# Cuadrados mínimos

# Cuadrados mínimos

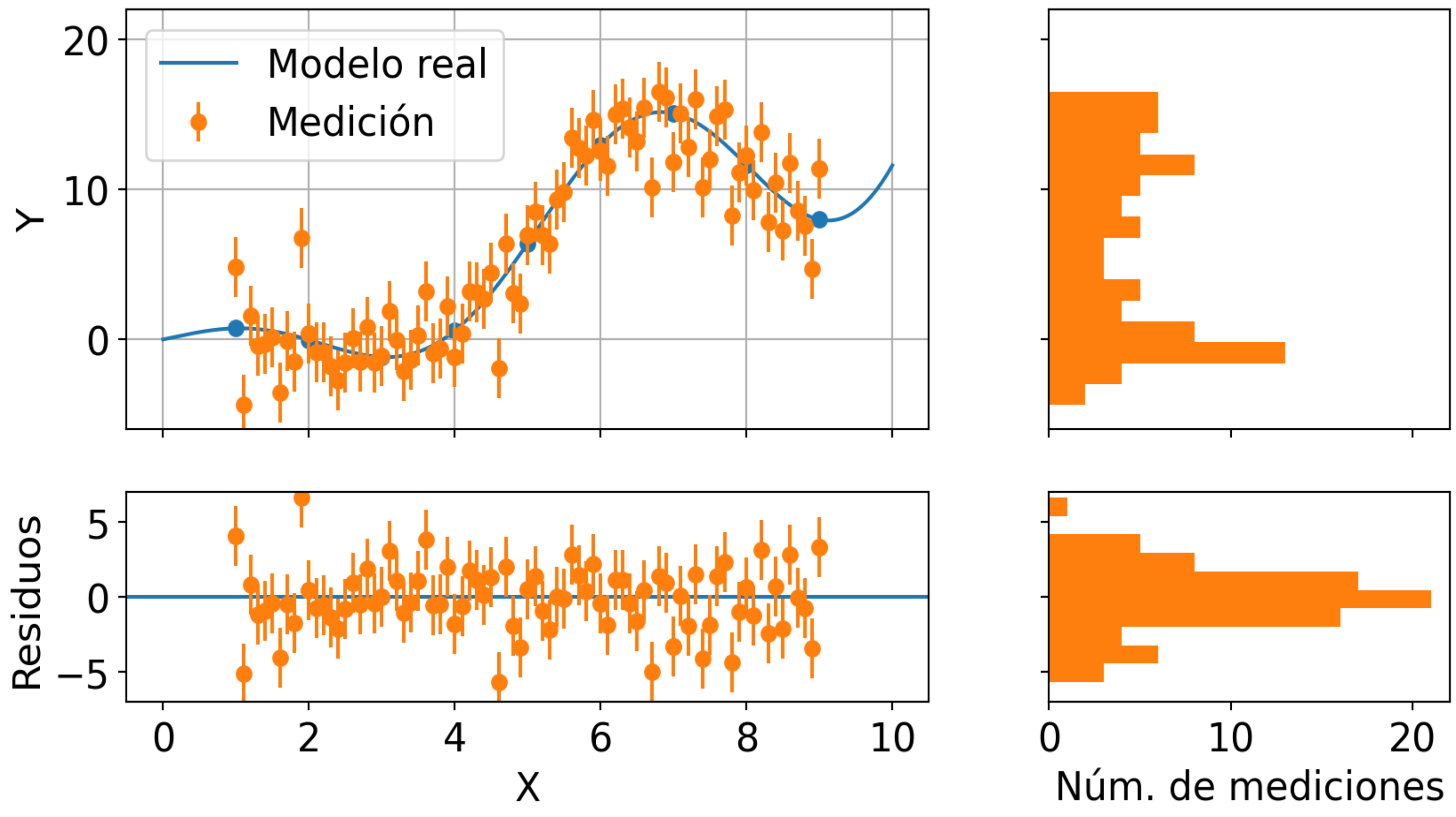
¿Qué vamos a ver?

- Evaluación de modelos
  - Residuos, $\chi^2$, y $R^2$
  - Ejemplos
- Minimizacion de $\chi^2$
  - Lineal vs no lineal
  - Caso función constante
- ¿Por qué usamos cuadrados mínimos?
  - Extensión del promedio
  - Descubrir y eliminar errores sistemáticos
- Ejemplos

# Evaluando un modelo (con datos)

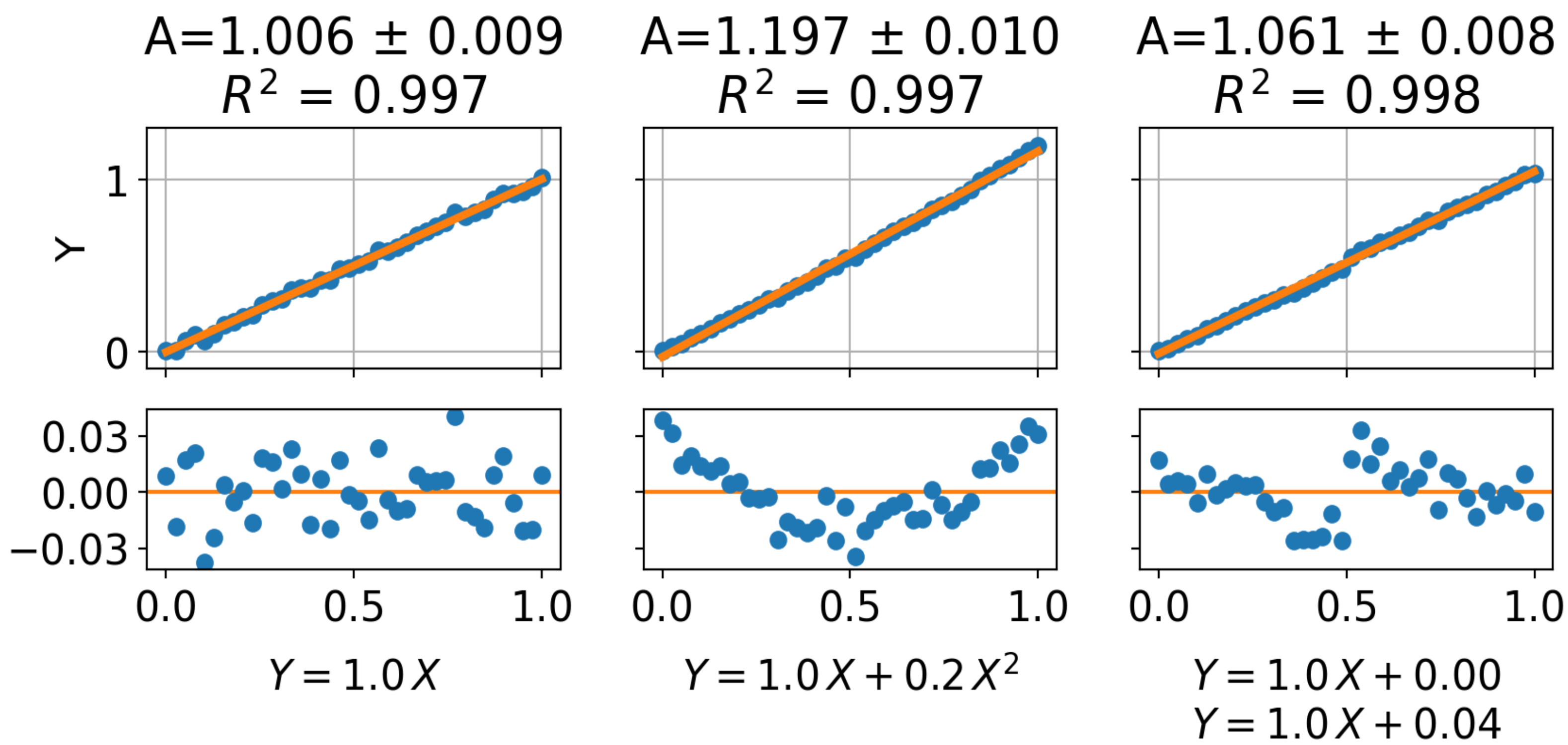
Vimos dos medidas:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_y^2} \qquad \chi^2 = \sum \left[ \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_{y_i}} \right]^2$$



# Ejemplo: usando $\mathrm{R}^2$

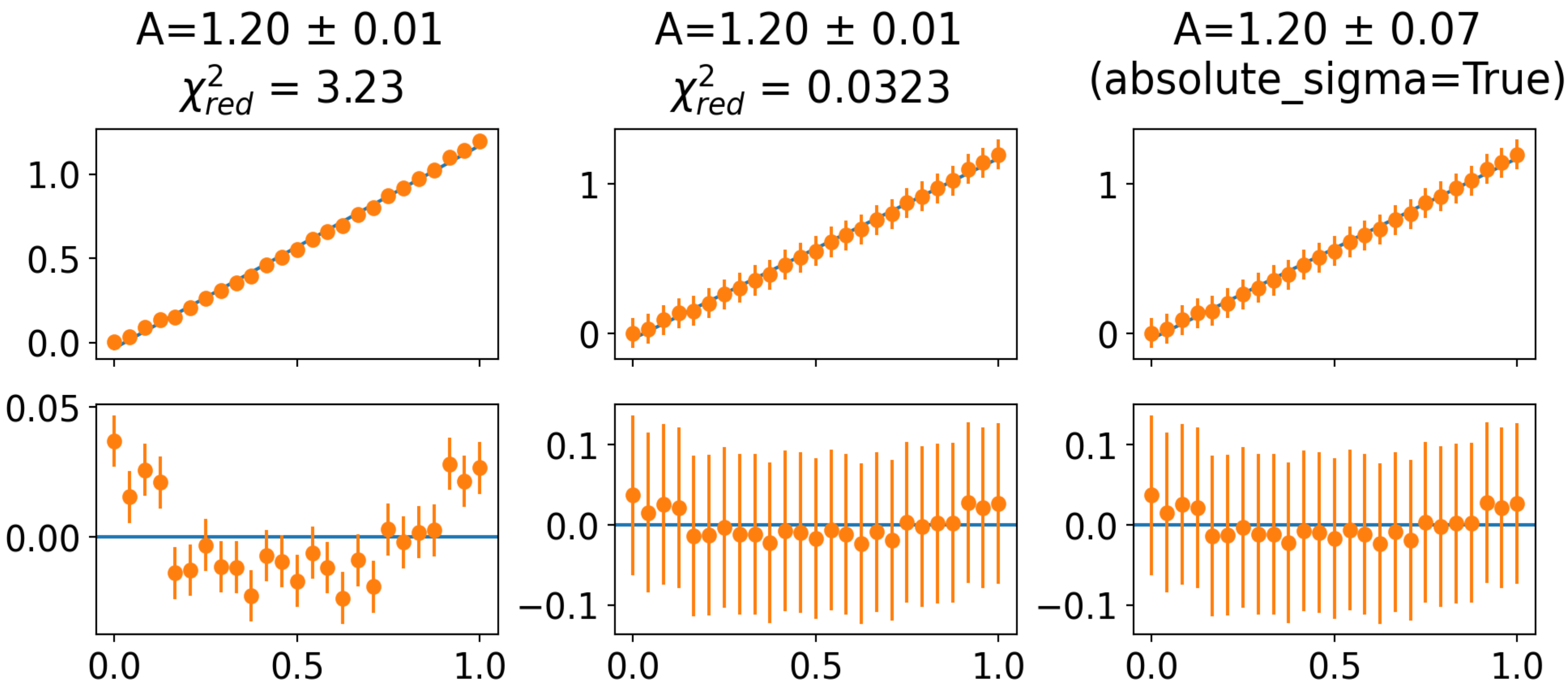
Tengo 3 conjuntos de mediciones y ajusto por $y = Ax + B$




- $\mathrm{R}^2$ no dice si ajustó bien.
- Residuos mal $\longrightarrow$ parámetro mal.

# Ejemplo: $\chi^2$

Tengo un conjunto de datos $y = 1.0\,x + 0.2\,x^2$ y le ajusto $y = Ax + B$




$\chi^2$ falla si tenemos mal los errores

# En resumen

Para evaluar un ajuste, mirar **los residuos**:

- la **aleatoriedad** es lo más seguro.
- la **distancia** ($\chi^2$) también sirve, pero puede fallar.

# Cuadrados mínimos

## ¿Cómo y por qué lo usamos?

# Minimización de $\chi^2$

Dada una función $f(x, p_0, \ldots, p_k)$, buscamos los parámetros $p$ que minimicen:

$$\chi^2 = \sum_i \left[ \frac{y_i - f(x_i, p_0, \ldots, p_k)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_i \left[ \frac{r_i}{\sigma_i} \right]^2$$

Para ello, derivamos e igualamos a 0:

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial p_0} = \ldots = \frac{\partial \chi^2}{\partial p_k}$$

Hay dos casos, según si $f$ es **lineal en los parámetros**.

En el caso no lineal, tenemos que ayudar al algoritmo con **parámetros iniciales**.

**No lineal**:

$$f(x, A, \varphi) = A \cos(x + \varphi)$$

**Lineal**:

$$f(x, A, B) = A \cos(x) + B \sin(x)$$

# Función constante

Supongamos que tenemos:

- modelo constante $f(x) = A$, que no depende de $x$,
- errores iguales $\sigma_i = \sigma$ para todo $i$

$$\chi^2 = \sum_i \left[ \frac{y_i - f(x_i, p_0, \ldots, p_k)}{\sigma_i} \right]^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i [y_i - A]^2$$

Si minimizamos

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0$$

obtenemos

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i = \bar{y}$$

¡El promedio!

Si los $\sigma_i$ son distintos,

obtenemos el promedio pesado.

# Extensión del promedio

Supongamos que el modelo es $f(x) = Ax$.

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 1 |
| 3 | 6 | 1 |
| … | … | … |
| N | 2N | 1 |

¿Cómo calculamos $A$?

Opción: despejando.

| $A = y/x$ | $\Delta A$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 2 | 1/2 |
| 2 | 1/3 |
| … | … |
| 2 | 1/N |

¿Cómo juntamos esos valores de $A$?

**Opción 1**:

Promedio

$$\frac{A_1 + A_2 + \ldots}{N}$$

**Opción 2**:

Promedio pesado

$$\frac{w_1 A_1 + w_2 A_2 + \ldots}{N}$$

**Opción 3**:

cuadrados mínimos

$$\chi^2 = \ldots$$

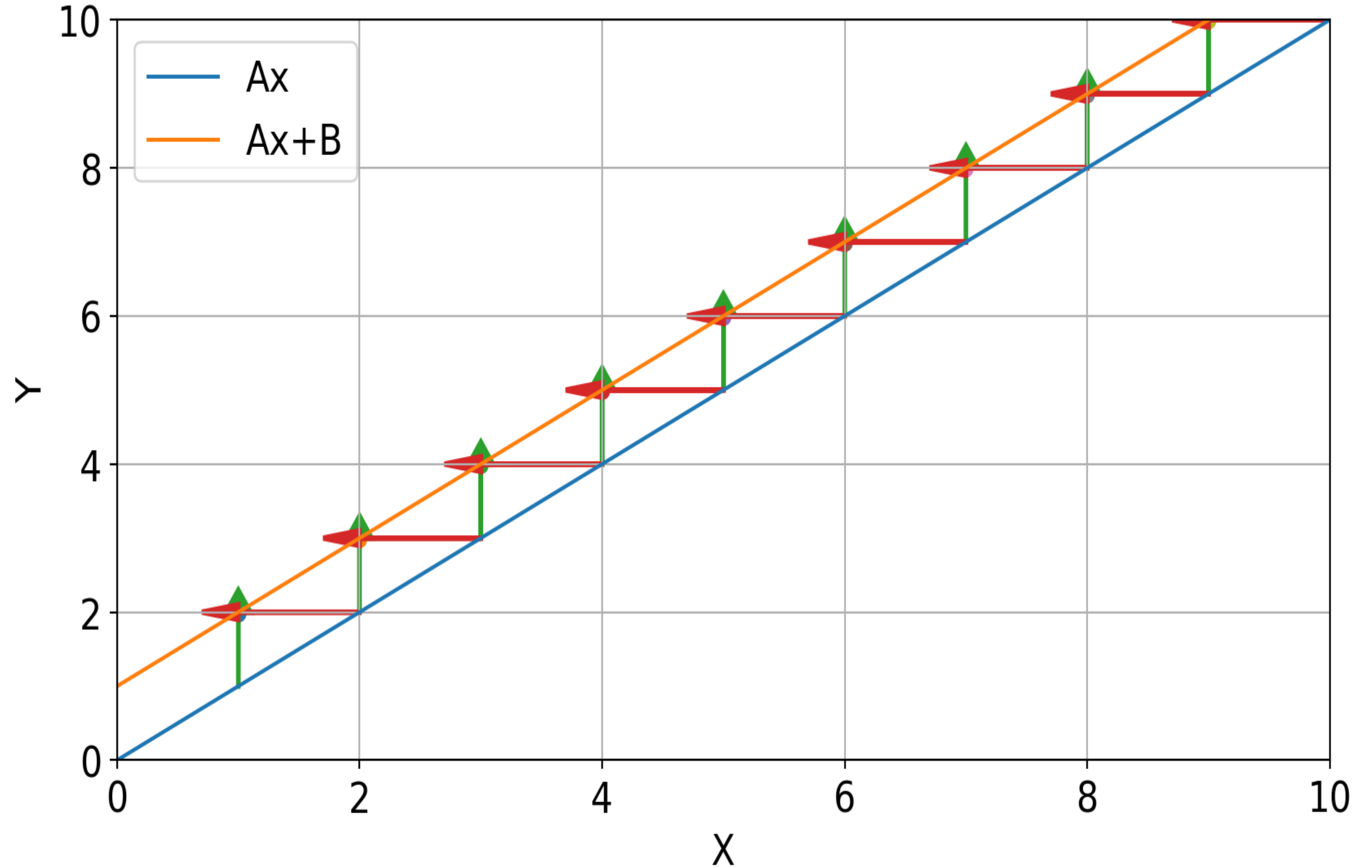
Cuadrados mínimos va hacer “un promedio ponderado”.

# Errores sistemáticos

Supongamos que el modelo es $f(x) = Ax$.

Pero, cuando medimos:

| x | y | A = y/x |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2.00 |
| 2 | 3 | 1.50 |
| 3 | 4 | 1.33 |
| 4 | 5 | 1.25 |
| 5 | 6 | 1.20 |
| … | … | … |
| 9 | 10 | 1.11 |




Podemos descubrir y corregir errores sistemáticos.

# Complejizando el modelo

Entonces, si la teoría era $y = Ax$, ¿ajustamos $y = Ax + B$ por las dudas?

- **Opción 1:** Agrego $B$ siempre, y veo si $B = 0$ (con su error $\Delta B$).
- **Opción 2:** Agrego $B$ solo si da mal el ajuste (residuos).

¿Por qué la opción 2 es mejor?

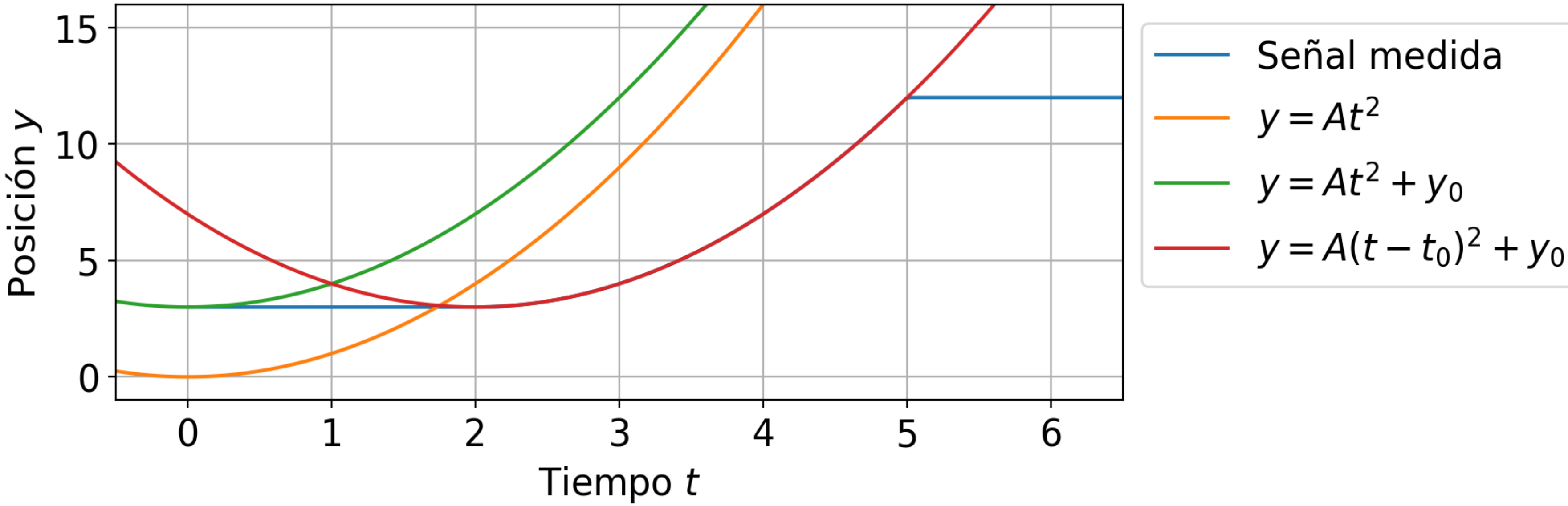
Agregar más parámetros, aumenta el error de los parámetros.

Si preferimos la opción 1, ¿por qué no agregar un termino cuadratico?

$$y = Ax + B + Cx^2$$

Empezar por lo más simple $\rightarrow$ complejizar cuando haga falta.

# Ejemplo: aceleración del carrito




¿Necesitamos conocer $t_0$ e $y_0$ ?

Podemos ajustar el modelo completo:

$$y = A(t - t_0)^2 + y_0$$

y que lo estime a partir de los datos.

Si expandimos el cuadrado:

$$y = A\ \mathbf{t^2} + (-2At_0)\ \mathbf{t} + (At_0^2 + y_0)$$

podemos ajustar:

$$y = A\ \mathbf{t^2} + B\ \mathbf{t} + C$$

# Ejemplo: péndulo

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} L = AL$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} = A\sqrt{L}$$

Si tenemos un error sistemåtico $L_0$ constante en $L$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} (L - L_0)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L - L_0}$$

Es equivalente a:

$$T^2 = AL + B$$

**NO** es equivalente a:

$$T = A\sqrt{L} + B$$

¡Hay que modelar el experimento!

# Resumen

- Cuadrdados mínimos: “extensión del promedio”
- Modelo a ajustar:
  - Lineal (en los parámetros) → solución única
  - No lineal → parámetros iniciales
- Elección del modelo:
  - Simple → complejo
  - Hay que pensar en el experimento
- Evaluación del ajuste:
  - Aleatoriedad de residuos
  - Distancia de residuos ($\chi^2$)

Si el modelo ajusta mal, los parámetros están mal.

# Ejemplo: aceleración del carrito

¿Podemos estimar $t_0$ directamente como una de las mediciones?