



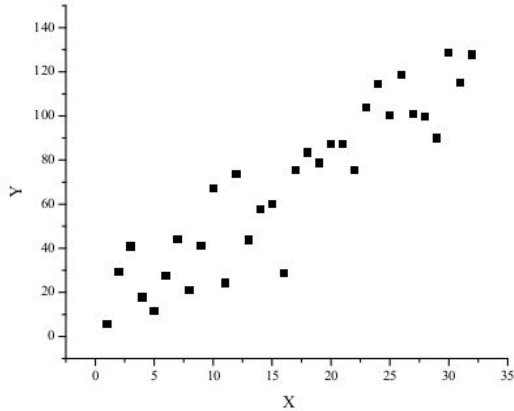
---

# Cálculo de la aceleración de la gravedad: método de cuadrados mínimos

Laboratorio 1  
Departamento de física -FCEyN- UBA



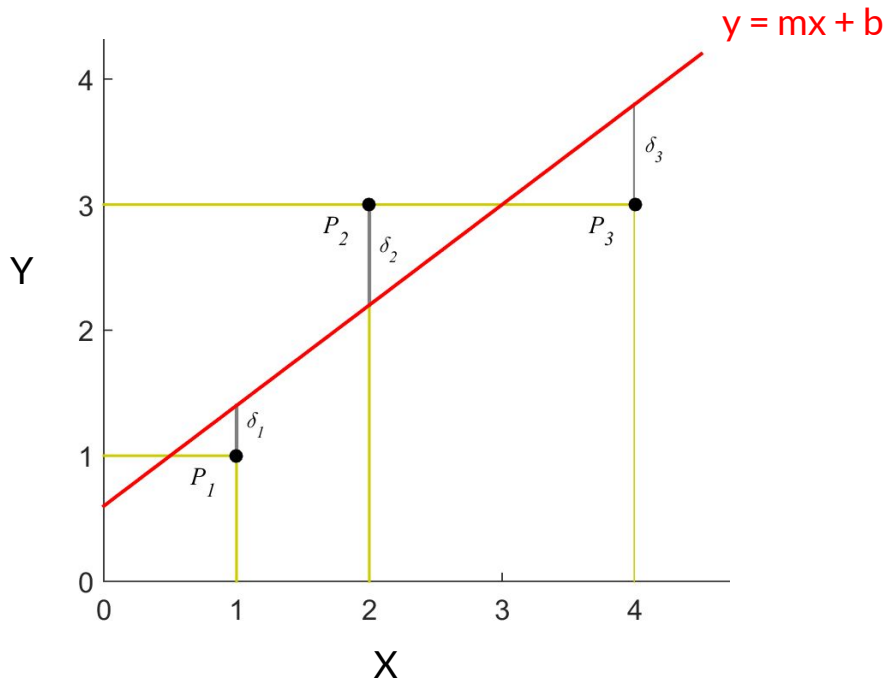
# Objetivo: estudiar la dependencia funcional entre dos magnitudes y utilizar modelos que mejor describan\* nuestros datos experimentales



- Supongamos que medimos de forma independiente las magnitudes X e Y, tal que su conjunto de mediciones se describa como:  $X_i$  y  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, N$
- Vamos a analizar el caso más simple: la dependencia lineal
- Para ello, asumimos un cierto modelo teórico:  $y = mx + b$
- ¿Cómo encuentro los parámetros del modelo (m y b) que mejor ajustan los datos experimentales? **¿Cuál es la mejor recta?**

\* Se dice también “que mejor se ajustan a” y de ahí viene hablar de “ajuste”

# Método de cuadrados mínimos



- Buscamos una recta que pase lo más cerca posible de la distribución de puntos (nuestros datos experimentales)
- Para ello, esta recta debe minimizar las distancias cuadráticas entre los puntos y la recta.
- Consideremos el caso más sencillo:

$$\frac{\Delta x}{x} < \frac{\Delta y}{y}$$



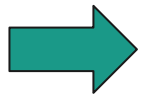


## Método de cuadrados mínimos

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \longrightarrow 2m \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^N x_i - 2 \sum_{i=1}^N (x_i y_i) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0 \longrightarrow 2Nb + 2m \sum_{i=1}^N x_i - 2 \sum_{i=1}^N y_i = 0$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:  
**Despejo!**



$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N (x_i y_i) - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

y

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N (x_i y_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

## ¿Cómo son los errores de m y b?

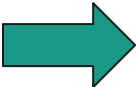
Esto es sólo válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión!

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N (x_i y_i) - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

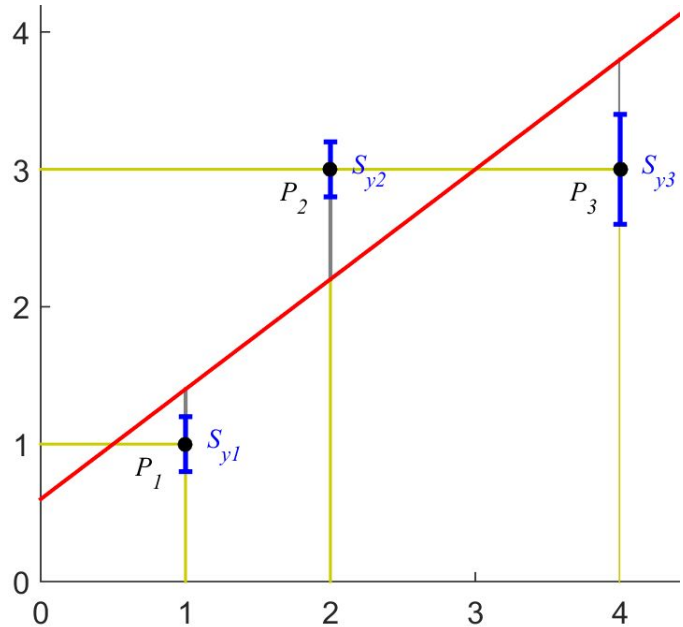
$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N (x_i y_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

Propagando errores!

→ Tengo que propagar en estas ecuaciones el error de  $y_i$


$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}} \quad \text{y} \quad \Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}} \quad \text{Con} \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\delta y_i)^2}{N-2}}$$

## Cuadrados mínimos ponderados

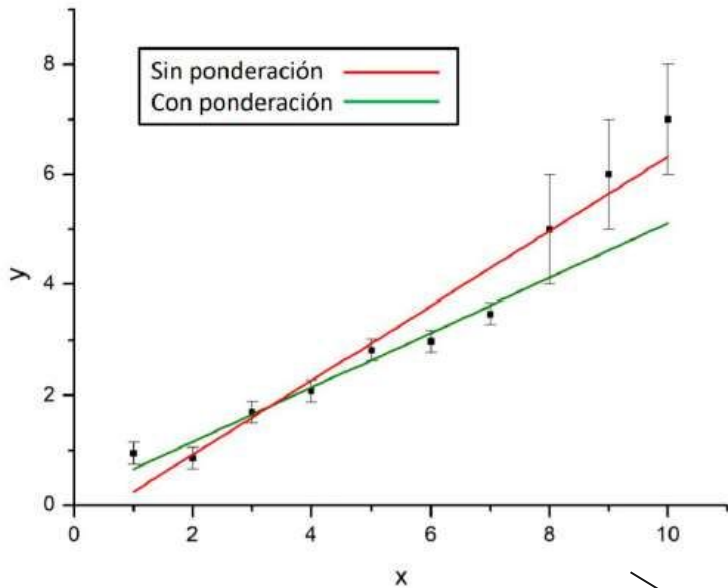


Hasta ahora, sólo consideramos a los residuos como error, pero ¿Existe un método que tenga en consideración los errores de cada medición para obtener la recta? ¿Qué pasa si los puntos no pesan lo mismo?

En lugar de minimizar la suma de los residuos, minimizamos  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$






$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2 \longrightarrow \text{Ponderados}$$

$$M = [y_i - (mx_i + b)]^2 \longrightarrow \text{No Ponderados}$$

Son más relevantes las medidas con menor incerteza!



De forma análoga, calculamos las expresiones para m y b,

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i (x_i y_i) - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

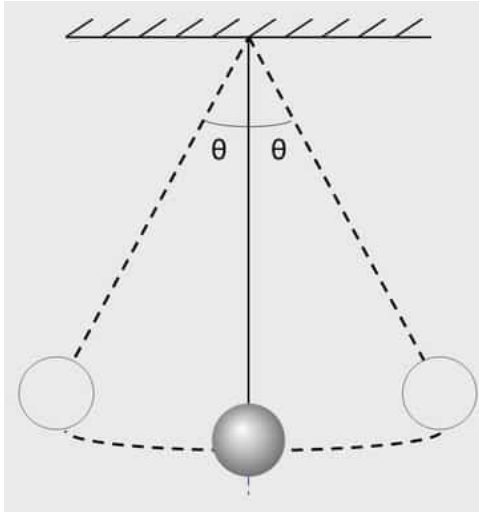
$$S_m^2 = \frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i \sum w_i x_i^2 - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

Con  $w_i = \frac{1}{S_{y_i}^2}$

# Experimento: péndulo simple



Recordamos:

- Pequeñas oscilaciones
- hilo inextensible y de masa despreciable
- movimiento en el plano
- ¿Qué más?

El período del péndulo está dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

**Actividad: Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del periodo de un péndulo para distintas longitudes utilizando un modelo lineal**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hago un cambio de variables

T no está relacionada de forma lineal con la longitud l

Actividad: Determinar la aceleración de la gravedad ( $g$ ) a partir de los datos del periodo de un péndulo para distintas longitudes utilizando un modelo lineal

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

T no está relacionada de forma lineal con la longitud  $l$

Hago un cambio de variables

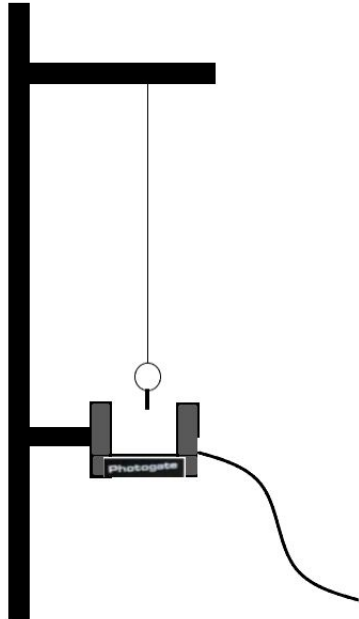
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{l} \longrightarrow m = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

y x

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \longrightarrow m = \frac{4\pi^2}{g}$$

y x

## Actividad: Determinar la aceleración de la gravedad ( $g$ ) a partir de los datos del periodo de un péndulo para distintas longitudes utilizando un modelo lineal



1. Preparar el experimento según el esquema
2. Tener en cuenta todas las suposiciones anteriores del péndulo simple.
3. Medir el periodo del péndulo.
4. Variar al menos 10 veces las longitudes del péndulo.
5. Calcular los errores absolutos de  $T^2$  y  $l$
6. Calcular los errores relativos de  $T^2$  y  $l$  y compararlos. ¿Porqué?
7. Graficar  $T^2$  vs  $l$  colocando las incertezas en la variable del eje y.
8. Realizar un ajuste lineal mediante el método de cuadrados mínimos (ponderado o no ponderados?)
9. Evaluar la calidad del ajuste (*coming soon*).
10. Obtener  $\bar{g} \pm \Delta g$



Se puede estudiar la precisión y la exactitud de su resultado?

# Ayuda para realizar un ajuste lineal en Origin

The screenshot displays the Origin software interface. The 'Analysis' menu is open, showing the following structure:

- Statistics
- Mathematics
- Data Manipulation
- Fitting**
  - Linear Fit**
    - 1 <Last used>
      - Open Dialog...
    - Fit Linear with X Error
    - Polynomial Fit...
  - Nonlinear Curve Fit
    - Nonlinear Surface Fit...
    - Simulate Curve...
    - Simulate Surface...
  - Exponential Fit...
  - Sigmoidal Fit...
  - Compare Datasets...
  - Compare Models...
- Signal Processing
- Peaks and Baseline

- 1 Linear Fit: <Last used> ...
- 2 Linear Fit: <default> ...
- 3 Peak Analyzer: <Last used> ...
- 4 Peak Analyzer: <default> ...
- 5 Single Peak Fit: <default> ...
- 6 Integrate: <default> ...
- 7 Polygon Area: <Last used> ...
- 8 Polygon Area: <default> ...
- 9 Integrate: <Last used> ...
- 10 Horizontal Translate

In the background, a graph window titled 'I (u. a.)' is visible, showing a scatter plot of data points with error bars. The status bar at the bottom indicates 'FitLinear: linear regression on XY data'.

# Método de cuadrados mínimos: Ponderados vs no ponderados

No ponderados

The image shows a software interface with a 'Linear Fit' dialog box and a graph. The dialog box has a 'Fit Options' section with a dropdown menu for 'Errors as Weight' set to 'Instrumental'. A callout box on the left shows a list of options: 'Instrumental', 'No Weighting', 'Direct Weighting', and 'Instrumental', with 'No Weighting' highlighted. An arrow points from this callout to the 'Errors as Weight' dropdown. Another arrow points from the text 'Pondera incertezas' to the same dropdown. The graph in the background shows a scatter plot of data points with vertical error bars, and a fitted line is visible. The x-axis is labeled 'I (u. a.)' and the y-axis is labeled 'I (u. a.)'.

Instrumental  
No Weighting  
Direct Weighting  
Instrumental

Errors as Weight: Instrumental

Pondera incertezas

I (u. a.)

I (u. a.)

AU : ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]114 Radian





## ¿Cómo medimos la calidad del ajuste?

Coeficiente de Pearson

$r$

→ Medida de la dependencia lineal entre dos variables

Chi-cuadrado

$\chi^2$

→ Medida de la verosimilitud de un modelo o ajuste

Residuos

→

Distribución de los datos respecto de la recta

# Coeficiente de correlación lineal de Pearson

Sean dos variables  $x$  e  $y$  de las cuales queremos ver la existencia de una correlación,

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y};$$



En origen tenemos el  $R^2$  (adj Rsquare).

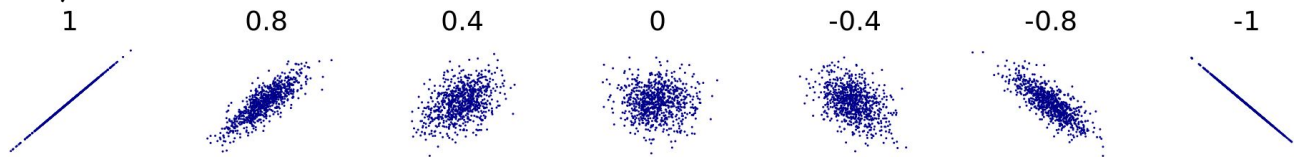
$$\left\{ \begin{array}{l} Cov(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \\ \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N}} \end{array} \right.$$



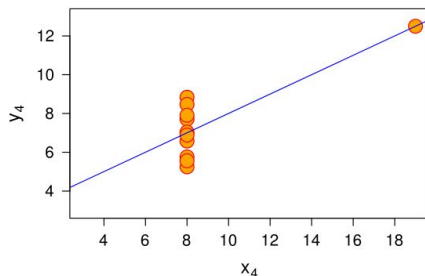
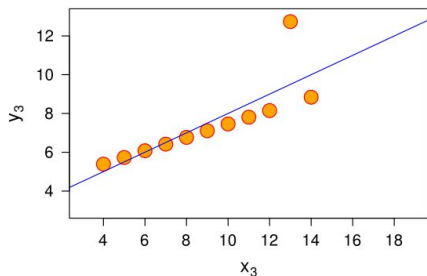
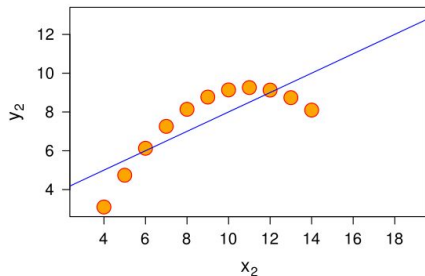
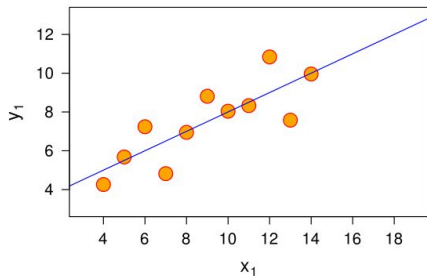
Si  $x$  e  $y$  están correlacionados linealmente:

$$|r| = 1$$

Su signo va a depender de la pendiente de la recta



# Limitaciones del método: El cuarteto de Anscombe



Estos cuatro gráficos poseen las mismas propiedades estadísticas,

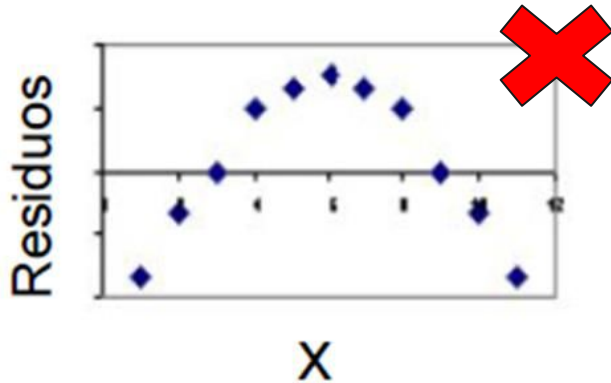
- Mismo valor medio y varianza de  $x$  y de  $y$ .
- Mismo  $R^2$
- Estos datos ajustan exactamente igual de bien a una misma función lineal  $y = 3 + 0,5x$

Propiedad	Valor
Media de cada una de las variables $x$	9.0
Varianza de cada una de las variables $x$	11.0
Media de cada una de las variables $y$	7.5
Varianza de cada una de las variables $y$	4.12
Correlación entre cada una de las variables $x$ e $y$	0.816
Recta de regresión	$y = 3 + 0.5x$

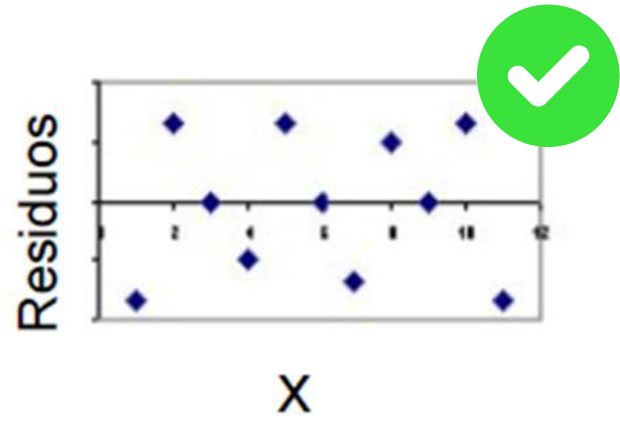
**Necesito usar un criterio extra!**

## Hay que mirar el gráfico: Residuos

Analizando el gráfico de los residuos en función de x:



Caso 2



Caso 1

En los casos 2,3 y 4, la distribución de los datos alrededor de la recta **no** era normal (gaussiana). Tenían estructura (no son aleatorios los puntos).

## Chi-cuadrado $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(O_i - E_k)^2}{\sigma_i^2} \longrightarrow \chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$

→ Residuos  
→ Medida del error

Con  $O_i$  los datos observados y  $E_k$  los datos ajustados. En general, para cualquier ajuste:

En un ajuste lineal,  
ajustamos  $m$  y  $b$  y  
comparamos contra  $N-2$

$$\chi^2 \approx \nu = N - k$$

↑  
Grados de  
libertad

↑  
Cantidad de  
parámetros

→ Tenemos una relación  
entre las variables  
(vínculo)

## Chi- cuadrado reducido

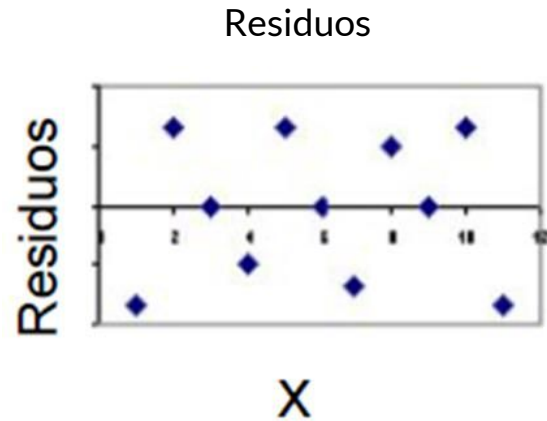
$$\chi_{\nu}^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{\chi^2}{N-k} \left\{ \begin{array}{ll} \chi_{\nu}^2 \approx 1 & \text{✓} \\ \chi_{\nu}^2 \ll 1 & \text{✗} \rightarrow \text{Incertezas sobreestimadas} \\ \chi_{\nu}^2 \gg 1 & \text{✗} \end{array} \right.$$

## ¿Qué utilizaremos?

$$|r| \approx 1$$



$$\chi^2_\nu \approx 1$$



Estos métodos nos dan confianza en nuestro ajuste!

# Calidad del ajuste en Origin

The image shows the Origin software interface. A 'Linear Fit' dialog box is open, displaying various options for performing a linear fit. The 'Fit Statistics' section is expanded, showing several options checked with arrows pointing to them: 'Degrees of Freedom', 'Reduced Chi-Sq', 'Pearson's r', and 'Adj. R-Square'. The 'Confidence Level for Parameters(%)' is set to 95. The background shows a graph with data points and a fit line, labeled 'I(u. a.)' on the x-axis.

Linear Fit

Dialog Theme

Description Perform Linear Fitting

UCL

Confidence Level for Parameters(%) 95

t-Value

Prob>|I

CI Half-Width

Fit Statistics

Number of Points

Degrees of Freedom

Reduced Chi-Sq

R Value

Residual Sum of Squares

Pearson's r

R-Square(COD)

Adj. R-Square

Root-MSE (SD)

Norm of Residuals

OK Cancel

Graph2 - Copy of Graph1

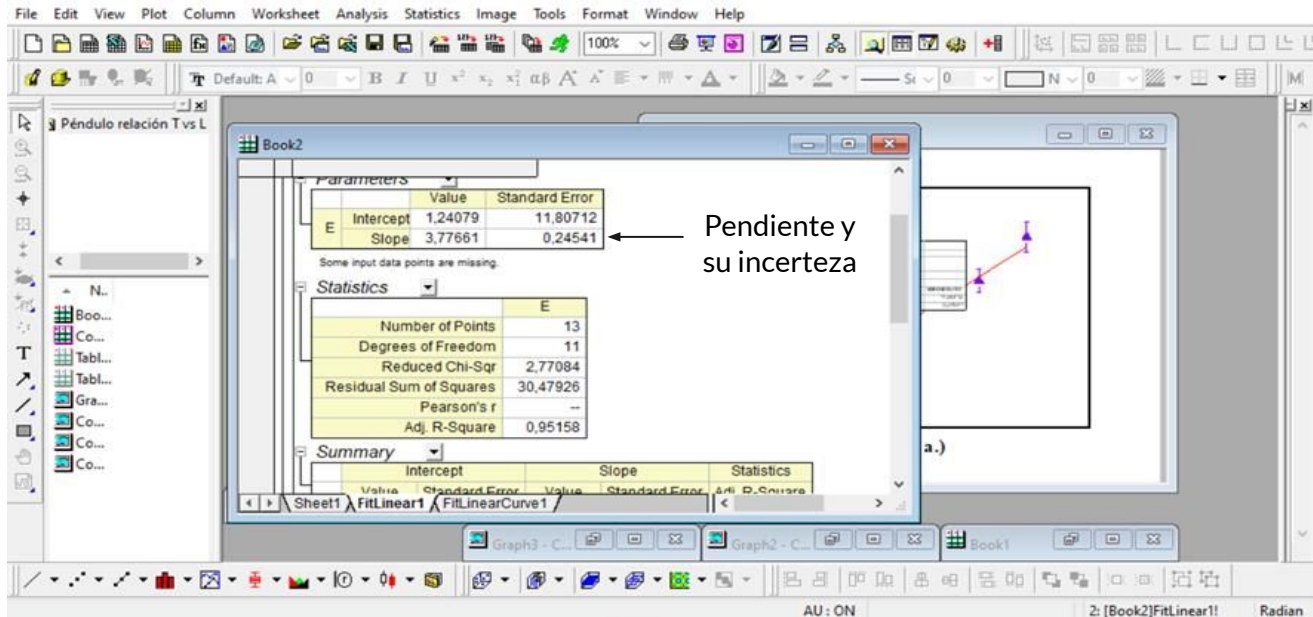
I(u. a.)

Graph2 - C... Book1

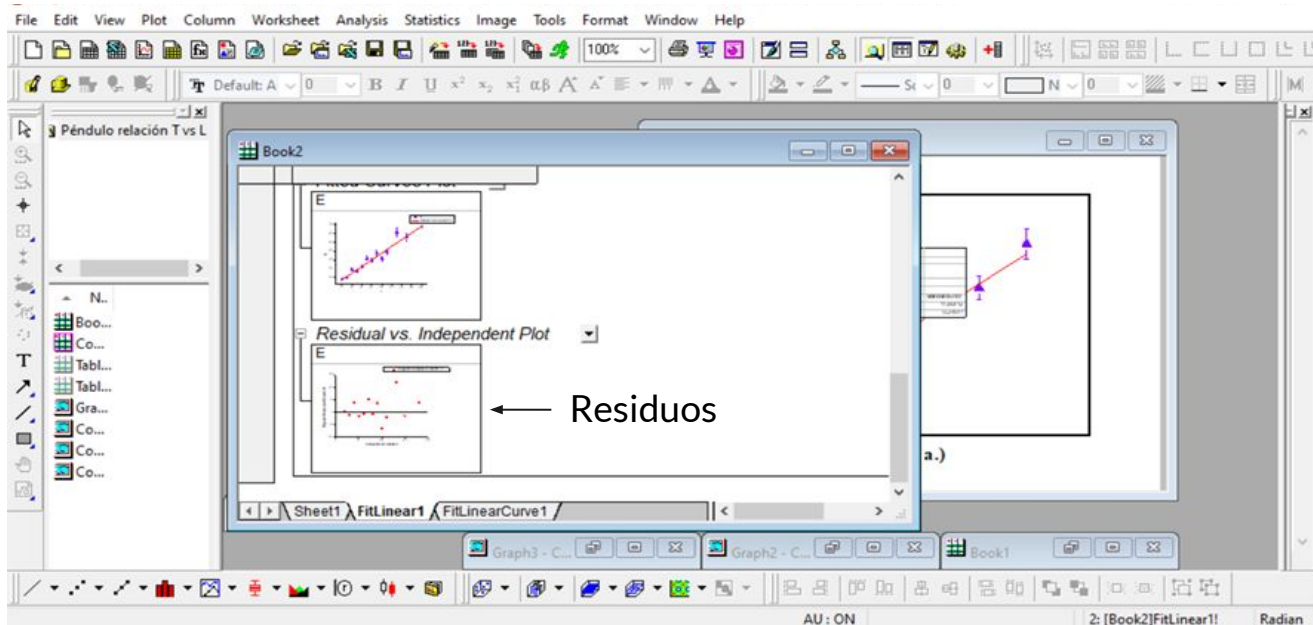
For Help, press F1 AU: ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]14 Radian



# Resultados



# Residuos en Origin

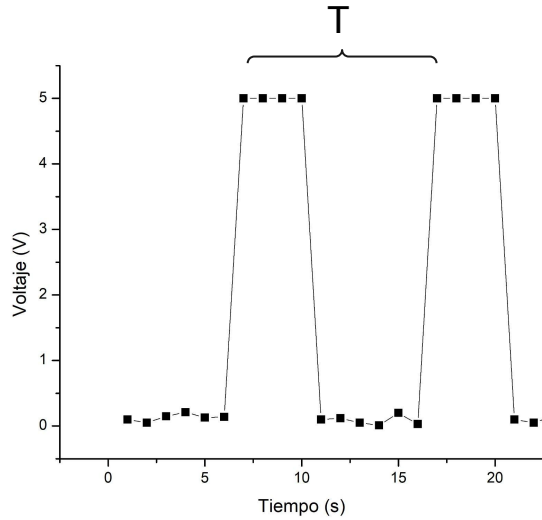




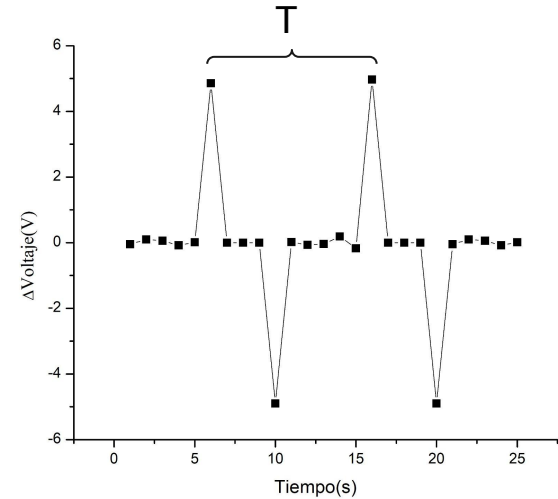
**¿Preguntas?**

# Ayuda: Contemos cantidad de períodos desde el Origen

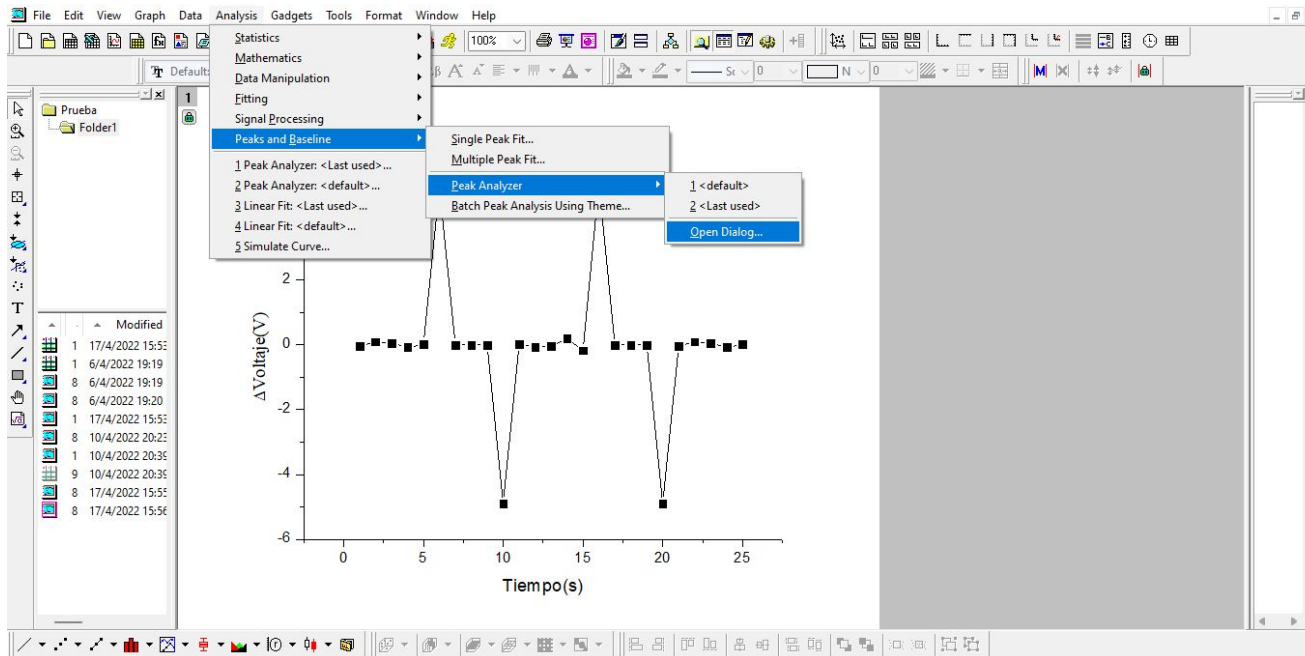
Ejemplo:



Set column Values  $\rightarrow$  Col  
(B) [i+1]-Col(B)[i]



# Encontramos los picos (máximos o mínimos):



## Pasos para encontrar los picos:

Dialog Theme <default>

**Goal**

- Baseline Mode
- Find Peaks
- Finish

Prev Next Finish Cancel

pa\_goal  
Select spectrum data and Goal

Recalculate Manual

**Define a baseline, find and mark peak locations**

**Goal**

- Integrate Peaks
- Create Baseline
- Subtract Baseline
- Find Peaks
- Fit Peaks (Pro)

**Data Info**

Spectrum = [Book1]Sheet1[intentos,H]  
X Range = (1,000, 26,00)  
Rows = [1, end]

Voy a la siguiente pestaña

Seleccionar

Dialog Theme <default>

**Goal**

- Baseline Mode
- Find Peaks
- Finish

Prev Next Finish Cancel

pa\_basemode

**Baseline Mode** None

Dialog Theme <default> \*

**Goal**

- Baseline Mode
- Find Peaks
- Finish

Prev Next Finish Cancel

pa\_peaks

Add Modify/Del Clear All

Save... Load... Peaks Info...

**Peak Finding Settings**

Show 2nd Derivative

Smothing Window Size 0  Auto

Direction Positive

Method Local Maximum

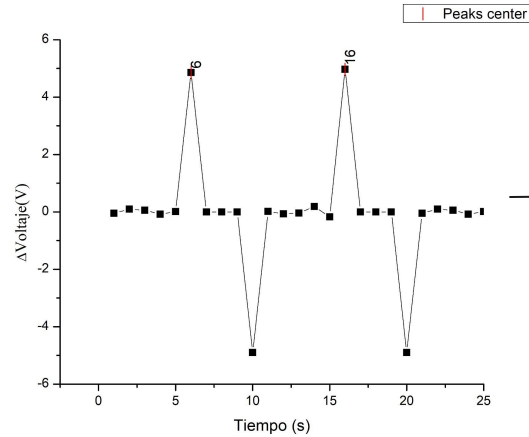
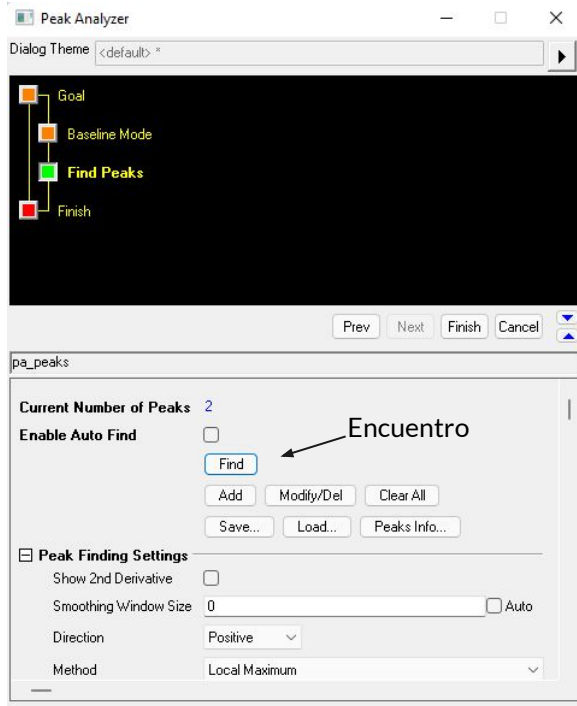
Local Points 2

**Peak Filtering**

Method By Height

Elijo

Finalmente,



Contando la cantidad de periodos N:

$$T = \frac{T'}{N}$$

Peak Cent	Peak Cent
X	Y
6	4,86
16	4,97