REPASO

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

Resultado
Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

$\boldsymbol{\bar{x}}$ ***o*** $\boldsymbol{x_0}$**:** Valor más representativo

$\boldsymbol{\Delta x}$**:** Incerteza Absoluta

Mediciones Directas (MD)

VALOR MÁS REPRESENTATIVO

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

INCERTEZA ABSOLUTA

$$\boxed{\Delta x = ?}$$

Orienta la Tabla (Clase 1) ⇨ $$\boxed{P = \frac{R}{\bar{x}} 100}$$

1: Si Pesa como fuente de incerteza INSTRUMENTAL

⇨ $\boxed{\Delta x = \sigma_{ap}}$ ⇨ $\boxed{x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right) Ud.}$

Mediciones Directas (MD)

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

Generalizando … Si tomo N medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones (asumiendo TCL):

Expresión del Resultado

$$\boxed{\boldsymbol{x = (\overline{x} \pm \Delta x)\ Ud.}}$$

Valor más representativo

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}}$$

Incerteza absoluta

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{x} = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}}$$

Si realizamos una nueva medidas de la MF, su resultado tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$$(\overline{\boldsymbol{x}} - \sigma_e, \overline{\boldsymbol{x}} + \sigma_e)$$

Mediciones Directas (MD)

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

Generalizando … Si tomo N medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones (asumiendo TCL):

Expresión del Resultado

$$\boxed{\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{x}} \pm \Delta\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{Ud.}}$$

Valor más representativo

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}$$

Incerteza absoluta

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{x} = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}}$$

Incerteza de cada medida x_i:

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} = S}$$

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}}$$

$S \rightarrow$ **Además sirve para comparar formas de medir**

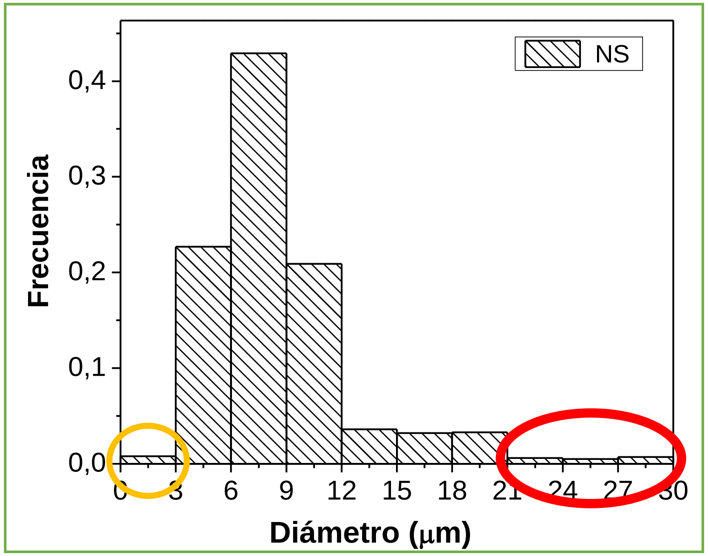
REPASO

¿Varían $\bar{x}$, S, σ_e con la variación de N, cómo varía?

¿Qué representa S en un experimento, con qué se relaciona?

¿Cuál es la probabilidad que una nueva medición se encuentre en el intervalo de confianza $\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$?

¿Hay datos que puedo descartar?



En Laboratorio 1 podremos descartar datos que sean mayores a $3S$.

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)} \longrightarrow W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$

$$\vdots$$

x, y, z ... variables independientes

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\substack{x_0,\\ y_{0,\dots}}}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{\substack{x_0,\\ y_{0,\dots}}}\right)^2 \Delta y^2 + \ \dots}$$

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2023

Modelado – Modelo lineal del Método de Cuadrados Mínimos

Lucía Famá, Ariel Kleiman,
Elizabeth Samaniego Onofre, Aldana Holzmann,
Federico Szmidt

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

¿Cómo podemos proseguir para obtener una MF?

- ✓ **1ero:**

SIEMPRE hay que buscar las LEYES FÍSICAS que conozcamos QUE CONTENGAN LA MF que deseamos calcular.

- ✓ **2do:**

Buscar CUÁL O CUÁLES PUEDAN APLICARSE con el equipamiento con el que contamos

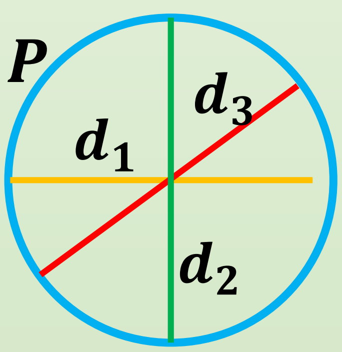
¿Cuánto vale π? ¿Cómo podemos calcularlo?

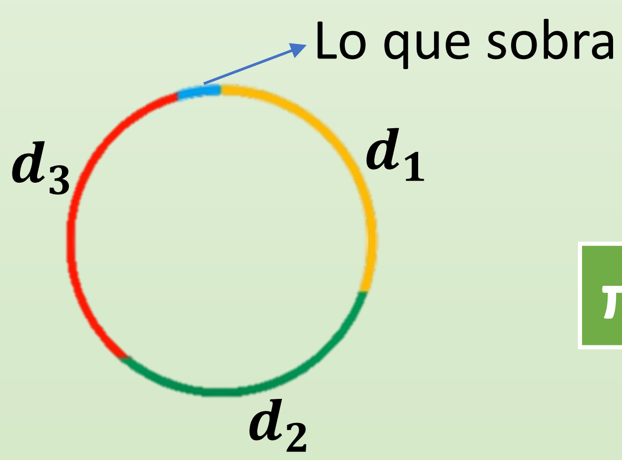
<u>PRIMER PASO</u>: BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE A π CON VARIABLES QUE PUEDA MEDIR O ADQUIRIR

<u>Conceptos básicos:</u>

- Circunferencia C = Perímetro del círculo P
- Diámetro d

π es el número de veces que entra d en C





π = 3,1416 …

¿Cuánto vale π? ¿Cómo podemos calcularlo?

π es el número de veces que entra d en C

$$\boxed{\boldsymbol{P = \pi d}}$$

¡Esto ocurre independientemente del diámetro del círculo!!

¡Se puede calcular π para cualquier círculo!

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

Método 1: Obtener π **a partir de calcular** ***d*** **y** ***P*** **de una superficie circular** y empleando **la ecuación (1):**

$$P = P_0 \pm \Delta P \qquad d = d_0 \pm \Delta d$$

$$\boxed{P = \pi d \quad (1)} \Rightarrow \boxed{\pi = \frac{P}{d}}$$

$$\pi = \pi_0 \pm \Delta\pi$$

¿Cómo calculo $\Delta\pi$*?*

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

Método 2: Podemos determinar el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a partir del cálculo de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{P}$ **de DIFERENTES superficies circulares (Vamos a usar 10!!!) y MODELANDO LOS DATOS**

$$\boldsymbol{P_1 = P_0 \pm \Delta P} \qquad \boldsymbol{d_1 = d_0 \pm \Delta d}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{P_{10} = P_0 \pm \Delta P} \qquad \boldsymbol{d_{10} = d_0 \pm \Delta d}$$

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

Objetivo Particular de la práctica de hoy

Determinar $\boldsymbol{\pi}$ a partir del cálculo del diámetro y del perímetro de diferentes objetos con superficie circular empleando UN MODELO LINEAL del MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

¿Por qué modelar?

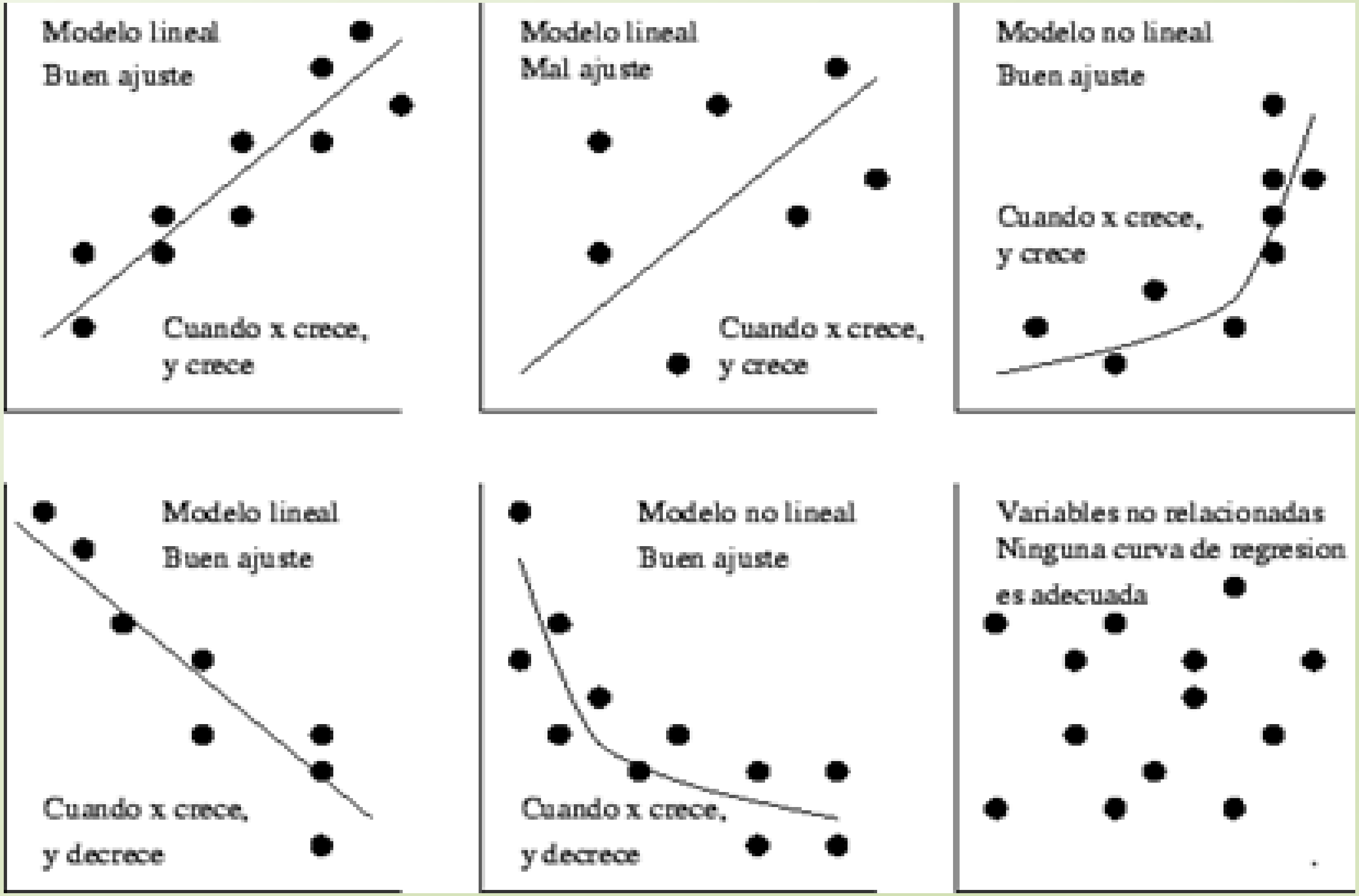
Se puede observar la relación entre variables.

Se puede realizar predicciones para MF de alcance no posible.

El resultado es más representativo del sistema que tomar un único caso.

Método de Cuadrados Mínimos

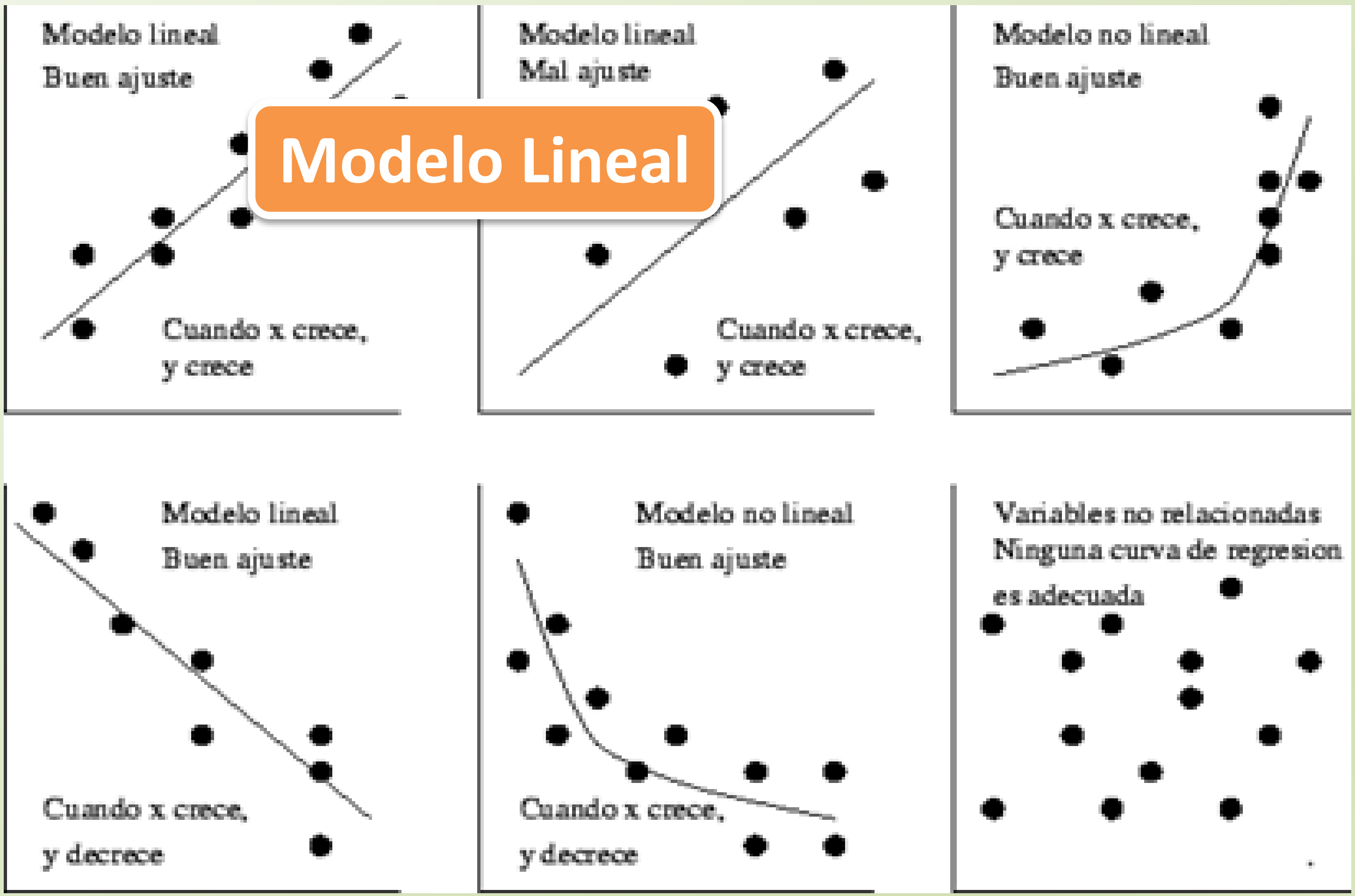
Relación entre dos variables usando un Modelo Matemático



MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre dos variables:

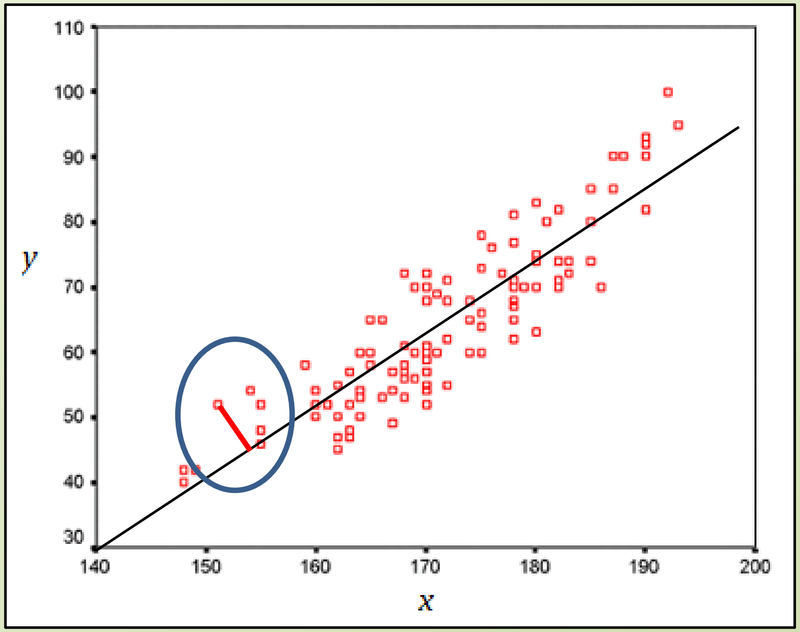
Modelo Matemático más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas **(x_i, y_i)**



Partamos asumiendo que la relación es:

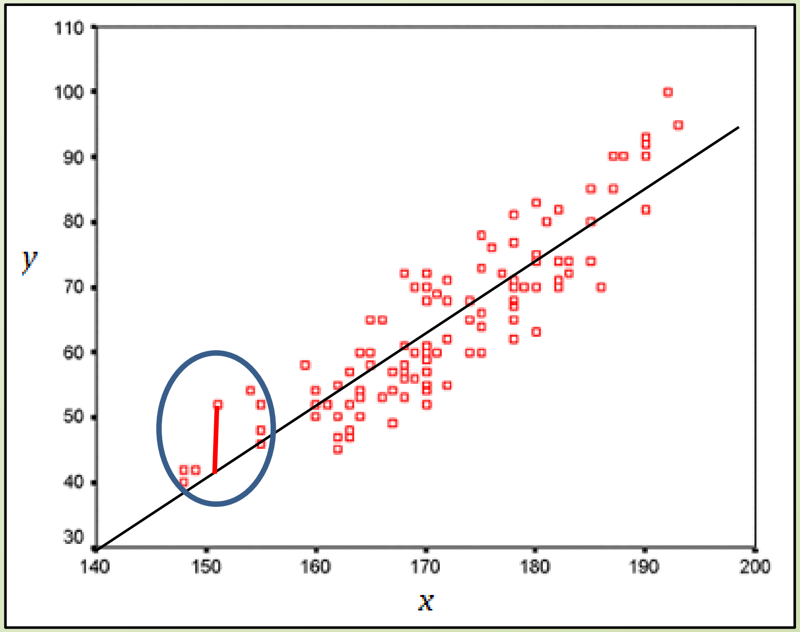
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas **(x_i, y_i)**



Partamos asumiendo que la relación es:

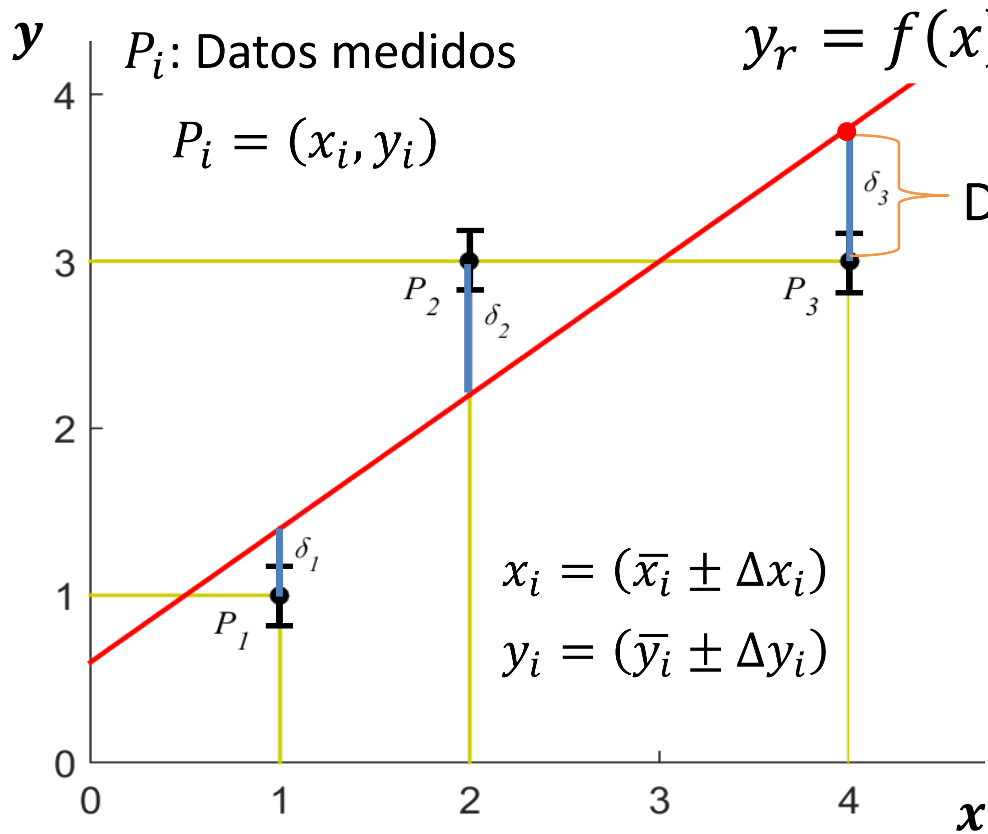
$$y = \color{red}{m}x + \color{red}{b}$$

Caso aún más sencillo: Considerando la **Distancia en "y"**

Buscamos encontrar los parámetros $\color{red}{m}$ y $\color{red}{b}$ que minimicen la distancia de los datos al modelo en el eje "y"

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Considerando la **Distancia en "y"**



Distancia ➡ **Residuos** (δ_i)

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right|$$

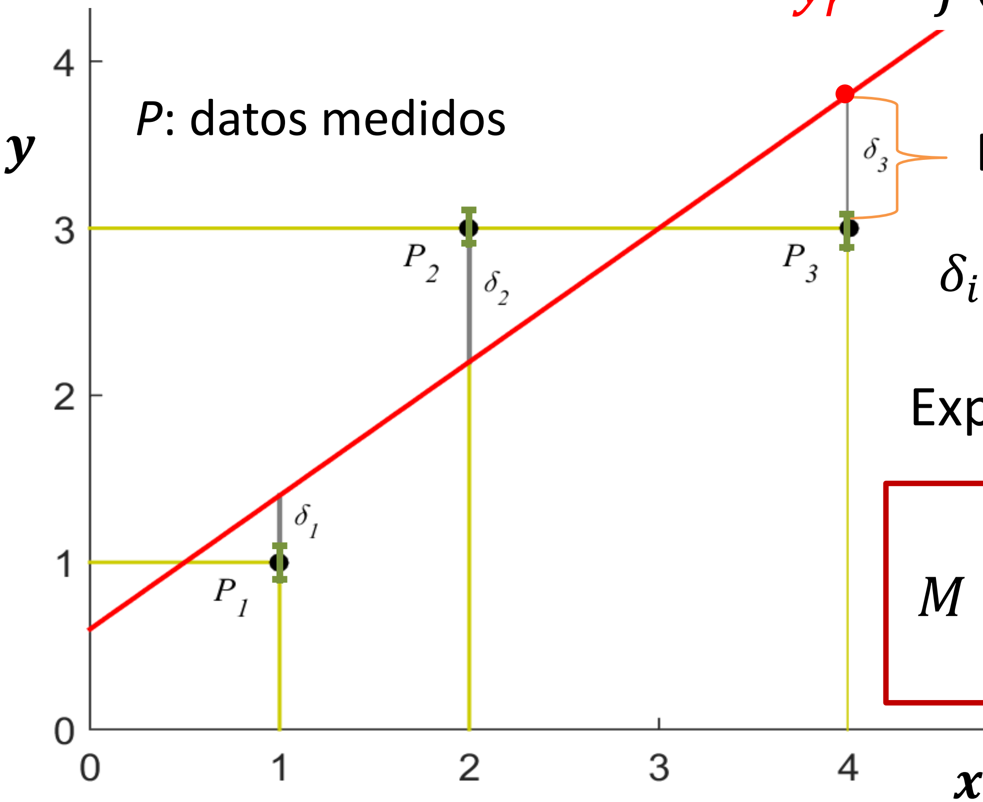
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso A

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Distancia ⇨ **Residuos** (δ_i)

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Experimental   Recta

$$M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(a,b) = \sum_i {y_i}^2 + a^2 \sum_i {x_i}^2 + Nb^2 + 2ab \sum_i x_i - 2a \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

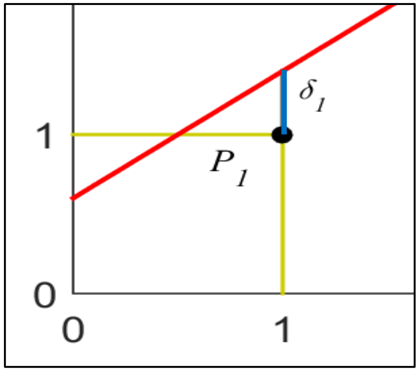
$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \sum_i {x_i}^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ 2Nb + 2a \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad \boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum x_i{}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}} \dashrightarrow S_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i{}^2}{N-2}}$$

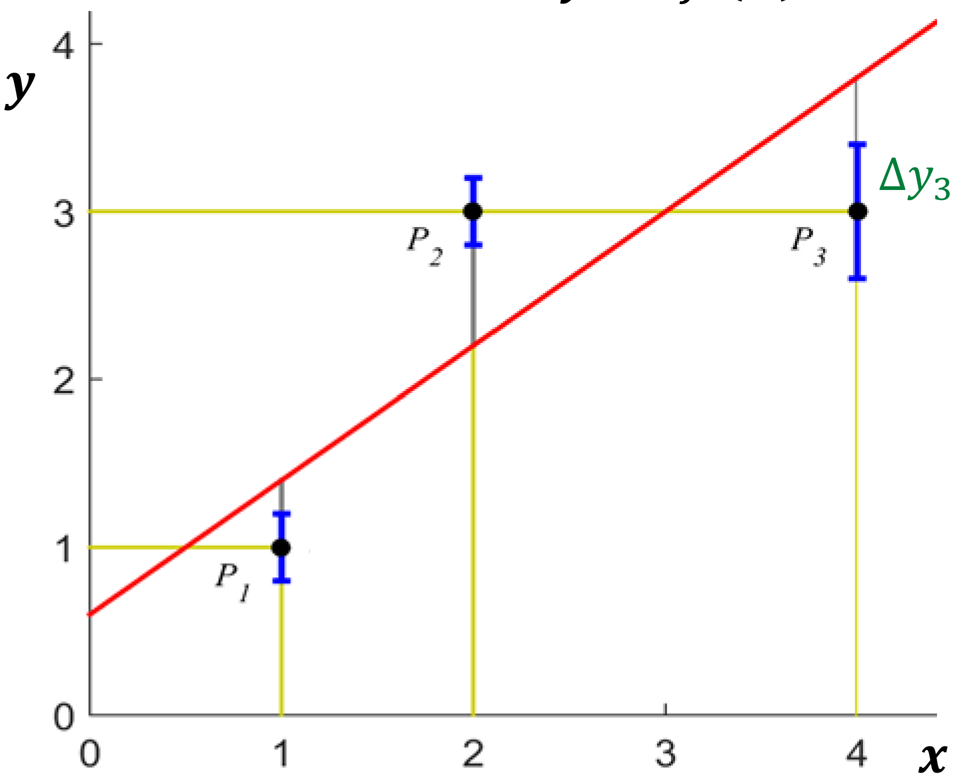
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso B

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$

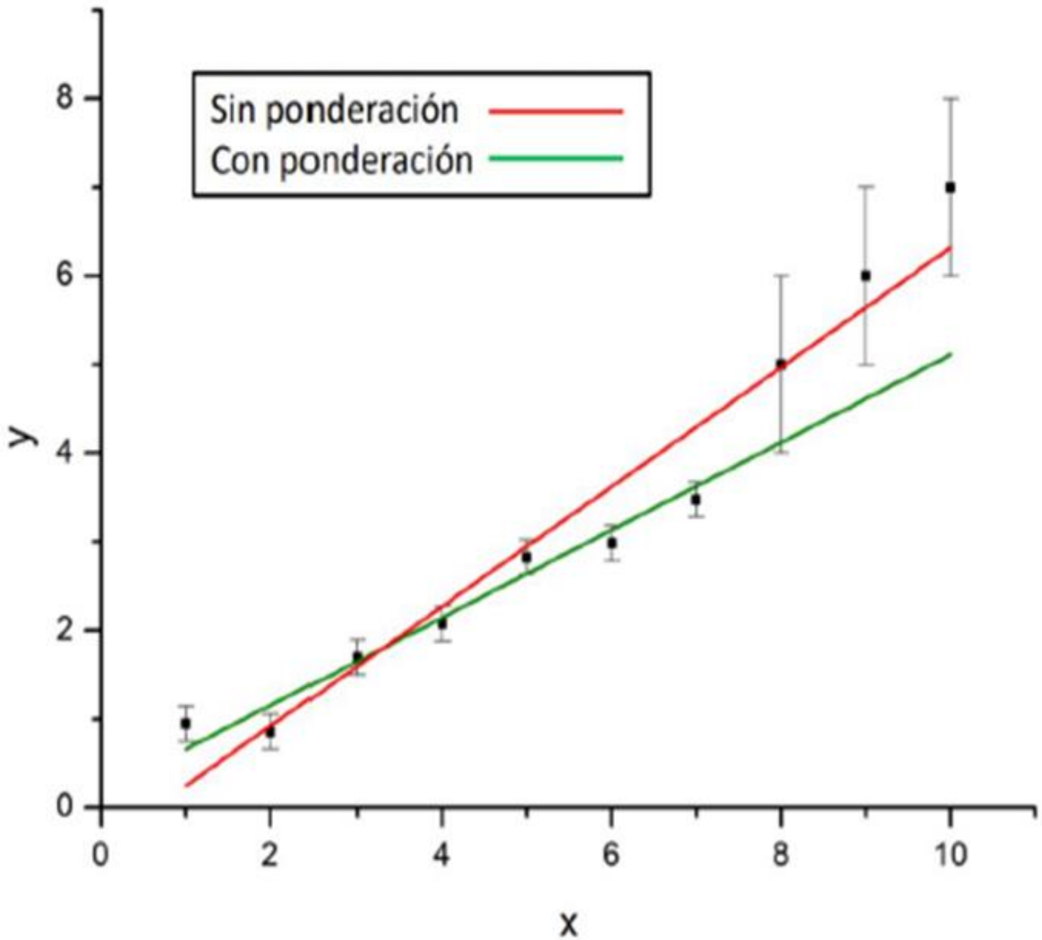


Hipótesis: **Considera a las medidas más precisas las más relevantes**

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos
Normalizados al error de cada medida

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

<u>Método 2</u>: Podemos determinar el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a partir del cálculo de $\boldsymbol{d}$ **y** $\boldsymbol{P}$ **de DIFERENTES superficies circulares (Vamos a usar 10!!!) y MODELANDO LOS DATOS**

- Medir el diámetro d y el perímetro de P de 10 diferentes superficies circulares.

$$\boldsymbol{P_1 = P_0 \pm \Delta P} \qquad \boldsymbol{d_1 = d_0 \pm \Delta d}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{P_{10} = P_0 \pm \Delta P} \qquad \boldsymbol{d_{10} = d_0 \pm \Delta d}$$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

Método 2:

- **Figura 1:** Graficar P en función de d (gráfico de puntos con incertezas). *¿Qué forma parece tener la función graficada?*
- Determinar los errores relativos ε_r de las variables y definir qué variable presenta mayor ε_r.
- **Figura 2:** Hacer un gráfico empleando la variable con mayor ε_r en el eje "y", y aplicar dos modelos lineales (1: $y = ax + b$, 2: $y = ax$)
- **Obtener el valor de π de cada modelo** y compararlos entre sí y con el obtenido por el Método 1: diferencias significativas, precisión, exactitud

EXPERIMENTO

Exp. 4

AYUDA: Si $\varepsilon_{rP} \gg \varepsilon_{rd}$

Debo graficar $\boldsymbol{P}$ **en función de** $\boldsymbol{d}$

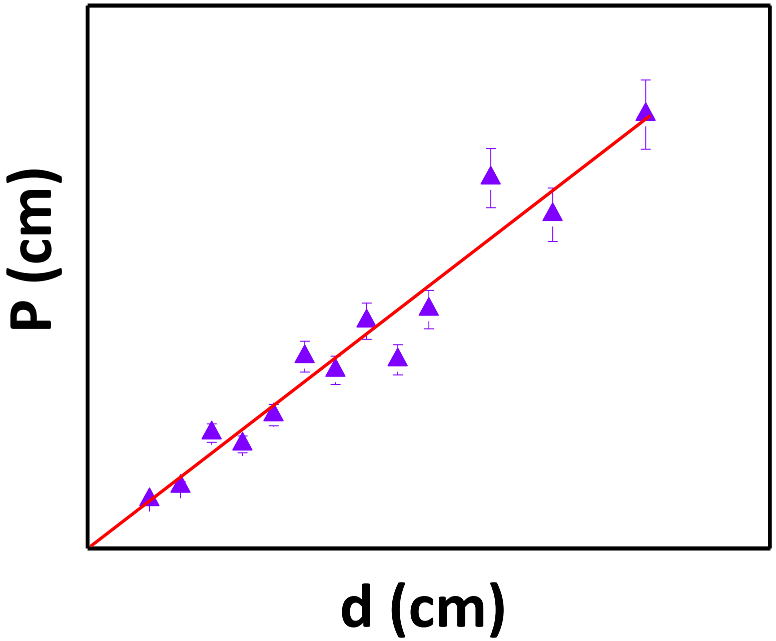
$$\boldsymbol{P = \pi d}$$

$\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x}$

Pendiente $\boldsymbol{m = \overline{m} + \Delta m}$

$\boldsymbol{\pi = m} \longrightarrow \boldsymbol{\overline{\pi} = \overline{m}}$

¿ $\Delta\boldsymbol{\pi}$?



EXPERIMENTO

Exp. 4

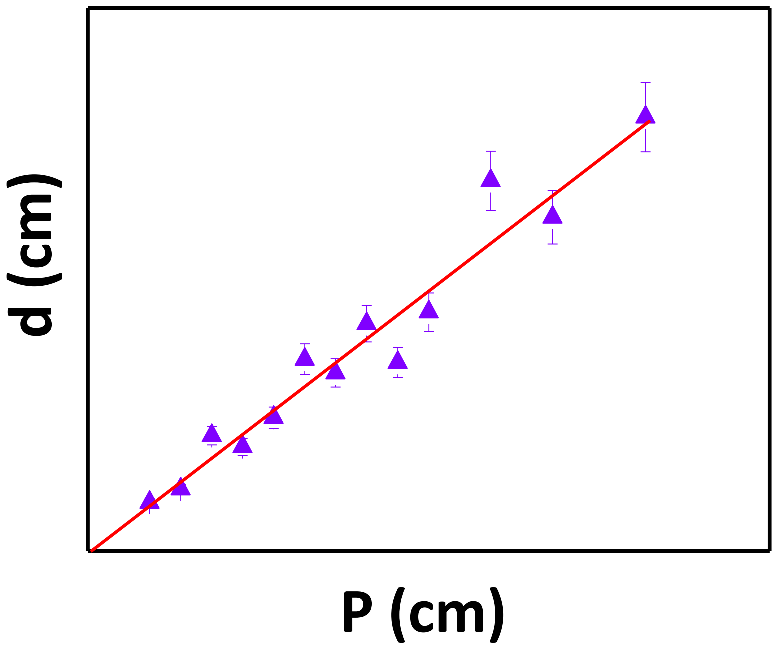
AYUDA: Si $\varepsilon_{rd} \gg \varepsilon_{rP}$

Debo graficar P **en función de** d

$$d = \frac{P}{\pi} \Rightarrow \underset{y}{d} = \frac{1}{\pi} \underset{x}{P}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{\pi = \frac{1}{m}} \longrightarrow \bar{\pi} = \frac{1}{\bar{m}}$$



¿ $\Delta\pi$? **Propago!!** $\Delta\pi = \sqrt{\left|\frac{\partial \pi}{m}\right|^2_{m_o} \Delta m^2} = ???$