medida $\rightarrow \Delta T' = S \text{ o } \sigma$

$$\Delta T = \frac{S}{N}$$

$$\Delta T = \frac{\sigma}{N}$$

S (σ) \rightarrow Y ya la calculamos antes!!

¿Variará si cambiamos la longitud del hilo?

ACTIVIDAD 2 CUADRADOS MÍNIMOS

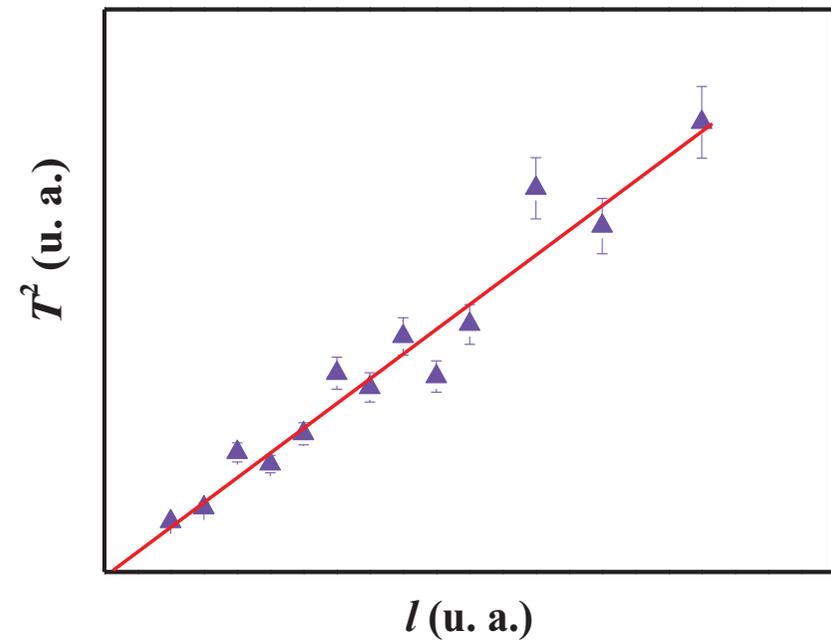
¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

T (circled in red) = $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ (circled in red) \sqrt{l} (circled in red)

T^2 (circled in red) = $\frac{4\pi^2}{g}$ (circled in blue) l (circled in red)

\tilde{T} (circled in red) is the slope (Pendiente) of the linearized relationship.



- ✓ $y = mx$
- ✓ $y = mx + b$

RESUMEN

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ y $l = l$:
 - 1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $T^2 \rightarrow \Delta T^2$) y Δl
 - 2- Obtenga los errores relativos de \tilde{T} y l ($\varepsilon_{r\tilde{T}}$ y ε_{rl}) y compárelos
- Graficar T^2 en función de l con las incertezas (o l en función de T^2 dependiendo de los ε_{rT^2} y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje “y”.
- Realizar un ajuste por dos modelos lineales:
 - ✓ $y = mx$
 - ✓ $y = mx + b$
 ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?
- Graficar los residuos de ambos ajustes y discutirlos.

Propago!!

AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y ↑
 x ↑

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

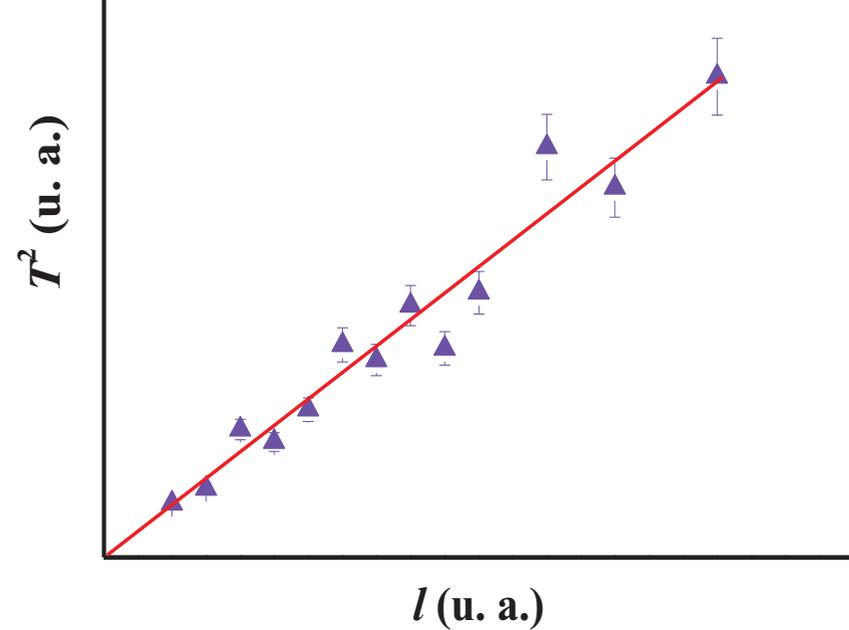
$$m = \frac{4\pi^2}{g} \rightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}$$

¿ Δg ?

Propago!!

Ejemplo Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \gg \varepsilon_{r_l}$



$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta \pi^2}$$

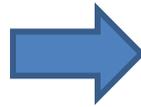
¿Puedo despreciar el término de π ?

AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r_l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$



$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

The diagram shows the equation $l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$ with annotations: a red circle around l and a red circle around T^2 , both with red arrows pointing up to their respective labels y and x . A blue circle around the fraction $\frac{g}{4\pi^2}$ has a blue arrow pointing down to the text below.

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \rightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿ Δg ?

Propago!!

ACTIVIDAD 2 CUADRADOS MÍNIMOS

- Realizar un ajuste por dos modelos lineales
- Reportar m y b (con incertezas y unidades!). Discutir qué podría representar b en su experiencia. *¿Es distinto de cero?*
- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)$ Ud. a partir de los resultados de los ajustes.

$$\checkmark y = mx$$

$$\checkmark y = mx + b$$

ACTIVIDAD 3

- Comparación de g :
 - ¿Presentan diferencias significativas entre sí?*
 - ¿Cuál resultó más exacto?*
 - ¿Cuál más preciso?*

INFORME:
Entrega hasta miércoles 27/9
a las 8 hs

1. Introducción

¿Qué podría ir en este informe?

- Péndulo simple, descripción teórica. Colocar la ecuación que relaciona T con l y las hipótesis conocidas para que se cumpla.
- Método de cuadrados mínimos en forma teórica, qué hipótesis utiliza el modelo lineal (errores relativos). Diferencia entre caso ponderado/no ponderado. Parámetros de bondad + Residuos

Último párrafo: **El objetivo** de este trabajo

2. Desarrollo experimental

→ Describir el sistema experimental y la metodología de medición. Aclarar cómo se midió l y cómo T y cómo se determinaron sus incertezas, en palabras (ej. usando la fórmula de propagación de errores, o como el error estadístico, etc.).

NO coloque las ecuaciones del cálculo de los errores.

→ Incluir una figura que represente el esquema del dispositivo experimental. Puede ser foto o dibujo esquemático. SIEMPRE marcar qué es cada cosa.

→ Describir los dos métodos que usaron para determinar el valor de g . Traten de definirlos para hablar de ellos luego

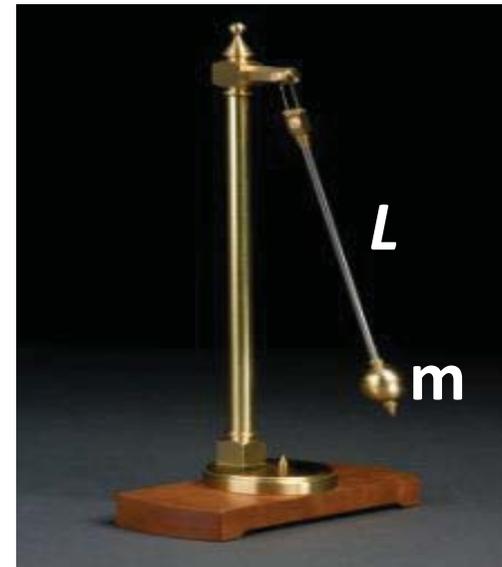


Figura 3. Fotografía del péndulo utilizado para determinar la constante gravitatoria. Donde m es la masa y L el largo.

3. Resultados y discusión

- La **Figura de T vs l con las incertezas**. Discutir qué relación observa.
NO colocar la tabla de datos! NUNCA
- La **Figura de T^2 vs l (o l vs T^2) con la incerteza de la variable del eje “y”, con el ajuste lineal** (ponderado?); y debajo, la **Figura de los residuos** (Ej. Fig. 5).
- Expresar el **resultado de a (pendiente) y b (ordenada al origen)**.
NO olvidar las unidades! (Analizar el valor de b obtenido!)
- Reportar el resultado de r y χ^2 , y discutir la **calidad del ajuste** a partir de ellos y de los Residuos.
- La **Figura con los resultados de g** de los dos métodos y el valor de **g tabulado**.
- Discusión **comparativa de g** : Diferencias significativas, exactitud, precisión de los resultados, fuentes de incerteza, etc....
Representatividad de los métodos