Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2023

Mediciones Directas
Incertidumbres Estadística

Lucía Famá, Ariel Kleiman,
Eugenia Samaniego Onofre, Aldana Holzmann,
Federico Szmidt

REPASO DE LA CLASE PASADA …

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.}$$

$\bar{x}$**:** Valor más representativo (x_0)

Δx**:** Incerteza Absoluta

Mediciones Directas (MD)

1: Pesa como fuente de incerteza INSTRUMENTAL

1 - Si tengo 1 dato

⇨ $\boldsymbol{\bar{x}}$ = número leído en el instrumento

⇨ $\Delta x = \boldsymbol{\sigma_{ap}}$ ⇨ $x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right) Ud.$

$\boldsymbol{\sigma_{ap} = 0,01\ s}$

$x = (13{,}16 \pm 0{,}01)\ s$

Peeeeero …. ***JAMÁS MEDIR UNA SOLA VEZ UNA MF !!!!***

2 - Si tengo más de 1 medida??

⇨ $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

$\Delta x = ?$

Orienta la Tabla (Clase 1)

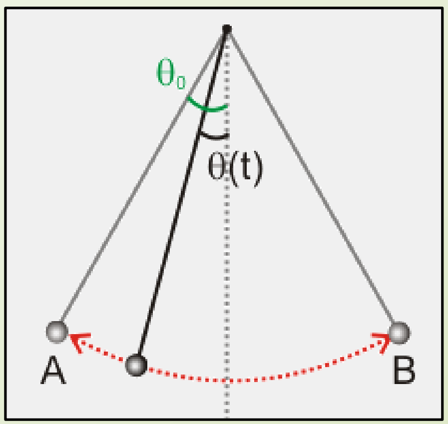
$\boldsymbol{P = \dfrac{R}{\bar{x}} 100}$

Mediciones Directas (MD)

D) Si $\boldsymbol{P} > \mathbf{15\%}$

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

¿Cuál es el valor de T? ⇨ $T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud.$



13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

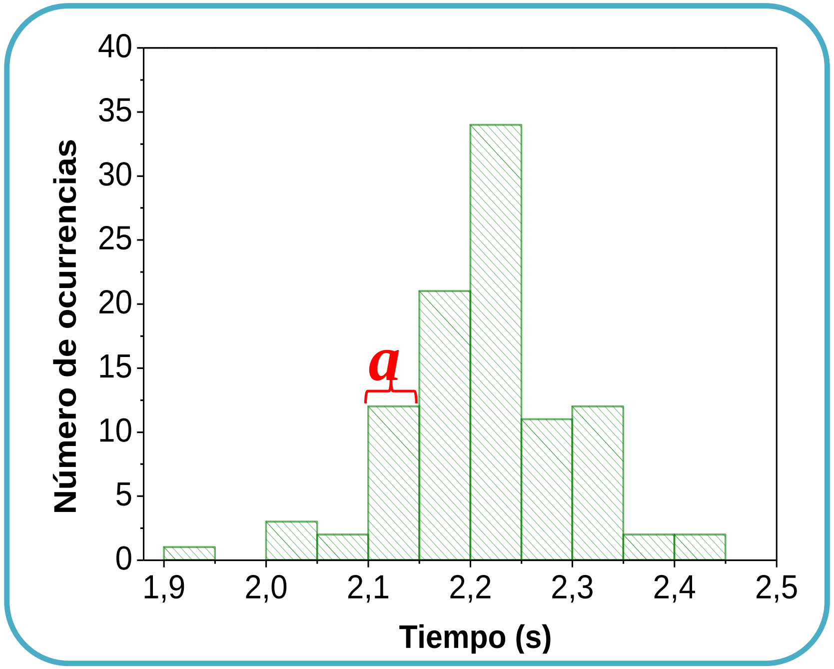
resolución
0,01 s

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$$

$$\Delta \boldsymbol{T} = ???$$

Distribución de datos - Histogramas

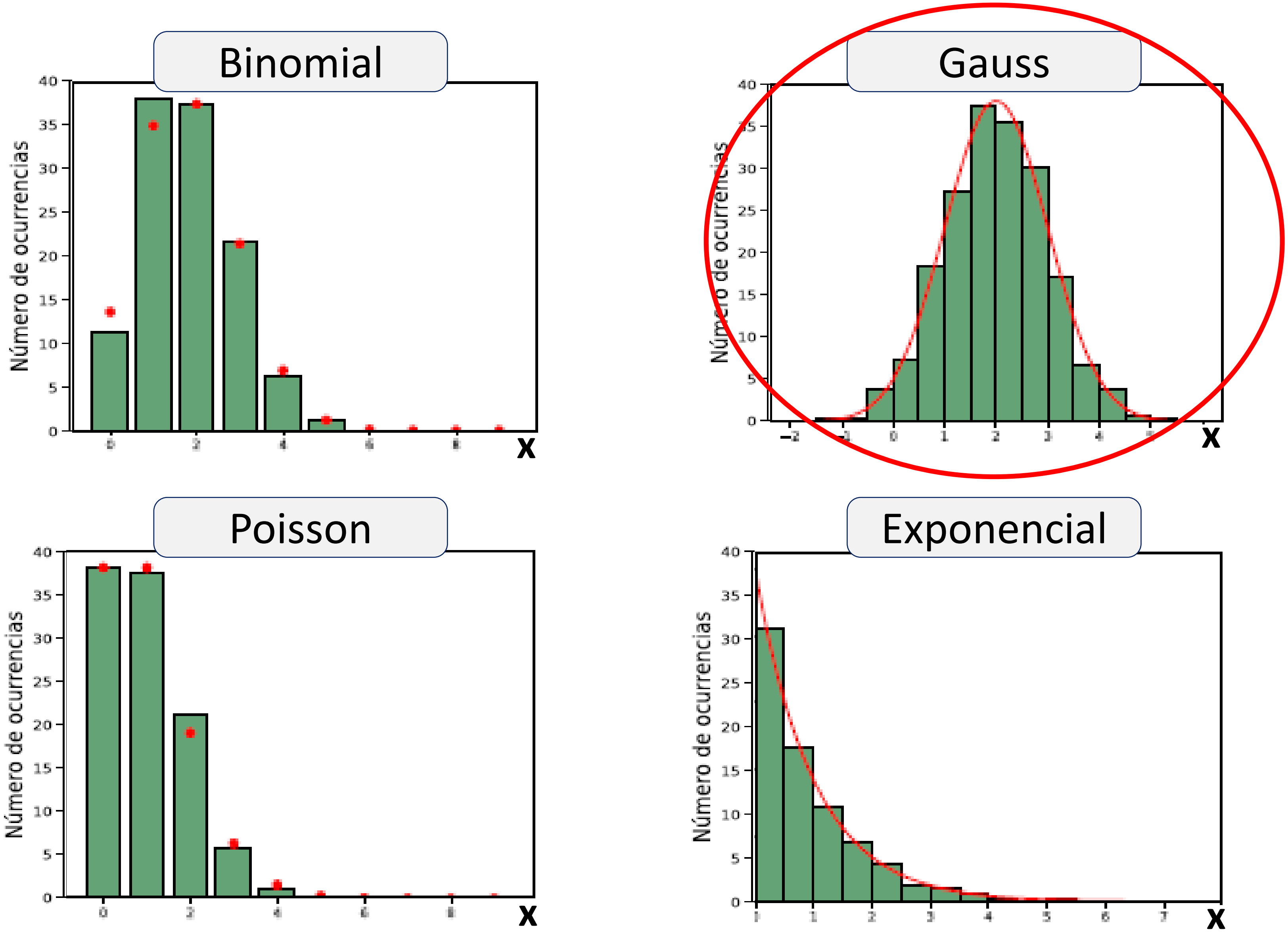
Histograma → Representación gráfica en coordenadas cartesianas de la distribución de datos



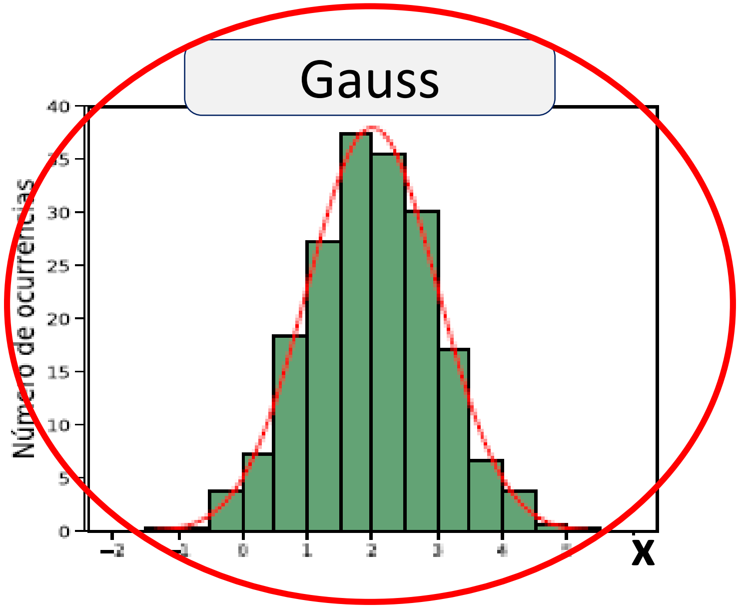
N ≥ 30

$$\sum_j Número\ de\ ocurrencias_j = N$$

Ejemplos de distribuciones



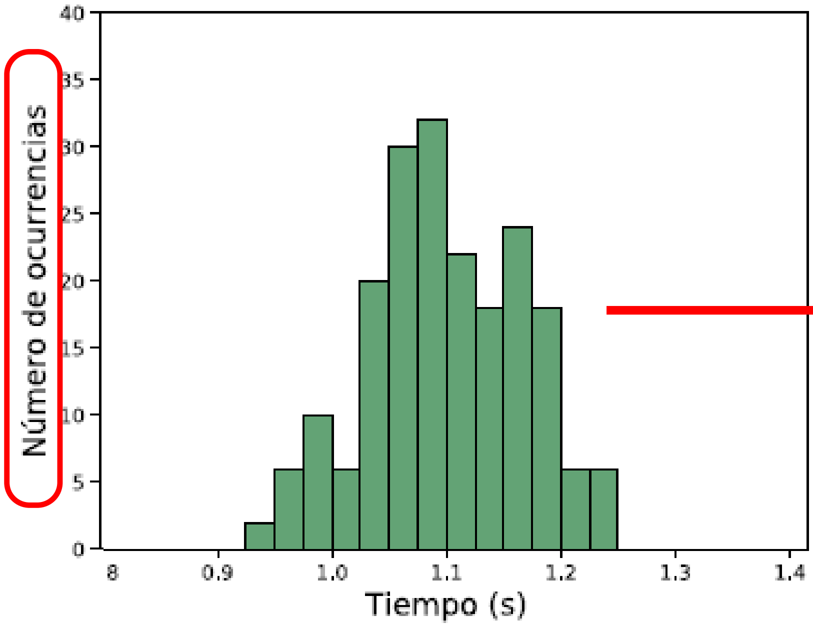
Asumimos distribución Gaussiana

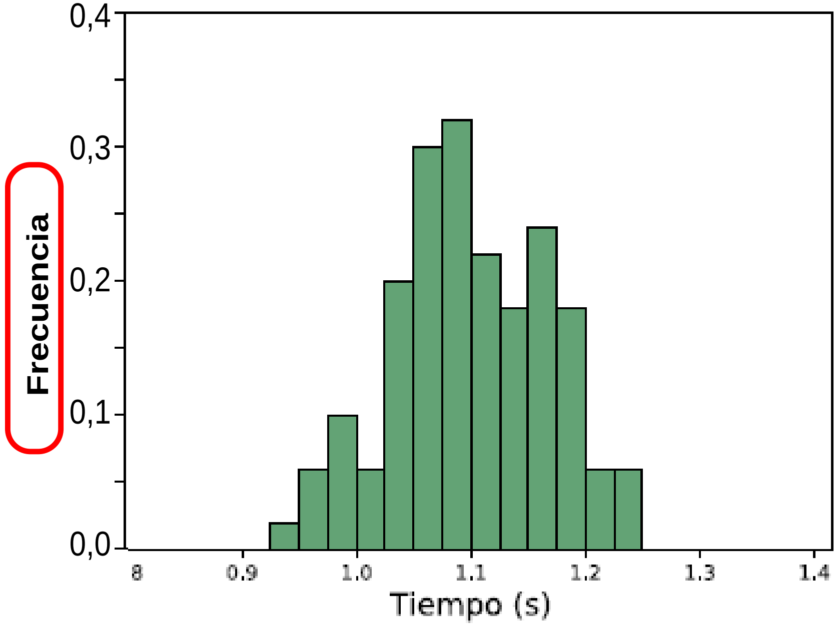


¿Qué sucede si aumento el número de mediciones?

Para poder comparar Histogramas con diferente número de mediciones

$$\frac{N^{o}\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$





Condición de Normalización

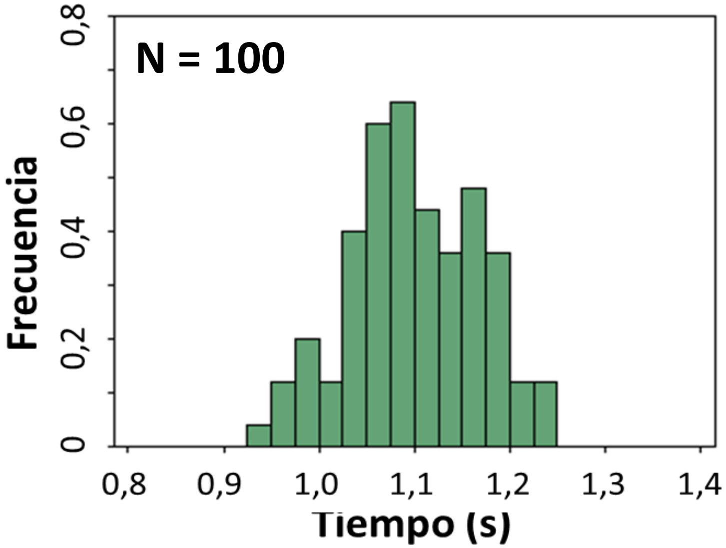
$$\sum_j Número\ de\ ocurrencias_j = N$$

$$\sum_j F_j = 1$$

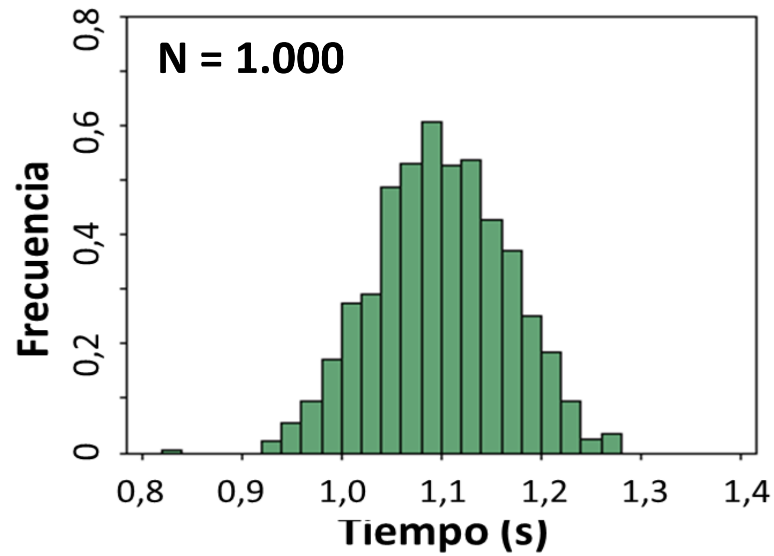
¿Si aumenta N?

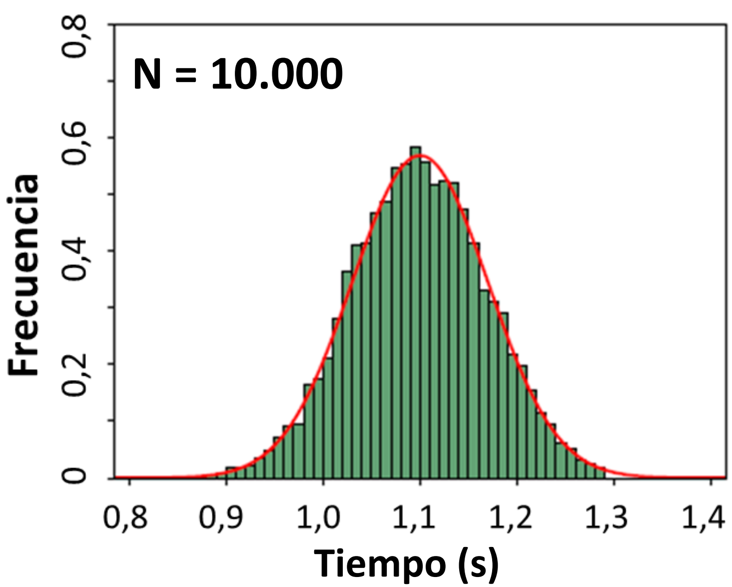
$$\boxed{C = 1 + 3{,}322\ \ln(N)}$$

Regla de Sturges

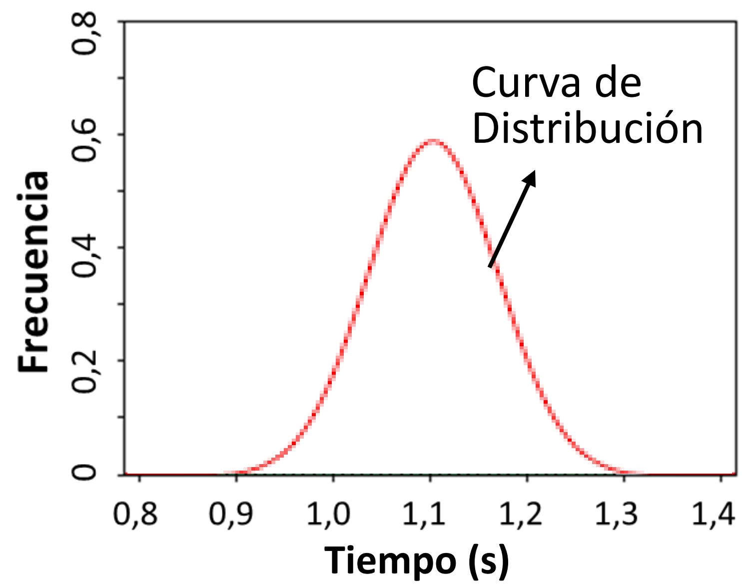


↑ N
↑ C
↓ *a*

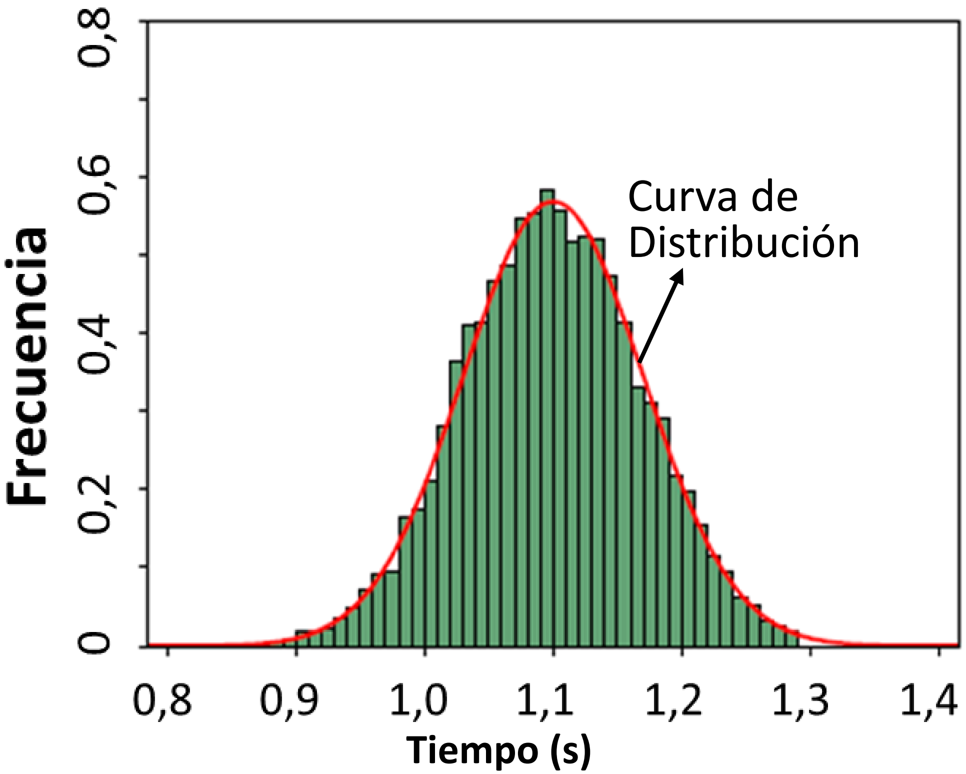




$$N \to \infty$$
$$a \to dt$$



¿Si aumenta N?



$$N \to \infty$$

$$a \to dt$$

$$F_i \to f(t)dt$$

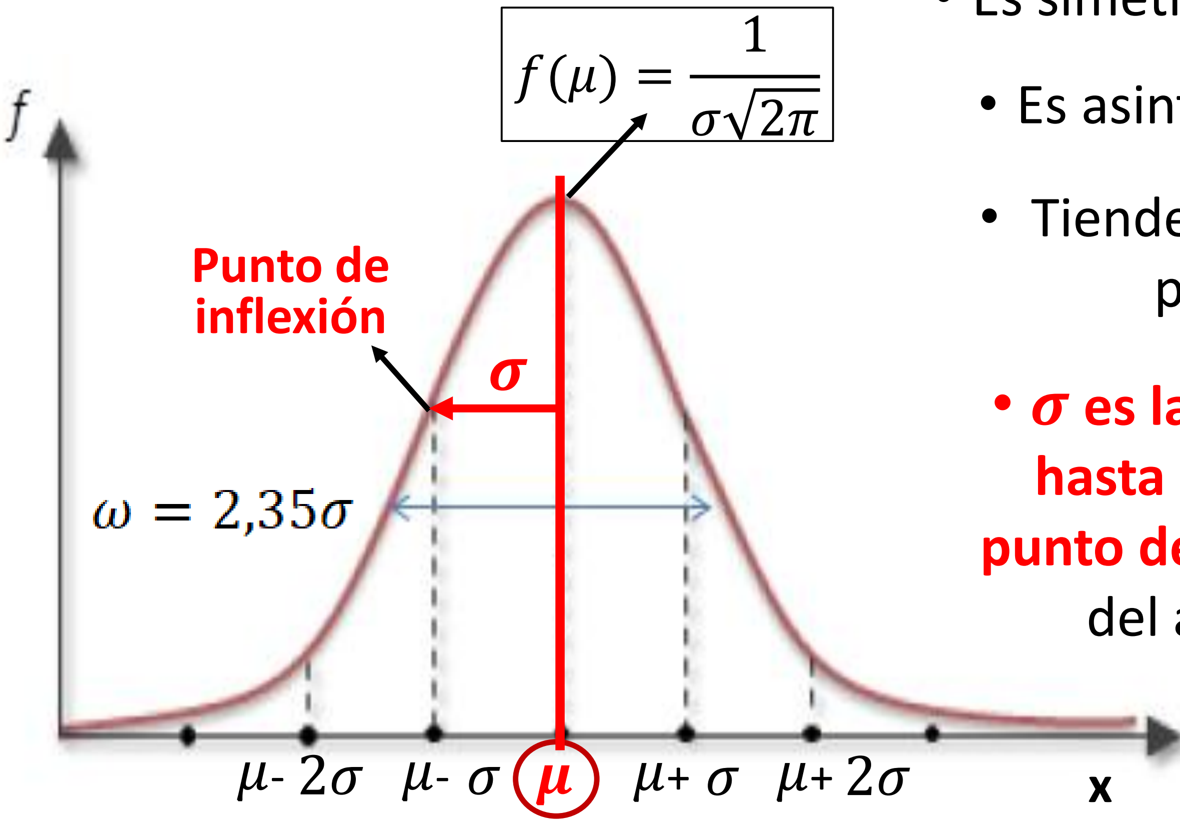
$f(t)$: *Función de distribución de probabilidades*

Condición de Normalización

$$\sum_i F_i = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dx = 1$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$



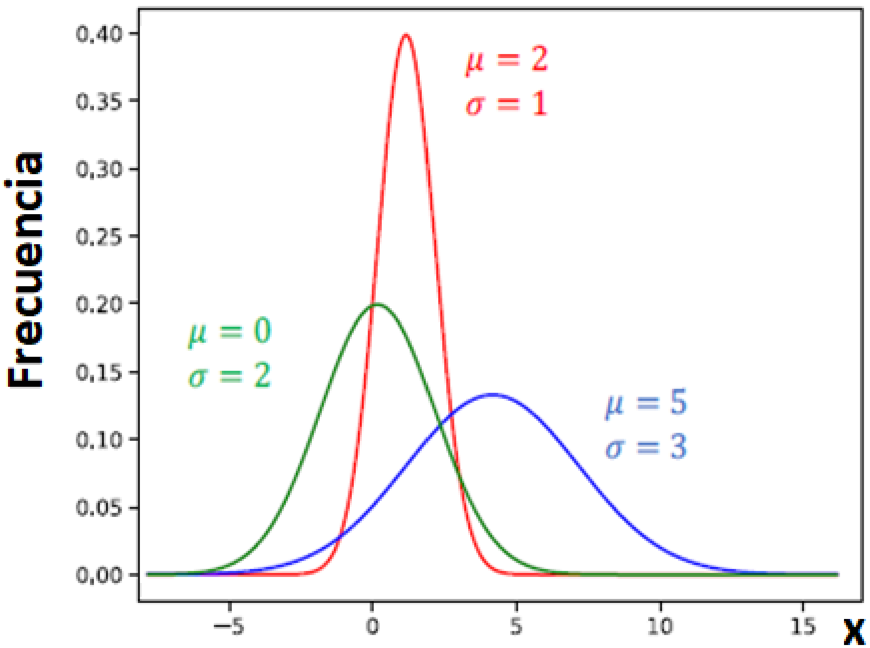
Algunas Propiedades

- **Está centrada en $x = \mu$** .
- Es simétrica respecto de su media
- Es asintótica al eje de abscisas
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x-\mu| \gg \sigma$.
- **σ es la distancia de la media hasta la curva a la altura del punto de inflexión**, y da una idea del ancho de la curva de distribución.

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

Función de distribución de 3 Muestras



↑ $\boldsymbol{\mu}$ Corrimiento en x hacia la derecha

↑ $\boldsymbol{\sigma}$ Aumento del ancho de la distribución. **Mayor dispersión de datos**

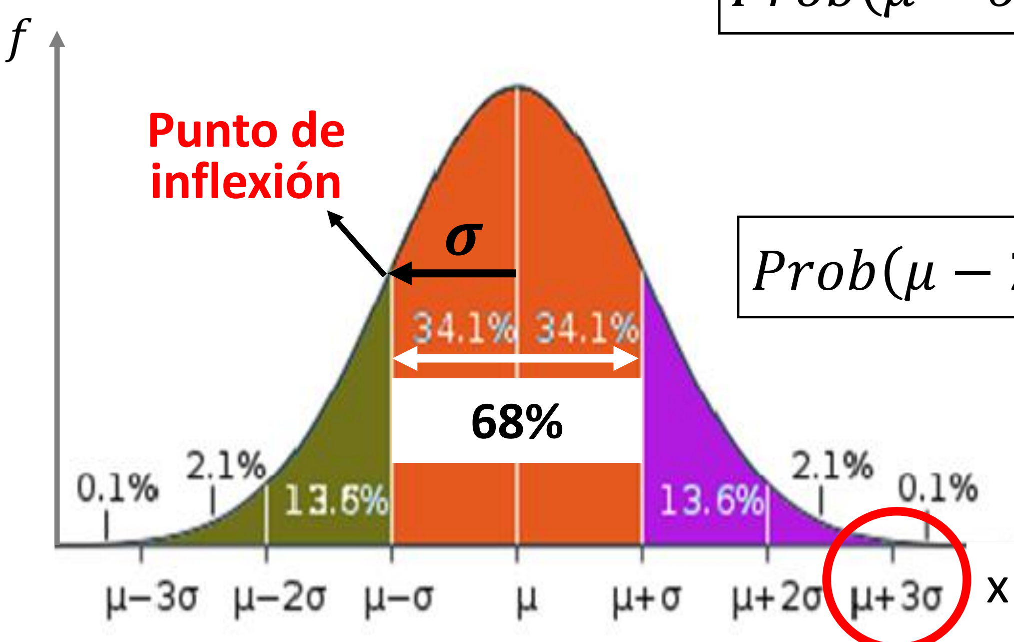
Si realizamos una nueva medición x_i, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo $\boldsymbol{\mu - \sigma \leq x_i \leq \mu + \sigma}$?

$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx}$$

$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}}$$

68%

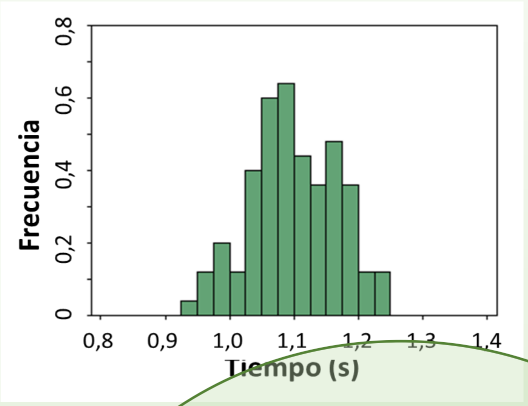
$$\boxed{Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong \mathbf{0,95}}$$



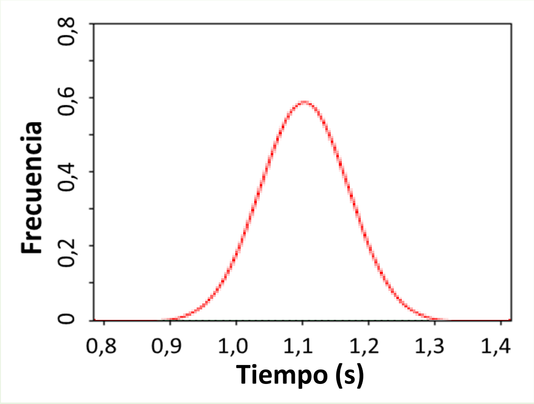
$$\boxed{Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong \mathbf{0,99}}$$

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución



$N \to \infty$



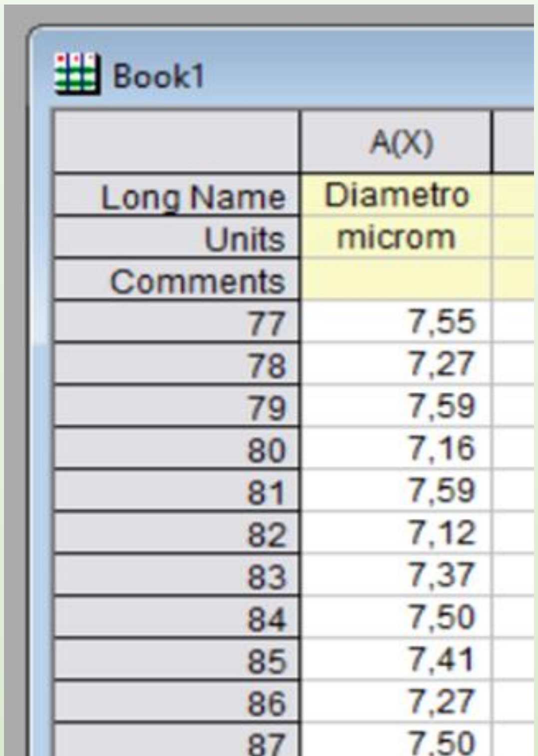
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \longleftrightarrow \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$S = Desviación\ Estándar \longleftrightarrow \sigma$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

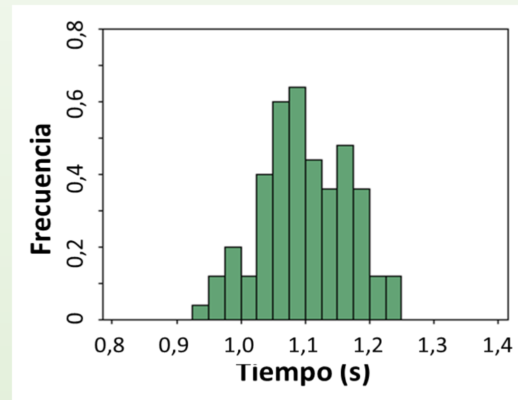
$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$

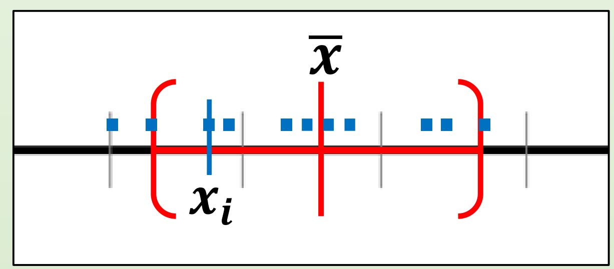


Book1

	A(X)
Long Name	Diametro
Units	microm
Comments	
77	7,55
78	7,27
79	7,59
80	7,16
81	7,59
82	7,12
83	7,37
84	7,50
85	7,41
86	7,27
87	7,50

$$\bar{x} = 7,29\ \mu m$$





Promedio

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

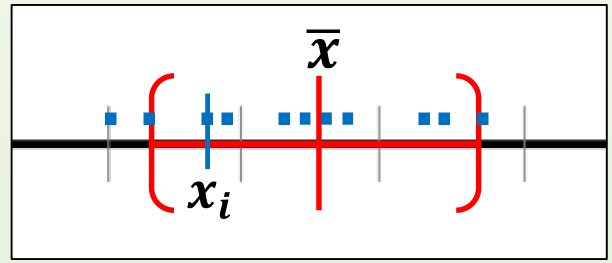
$$\boldsymbol{N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}}$$

$$\bar{x} - x_i \quad (\bar{x} - x_i)^2$$

Book1

	A(X)	B(Y)	C(Y)
Long Name	Diametro	X-Xmedia	(X-Xmedia)^2
Units	microm	microm	microm^2
Comments			
77	7,55	0,26	0,07
78	7,27	-0,02	0,00
79	7,59	0,30	0,09
80	7,16	-0,13	0,02
81	7,59	0,30	0,09
82	7,12	-0,17	0,03
83	7,37	0,08	0,01
84	7,50	0,21	0,05
85	7,41	0,12	0,01
86	7,27	-0,02	0,00
87	7,50	0,21	0,04

$$\boldsymbol{\bar{x} = 7,29\ \mu m}$$



VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio

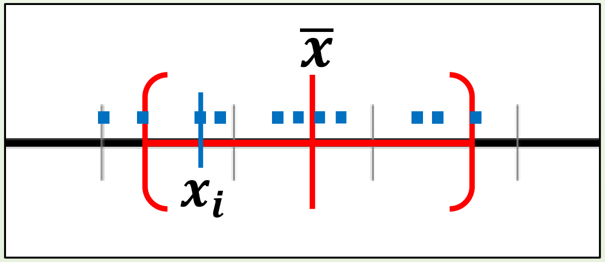
$$\boldsymbol{S = \sqrt{Var\,(x)}}$$

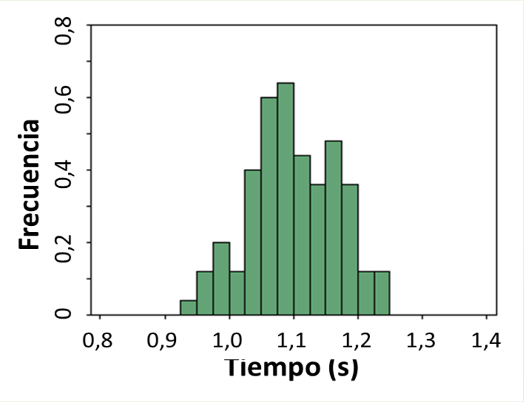
$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$





Valor más representativo: Promedio de los datos: $\bar{x}$

```
X = np.mean(x)
print("El valor medio es =", X, "s")
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\boldsymbol{N} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{xi}, \dots, \boldsymbol{x_N}\}$$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

```
C=np.var(x)
print("La varianza es =", C)
```

```
La varianza es = 0.010171163434903046
```

Desviación Estándar (S)

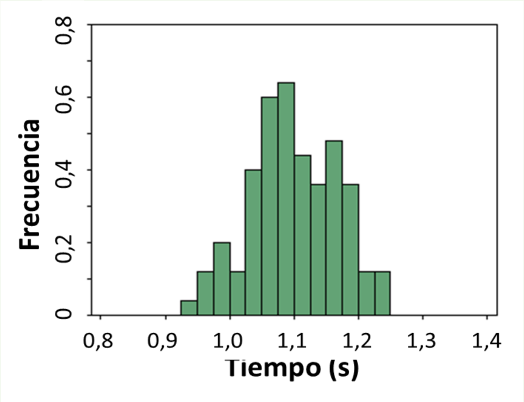
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

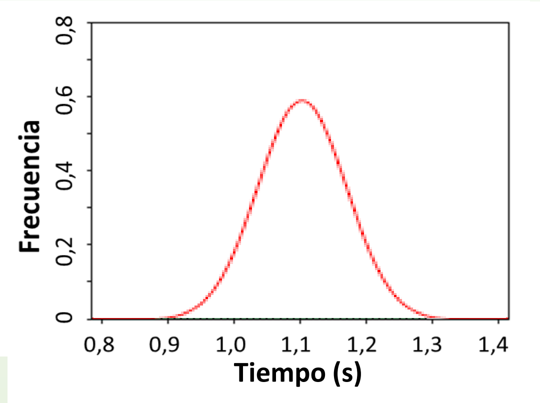
```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución



$$N \rightarrow \infty$$



$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} \longleftrightarrow \boxed{\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$$

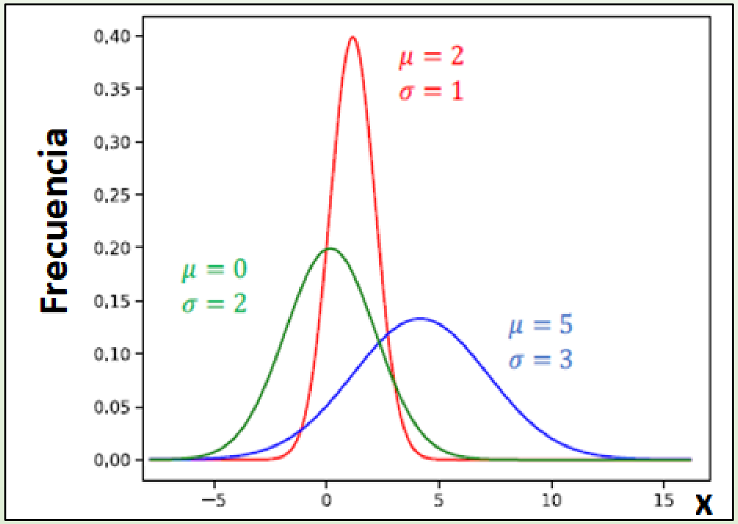
$$\boxed{\text{VAR (x)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}} \longleftrightarrow \boxed{\text{VAR (x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx}$$

$$\boxed{S = \sqrt{VAR\ (x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}} \longleftrightarrow \boxed{\sigma = \sqrt{VAR\ (x)}}$$

Desviación estándar y sus usos ....

Comparación: ¿Quién mide en forma más precisa?

MENOR valor de *S* representa MAYOR PRECISIÓN al medir



Tarea

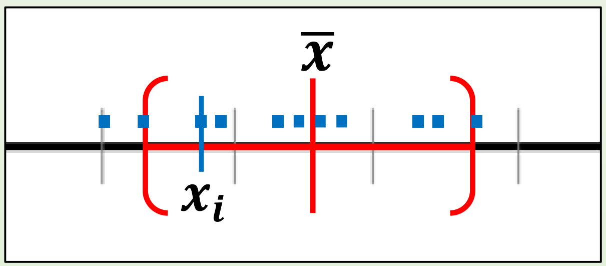
Calcular el valor de la desviación estándar S de las medidas de N = 40 de la Clase 1 de cada integrante del grupo y concluir quién midió en forma más precisa

¿Y Cómo calculamos Δx?

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

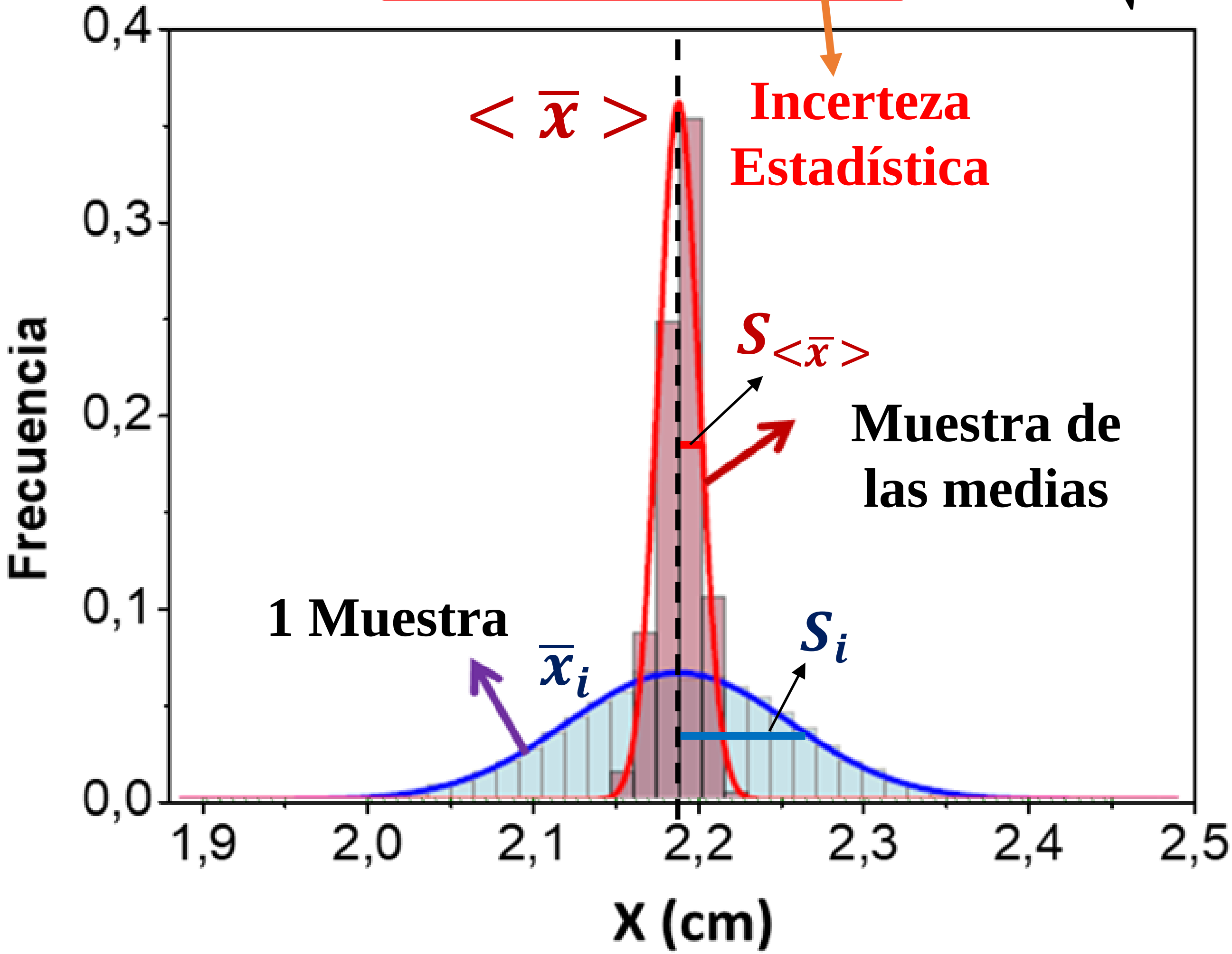
Error Estadístico (σ_e): Error cuadrático medio del Promedio

$$\Delta x = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Teorema del Límite Central (TCL)

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

$$S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}{n}}$$



¿Por qué usar el error estadístico?

Varias Series de mediciones

Teorema Central del Límite (TCL)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $<\bar{x}>$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}{n}}$$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

En general se toma una única muestra de N medidas …

Si **se toma como hipótesis** que nuestra serie que comportará como otra de la misma MF bajo la misma metodología:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Si tomo N medidas: $\Delta x = \boldsymbol{\sigma_e}$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e) \text{ Unidades}$$

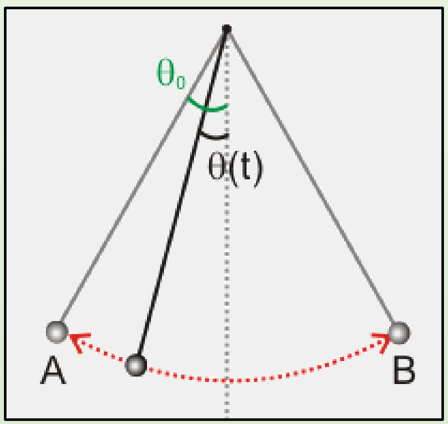
Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una **probabilidad de ~ 68%** de encontrarse en el intervalo de confianza $(\bar{x} - \sigma_e , \bar{x} + \sigma_e)$

Desviación estándar y sus usos ….

¿Cuál va a ser el error de cada medida de la muestra general?

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

El error de cada medida es S, no σ_{ap}



13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

Si realizamos una nueva medición x_i, la incerteza de ese nuevo dato será S

En general se toma una única muestra de N medidas …

Si **se toma como hipótesis** que nuestra serie que comportará como otra de la misma MF bajo la misma metodología:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío Estándar
Error de una medida

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Si tomo N medidas: $\Delta x = \boldsymbol{\sigma_e}$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e) \text{ Unidades}$$

Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una **probabilidad de ~ 68%** de encontrarse en el intervalo de confianza $(\boldsymbol{\bar{x} - \sigma_e}, \boldsymbol{\bar{x} + \sigma_e})$

El error del promedio

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

que en la práctica es:

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Está en todos los libros de estadística.

```
Dx=S/np.sqrt(len(x))
print("El error del promedio es Dx =", Dx, "s")
```

```
El error del promedio es Dx = 0.02313707827947787 s
```

Expresión del resultado $\boxed{T = (\bar{T} \pm \sigma_e)\ Ud.}$

```
print("El resultado de la medición fue: T =", f'({X:.3f} ± {Dx:.3f}) s')
```

```
El resultado de la medición fue: T = (32.542 ± 0.023) s
```

Ejemplo de problema

Ejemplo:

Mido **N = 81** períodos de un péndulo, calculo los parámetros estadísticos:

$$\boldsymbol{\bar{T} = 2.25\ s}, \qquad \boldsymbol{S = 0.27\ s}, \qquad \boldsymbol{\sigma_e} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \boldsymbol{0.03\ s}$$

El **RESULTADO del período** es: : $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\bar{T}} \pm \boldsymbol{\sigma_e})$: $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2.25} \pm \boldsymbol{0.03})\ \boldsymbol{s}$

Si tomo **una nueva medida** del períodos de un péndulo y obtengo $\boldsymbol{2.23\ s}$.
La nueva medida tendrá aprox. un **68% de probabilidades** de encontrarse en el intervalo de confianza

$[\boldsymbol{\bar{T}} - \boldsymbol{\sigma_e}, \boldsymbol{\bar{T}} + \boldsymbol{\sigma_e}]$: $[\boldsymbol{2.22}, \boldsymbol{2.28}]$

El error de la nueva medida será igual al del resto de las medidas, y valdrá:
$\boldsymbol{S = 0.27\ s}$

Entonces el **resultado de la nueva medida** será: $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2,23} \pm \boldsymbol{0,27})\ \boldsymbol{s}$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

Armar un Péndulo de 50 cm de largo (Ídem Clase 1)

- Tomen **40 medidas** del período del péndulo (**N = 40**) ($\theta < 10°$) **con un photogate a una Frecuencia de adquisición de datos de 1000 Hz.**

- **Calculen el valor de desviación estándar S** de los datos obtenidos con el cronómetro por 1 integrante (Clase 1) y de los del Photogate (N=40). *¿Con qué instrumento se midió en forma más precisa?*

- **Realicen los histogramas** de los datos del cronómetro de 1 integrante de la Clase 1 (16-8) y de los datos del photogate (N = 40). Discutan: *¿Están corridos? ¿Difieren en ancho o forma?*

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

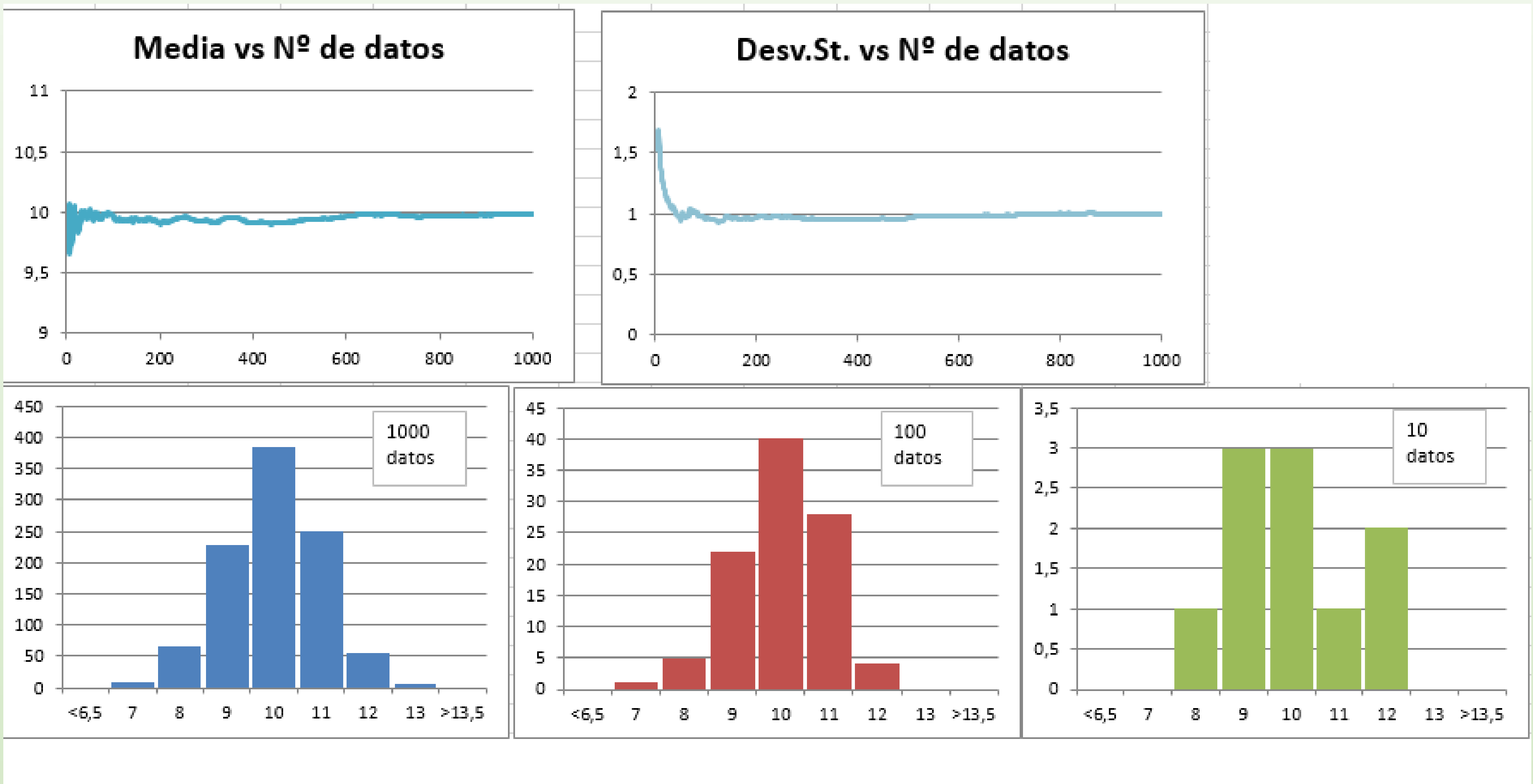
- Obtengan **160 medidas más** con el photogate haciendo 4 series de 40 mediciones (N = 40) cada una.

- Dividan los datos en 3 grupos: N = 40, N = 100 y N = 200. Realicen 1 Figura con los 3 Histograma superpuestos. *¿Depende la forma, el centro y/o el ancho de los histogramas del número de mediciones N?*

- Dividan los datos en grupos: N = 40, N = 80, N = 100, N = 120, N = 140, N = 160, N = 180 y N = 200. Calculen el valor más representatico $\boldsymbol{\overline{T}}$ y $\boldsymbol{S}$ de cada grupo. *¿Paree depender* $\boldsymbol{\overline{T}}$ *o* $\boldsymbol{S}$ *de N?*

- **Expresar el RESULTADO del período del péndulo:** $\boldsymbol{T = (\overline{T} \pm \Delta T)\ Ud}$ considerando que **N = 200** es representativo para su experimento. Exprese el resultado con 2 cifras significativas. *¿Qué hipótesis se debe cumplir para poder decir que* $\Delta T = \sigma_e$*? ¿Creen que la cumplieron?*

Cómo dependen el valor más representativo y la desviación estándar del número de mediciones



EXPERIMENTO

Exp. 2

ENTREGA EL MIERCOLES 30-8 A LAS 8 H

- **Figura 1 y Figura 2:** Histogramas de los datos del cronómetro de 1 integrante (Clase 1) y de los datos del photogate. Discusión *¿Depende la forma, el centro y/o el ancho del instrumento de medición?*
- Resultados de $\boldsymbol{S}$ de los datos del cronómetro de 1 integrante (Clase 1) y de los datos del photogate *¿Con qué instrumento se midió en forma más precisa?*

- **Figura 3.** Histogramas superpuestos con los datos del Photogate de N = 40, N = 100 y N = 200. *¿Depende la forma, el centro y/o el ancho del número de mediciones?*
- Resultados de $\overline{\boldsymbol{T}}$ y de $\boldsymbol{S}$ de los grupos N = 40, N = 80, N = 100, N = 120, N = 140, N = 160, N = 180 y N = 200. *¿Dependen de N?¿Cumple TCL?*
- Expresión del resultado del período del péndulo T con 2 cifras significativas