LABORATORIO 1A

2do. CUAT 2024

- MEDICIONES DIRECTAS II.
- INCERTIDUMBRES. ESTIMADORES.
- DETERMINACIÓN DE INCERTEZAS ESTADÍSTICAS.
- COMPARACIÓN DE HISTOGRAMAS.
- FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA.

Miércoles 8 – 14 hs

Gustavo Grinblat - Laura Ribba – Ayelén Santos – Delfina Rodríguez Juiz

universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

REPASO DE LA CLASE PASADA

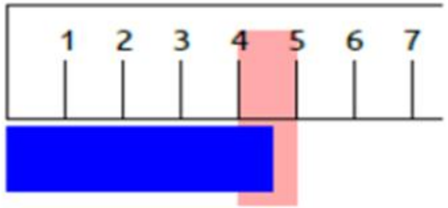
Queremos obtener una expresión válida para una determinada **magnitud física**

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

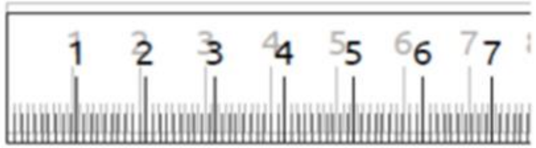
Valor más representativo

Incerteza absoluta ⇒ Fuentes de incerteza

Error de apreciación: Mínima división puede resolver el observador.



Error de exactitud: Error en la calibración del instrumento.



Error de interacción: Incerteza que surge de la interacción del instrumento con el objeto.

Errores estadísticos: Ocurren debido a causas múltiples y fortuitas. Sucesivas mediciones en las mismas condiciones arrojan distintos valores.

REPASO DE LA CLASE PASADA

Queremos obtener una expresión válida para una determinada **magnitud física**

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Valor más representativo

Incerteza absoluta → Fuentes de incerteza

Error total, error absoluto y error relativo

$$\Delta x \equiv \sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{ap}^2 + \sigma_{exac}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{est}^2 + \cdots}$$

(Fuentes de error independientes entre sí)

$x = \bar{x} \pm \Delta x$

Error absoluto: Δx

Error relativo: $\varepsilon_r = \Delta x / \bar{x}$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

expresamos las incertidumbres con **una o dos cifras significativas**

L = (84 ± 1) mm
L = (83,9 ± 0,5) mm

L = (83,923 ± 1) mm
L = (83,923 ± 1,052) mm

Medición directa

La medida deseada se obtiene de la lectura del instrumento (ej. temperatura, masa y longitud pueden determinarse directamente utilizando un termómetro, una balanza, y una regla, respectivamente).

¿Cuántas veces mido una magnitud?

- Mido 3 veces (x_1, x_2, x_3) y calculo el **valor medio** $\overline{x}$
- Calculo el Rango R: la diferencia entre el valor máximo y el mínimo. $R = x_{Max} - x_{min}$
- Calculo "**cuánto pesa porcentualmente** R **para** $\overline{x}$": $\boxed{P = \frac{R}{\overline{x}} 100}$

Si P ...	N° de medidas necesarias
A) Con 3 medidas: Si $P \leq 2\%$	**Suficiente** hacer 3 medidas
B) Con 3 medidas: Si $2\% < P \leq 8\%$	**Hacer 3** medidas **más, hasta tener 6**
C) Con 6 medidas: Si $8\% < P \leq 15\%$	**Seguir midiendo hasta tener 15** medidas
D) Con 15 medidas: Si $P > 15\%$	**Tomar un mínimo de 50** medidas

¿Cuál es el valor de T?

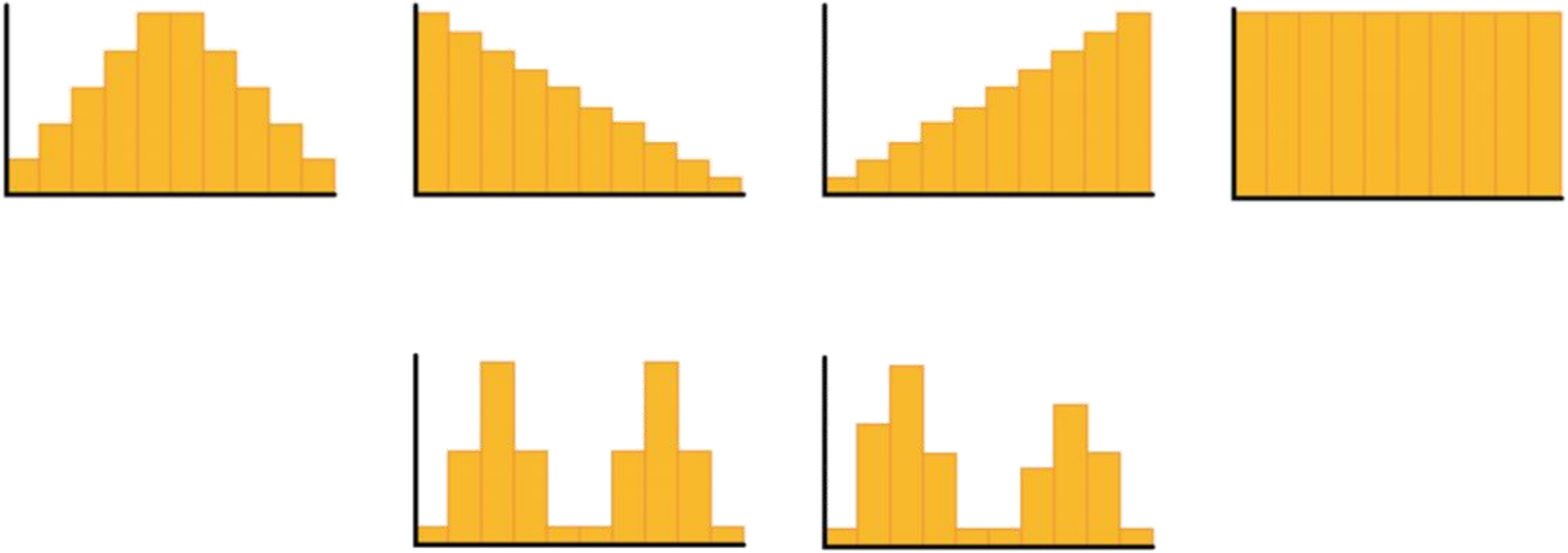
1,10 s	1,19 s	1,16 s
1,14 s	1,15 s	1,11 s
1,20 s	1,21 s	1,16 s

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$$

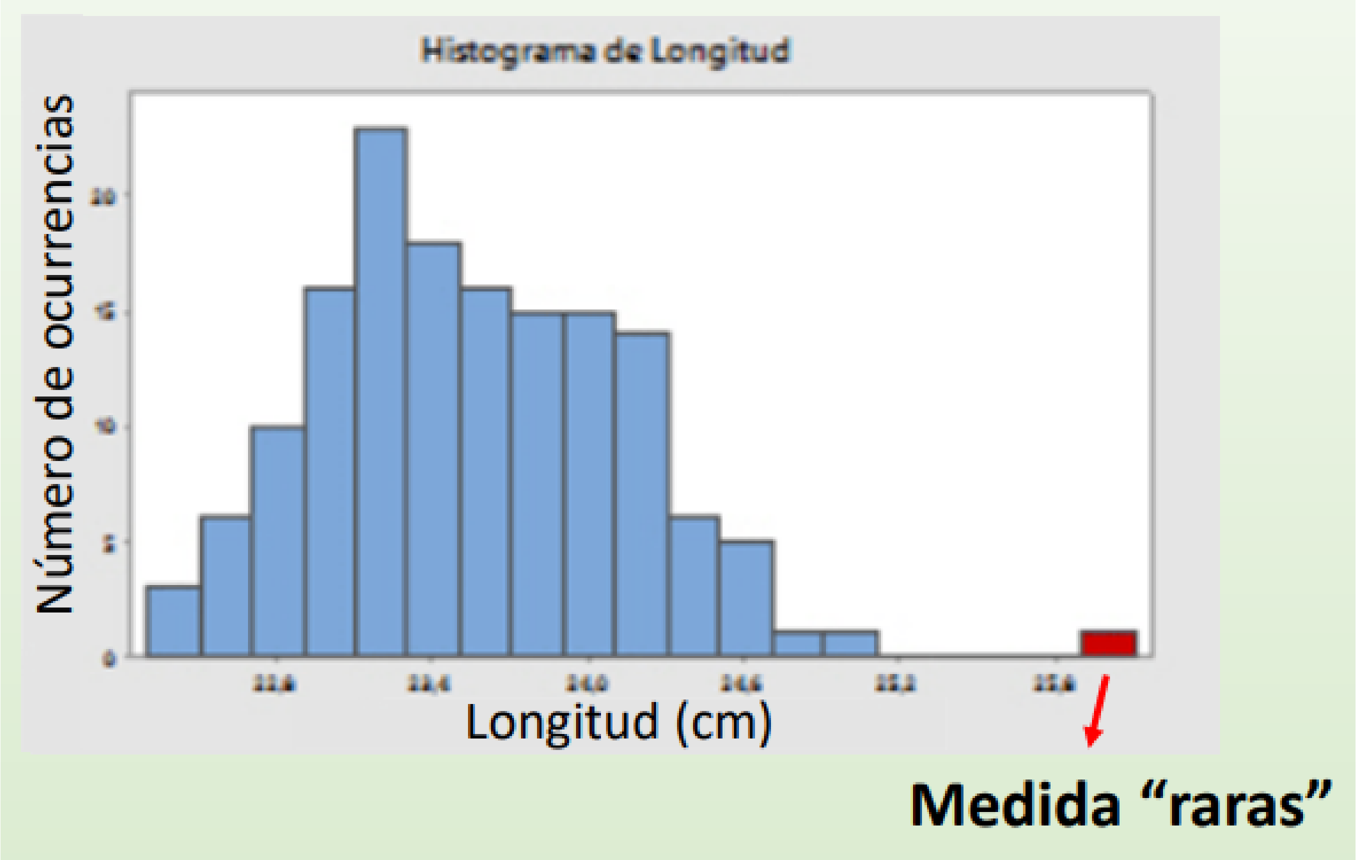
$$\Delta T = ???$$

- Media: Es el valor medio o promedio: $\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
- Moda: Valor de x donde está la máxima frecuencia
- Mediana: Valor de x que divide a la primera mitad de los valores, de la segunda mitad.
- Varianza: $\sigma_x^2 = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

¿COMO PUEDO VISUALIZAR LOS RESULTADOS?



¿COMO PUEDO VISUALIZAR LOS RESULTADOS?



¡DE LA CLASE PASADA!

Actividad

Medición del periodo de un faro (objetivo: observar el efecto de la forma de medir y del método usado)

- Tomar **100 medidas de *T*** (N = 100) con un cronómetro **empleando el destello de luz**.
- Tomar **100 medidas de *T* empleando el sonido del Faro, de espaldas al mismo**.

Entrega (16/08)

- Histogramas para ambos métodos (**colocar ejes con nombre y unidades**)
- Debajo de cada figura: N° de figura y epígrafe. Incluir resultado de *T* promedio y desviación estándar.

COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS

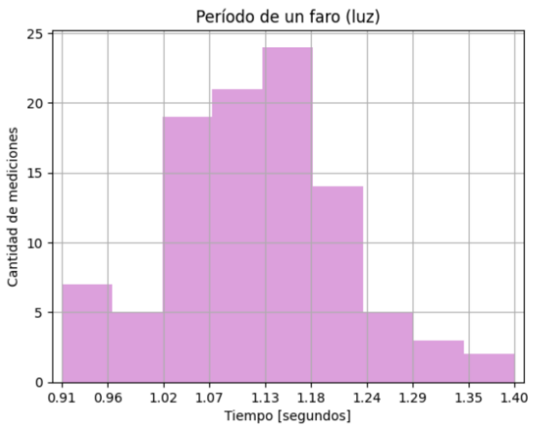
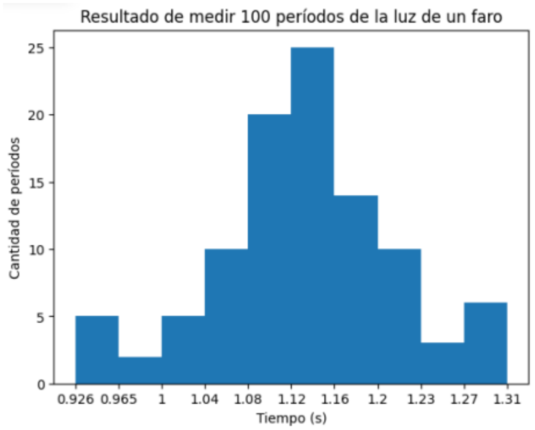
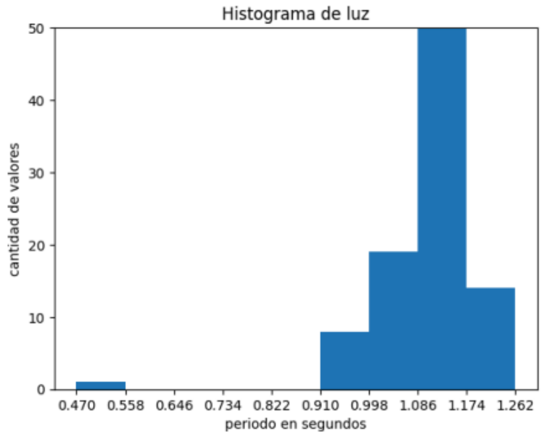


Figura 1. Período (T) de un faro medido mediante la observación de una luz que se prendía cada cierto tiempo registrada 100 veces con un cronómetro. Con T promedio de 1.12 segundos y una desviación estándar de 0.10 segundos

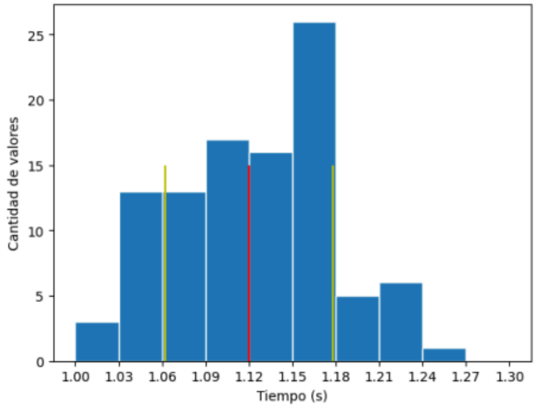




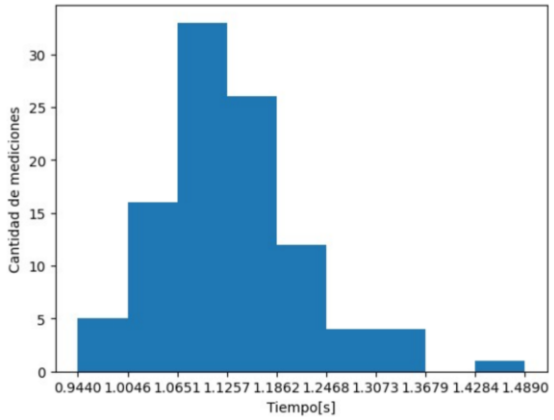
Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s

fig 1.1



*Medición del período del faro mediante su luz.
**El valor promedio y la variación estándar a 3 s.f es de 1,12s y 5,76x10^{-2}s respectivamente.
***Puede verse una moda en el subrango 1,15s-1,18s, aunque los resultados son poco concluyentes debido a la leve uniformidad entre los subrangos 1,03s-1,06s y 1,12s-1,15s.



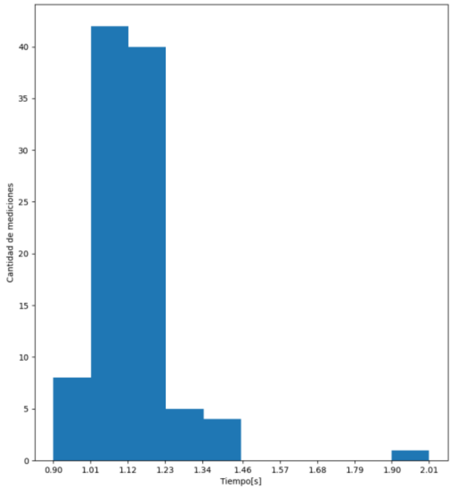


Figura 1: cantidad de mediciones en funcion del periodo en el que un faro tarda en prenderse y apagarse,T Promedio=1.13 Desviacion Estandar=0.13

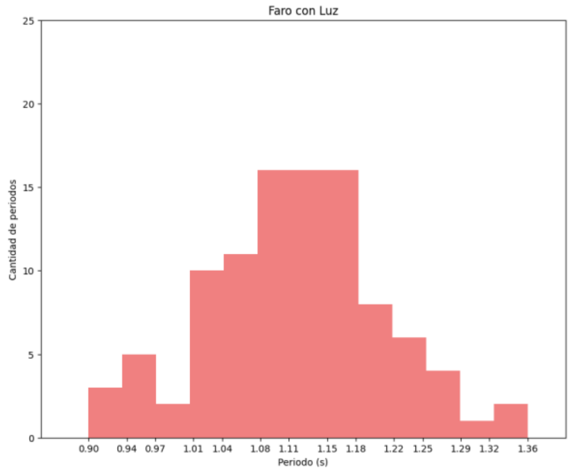


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.

COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS

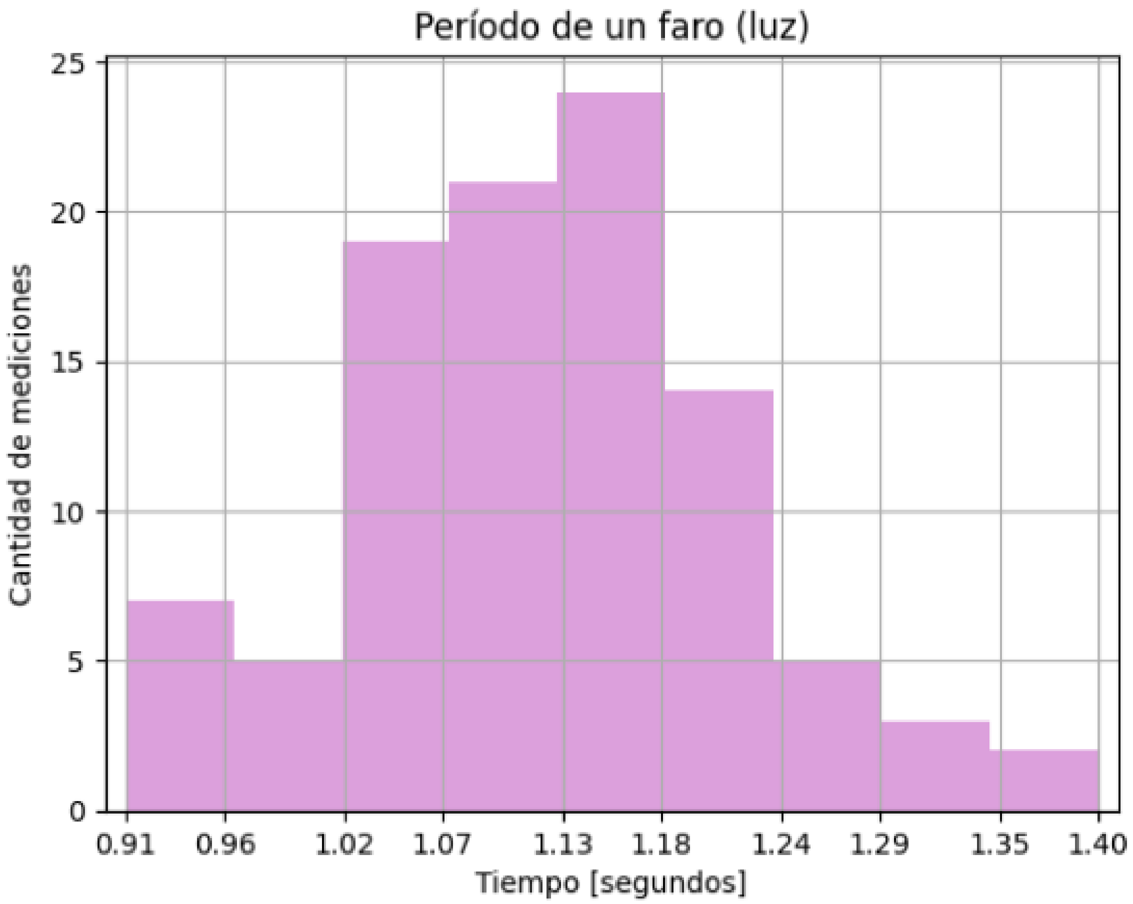
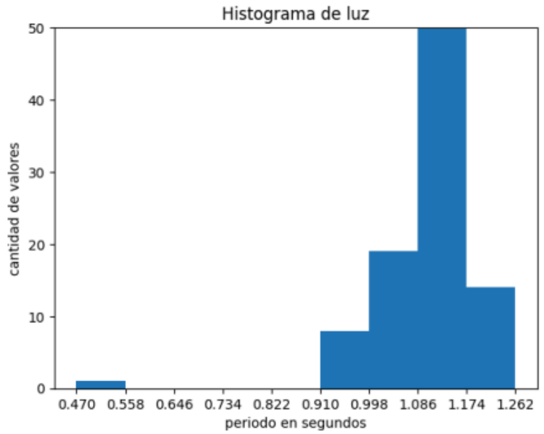
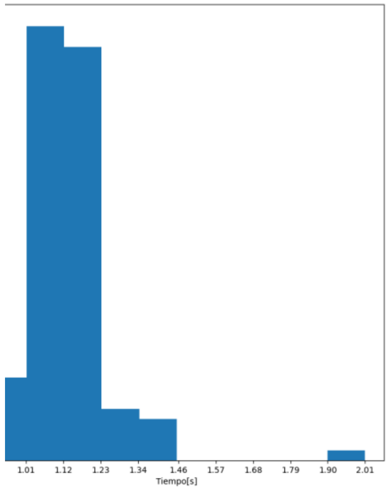


Figura 1. Período (T) de un faro medido mediante la observación de una luz que se prendía cada cierto tiempo registrada 100 veces con un cronómetro. Con T promedio de 1.12 segundos y una desviación estándar de 0.10 segundos



Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s



ediciones en funcion del periodo en el que un faro tarda en prenderse y apagarse,T Promedio=1.13 Desviacion Estandar=0.13

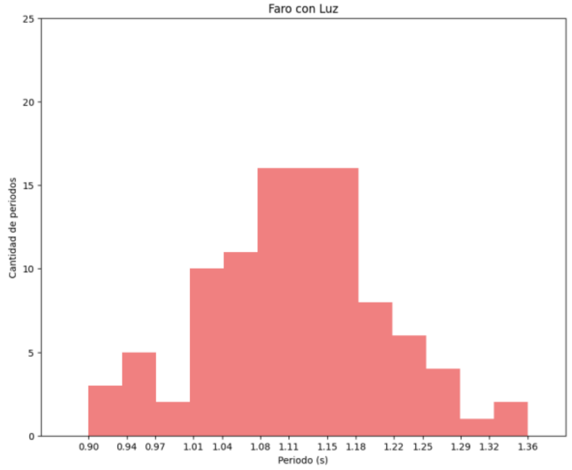
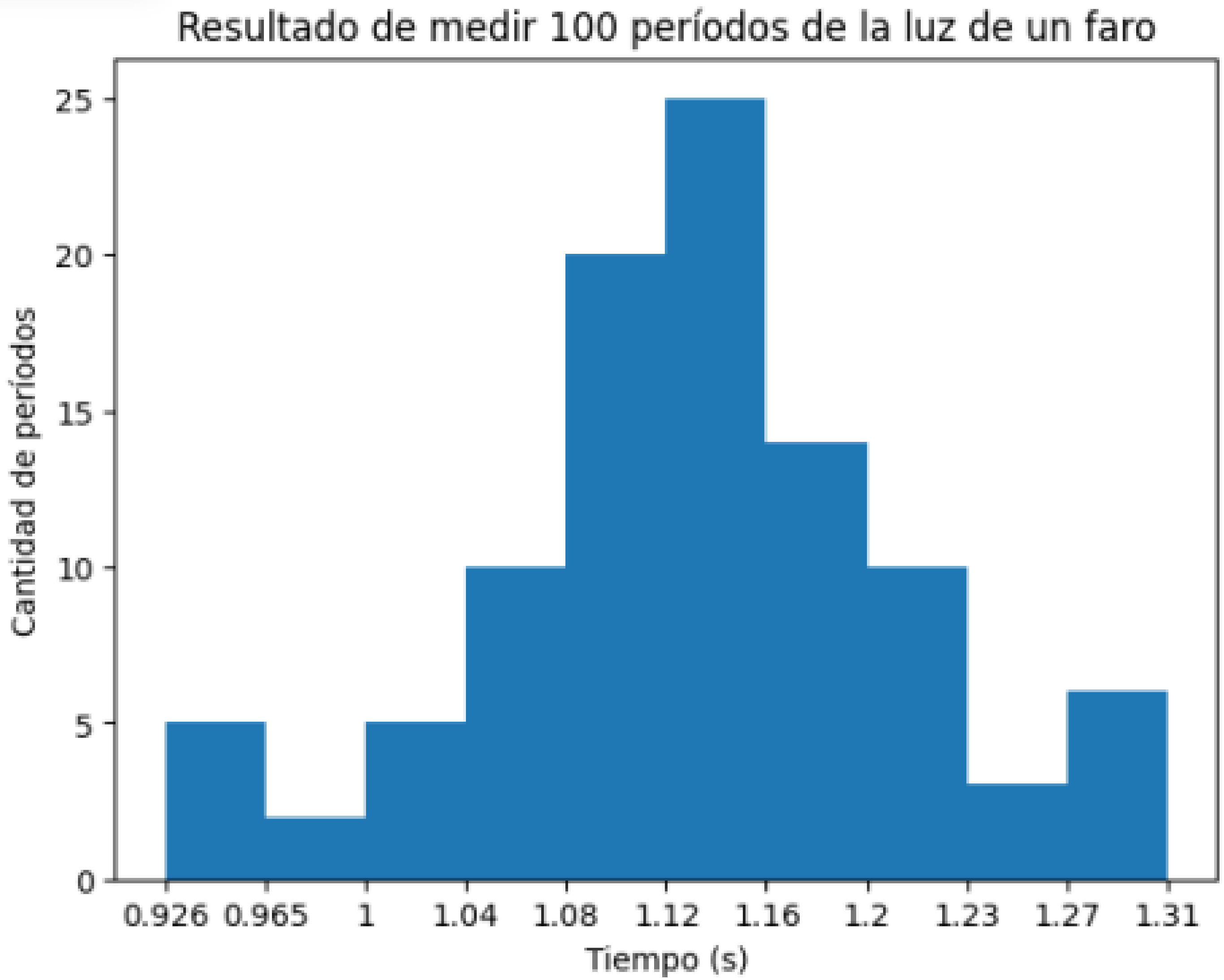
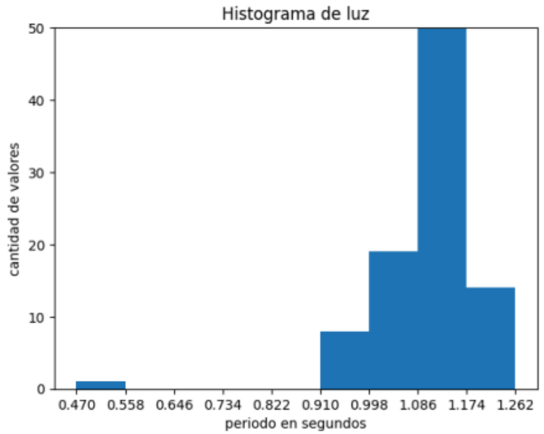


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.

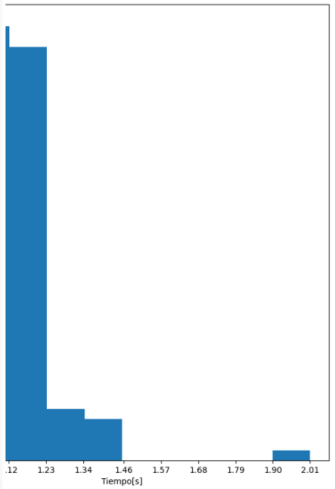
COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS





Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s



ncion del periodo en el que un faro tarda en prenderse y apagarse,T Promedio=1.13 Desviacion Estandar=0.13

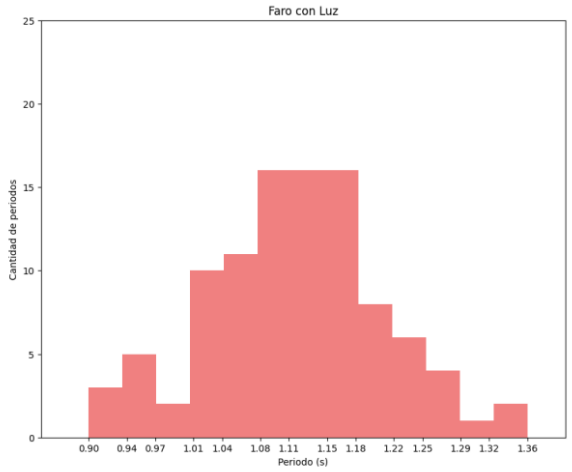


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.

COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS

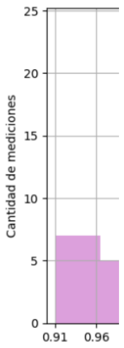
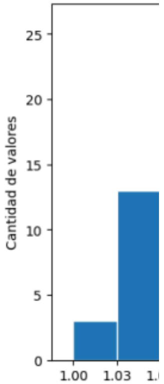
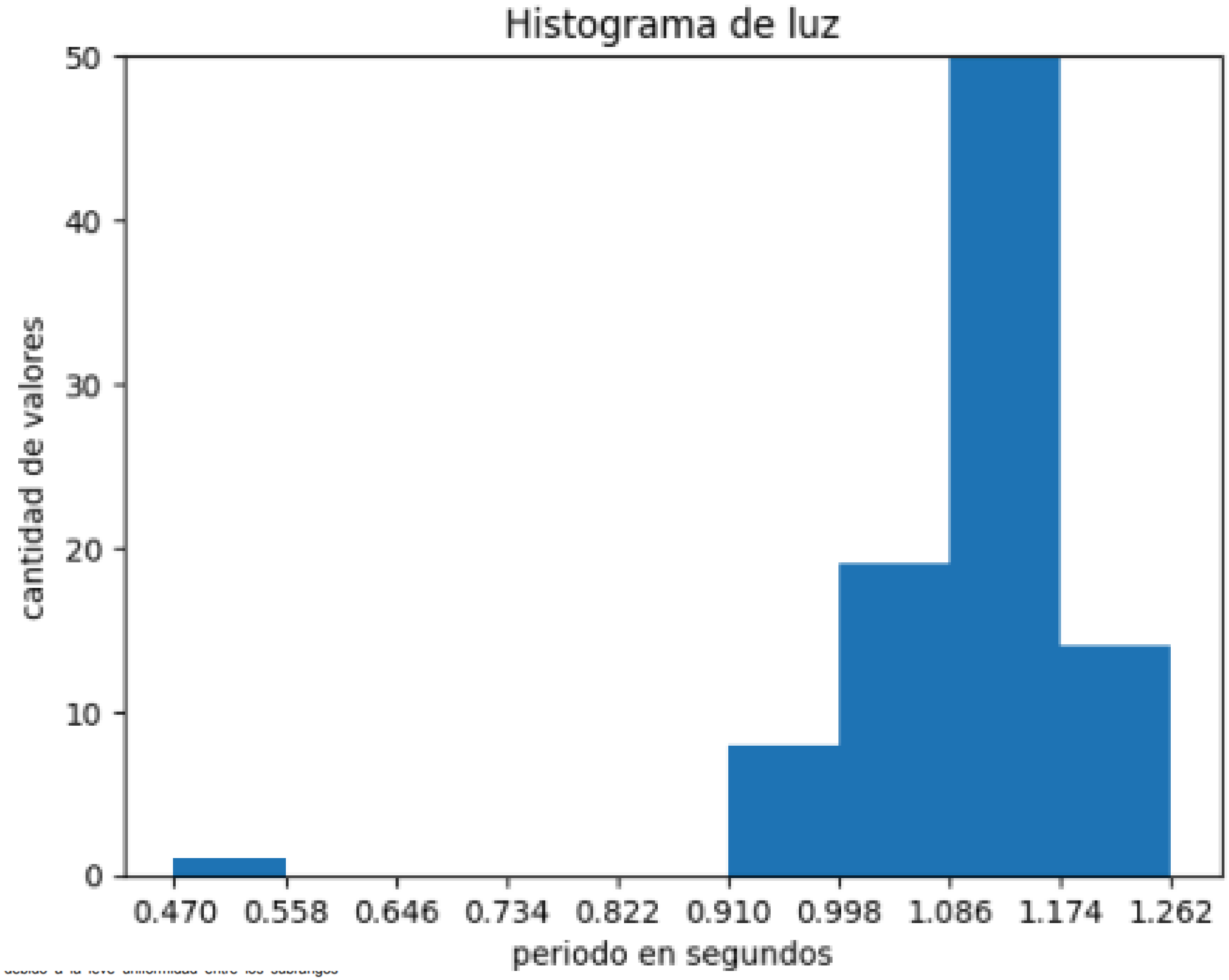


Figura 1. Período (T)
cada cierto tiempo reg
segundos y una desvi

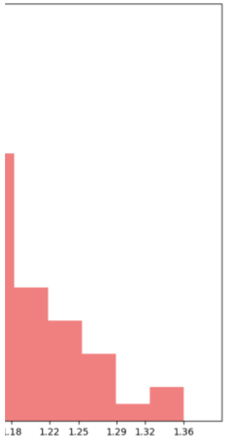


*Medición del período d
**El valor promedio y l
respectivamente.
***Puede verse una mo
son poco concluyentes
1,03s-1,06s y 1,12s-1,15s.



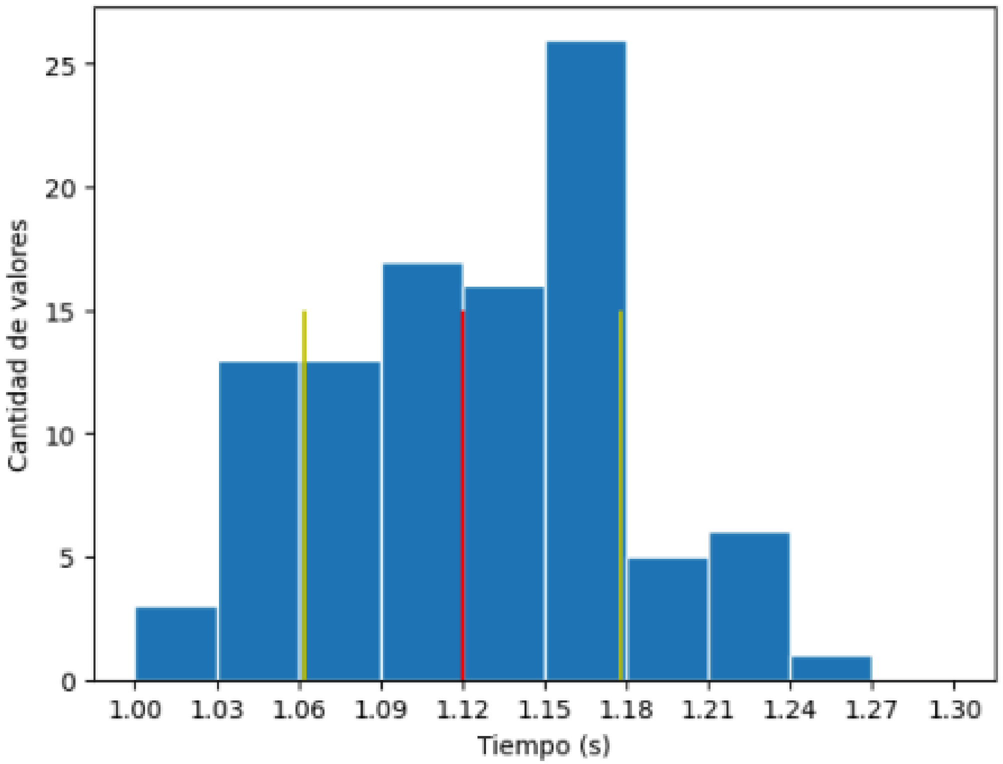
Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s

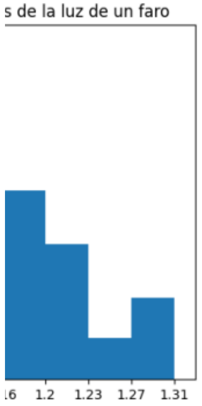


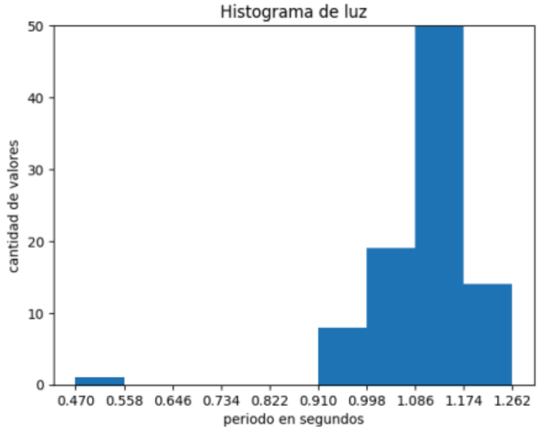
COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS

fig 1.1



*Medición del período del faro mediante su luz.
**El valor promedio y la variación estándar a 3 s.f es de 1,12s y 5,76x10^{-2}s respectivamente.
***Puede verse una moda en el subrango 1,15s-1,18s, aunque los resultados son poco concluyentes debido a la leve uniformidad entre los subrangos 1,03s-1,06s y 1,12s-1,15s.





Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s

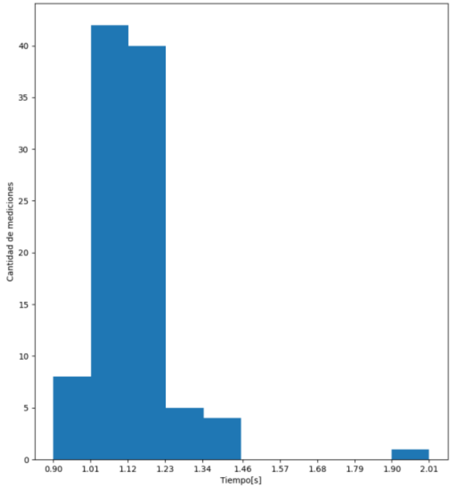


Figura 1: cantidad de mediciones en funcion del periodo en el que un faro tarda en prenderse y apagarse,T Promedio=1.13 Desviacion Estandar=0.13

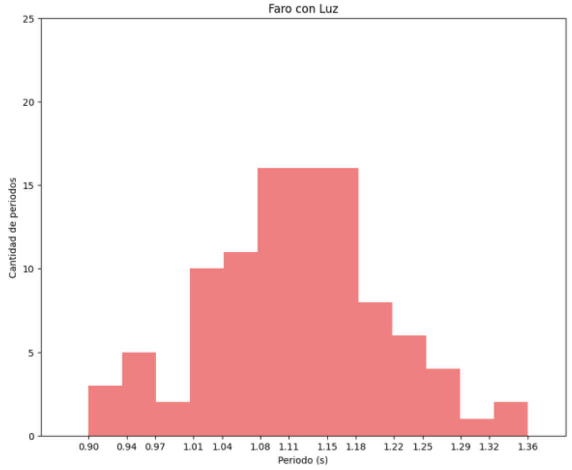
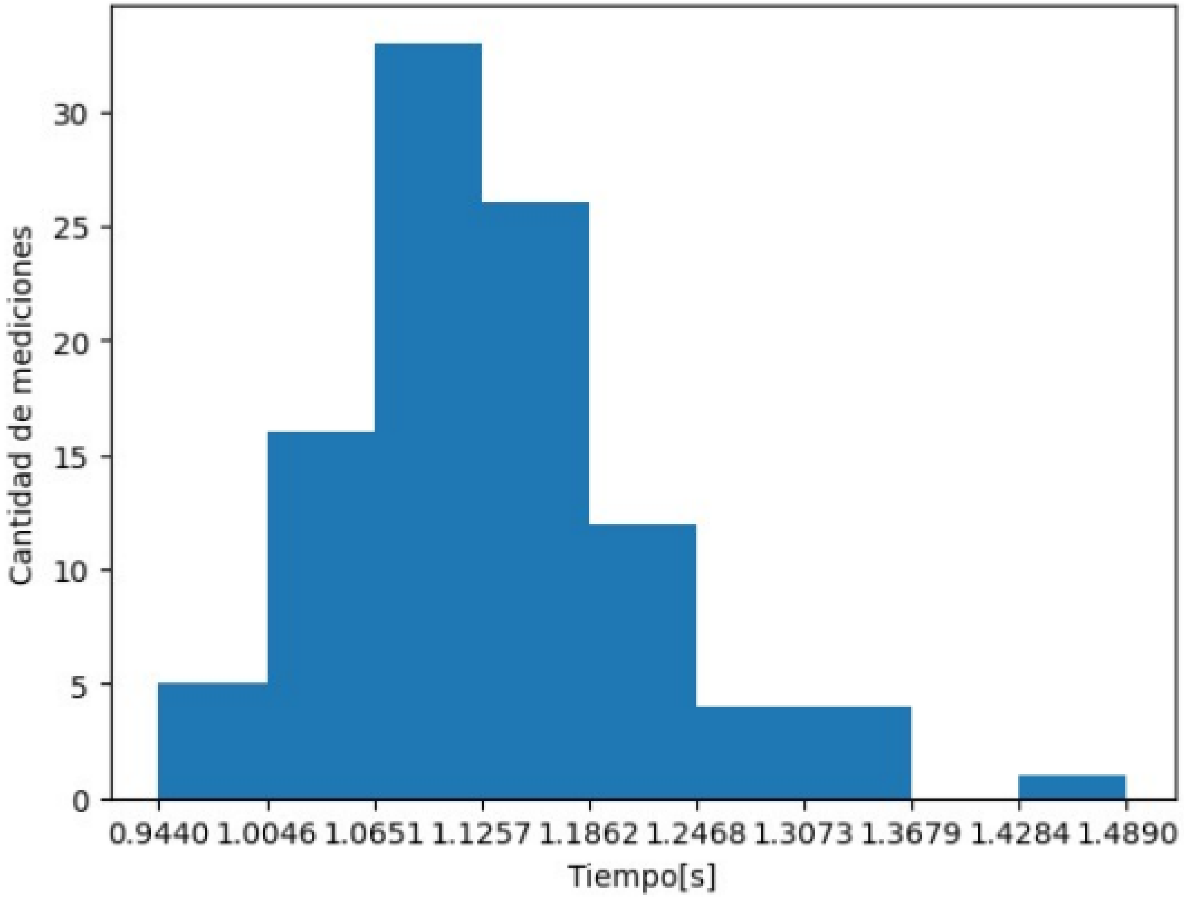
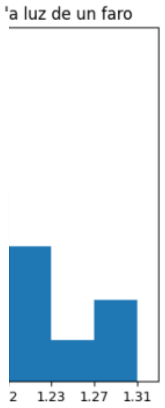


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.

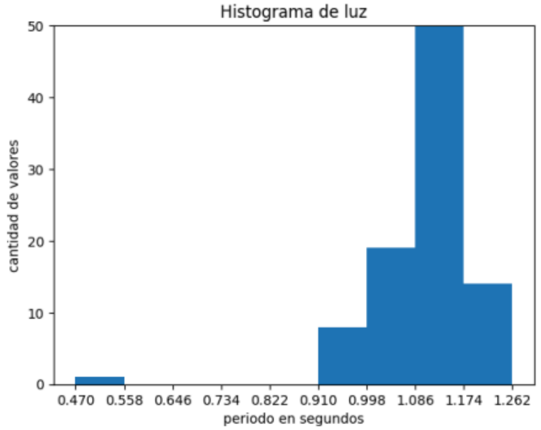
COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS





Tiempo (s)

*Medición del período del faro mediante su luz.
**El valor promedio y la variación estándar a 3 s.f es de 1,12s y 5,76x10^{-2}s respectivamente.
***Puede verse una moda en el subrango 1,15s-1,18s, aunque los resultados son poco concluyentes debido a la leve uniformidad entre los subrangos 1,03s-1,06s y 1,12s-1,15s.



Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s

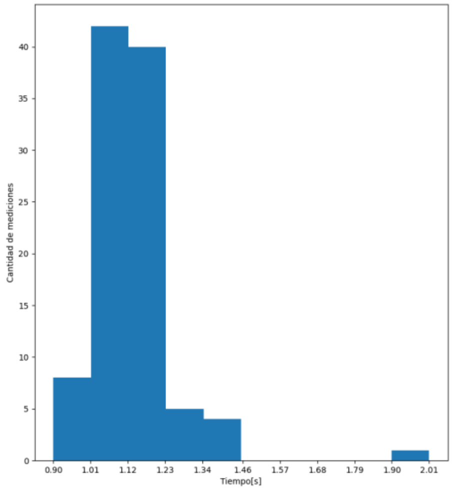


Figura 1: cantidad de mediciones en funcion del periodo en el que un faro tarda en prenderse y apagarse,T Promedio=1.13 Desviacion Estandar=0.13

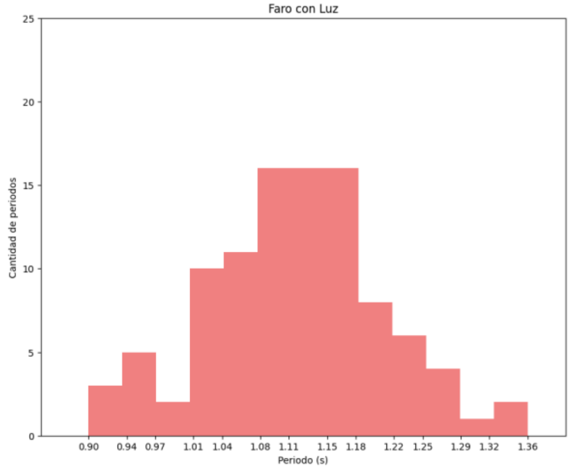


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.

COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS

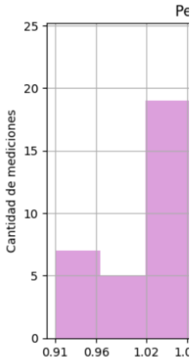
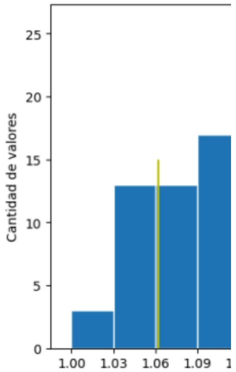


Figura 1. Período (T) de un faro m
cada cierto tiempo registrada 100 v
segundos y una desviación estánd



*Medición del período del faro med
**El valor promedio y la variación
respectivamente.
***Puede verse una moda en el su
son poco concluyentes debido a
1,03s-1,06s y 1,12s-1,15s.

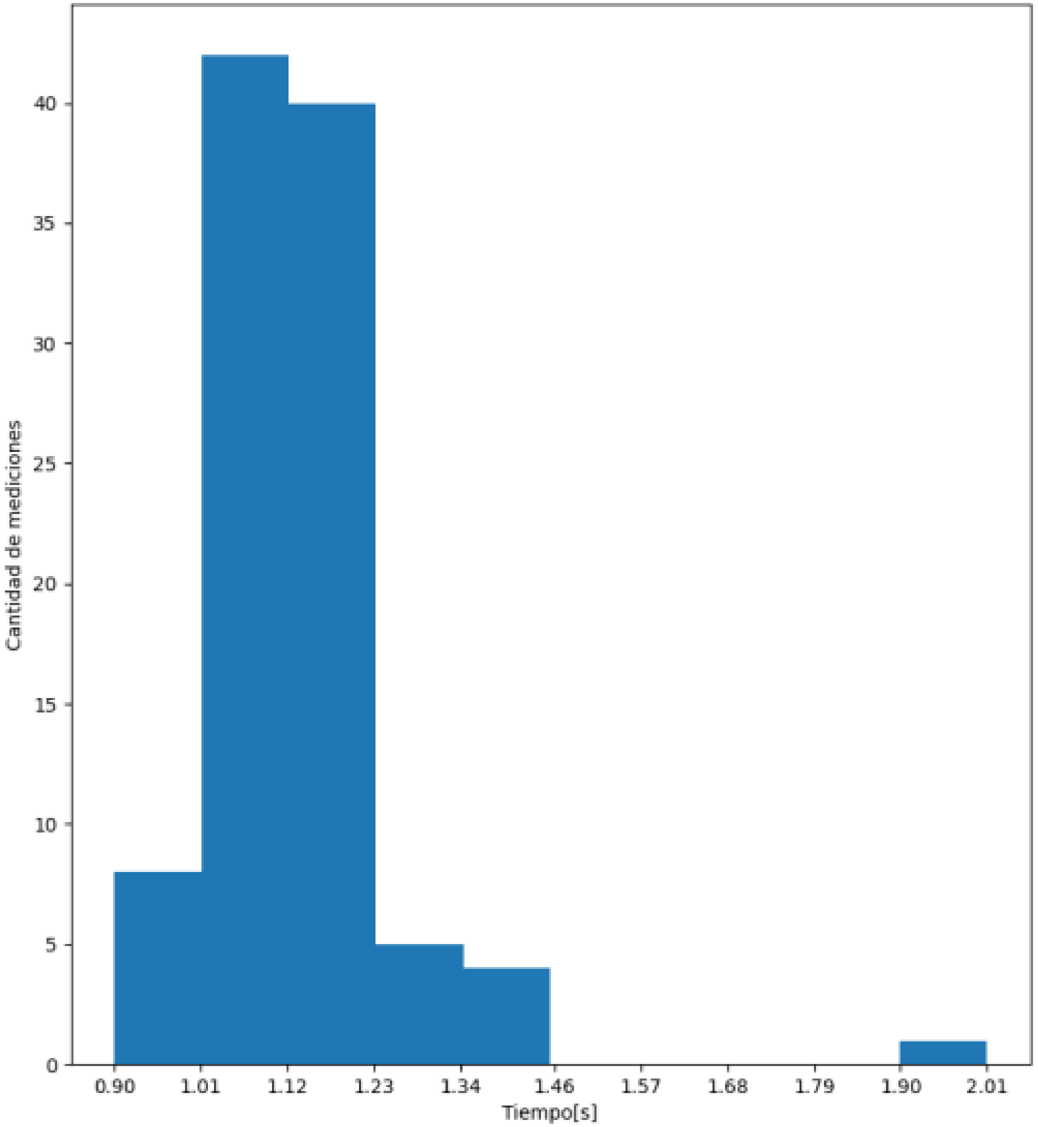
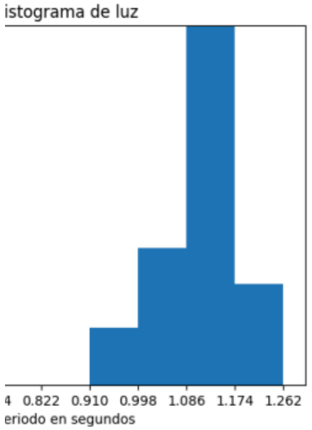


Figura 1: cantidad de mediciones en funcion del periodo en el que un faro tarda en prenderse y apagarse,T Promedio=1.13 Desviacion Estandar=0.13



Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s

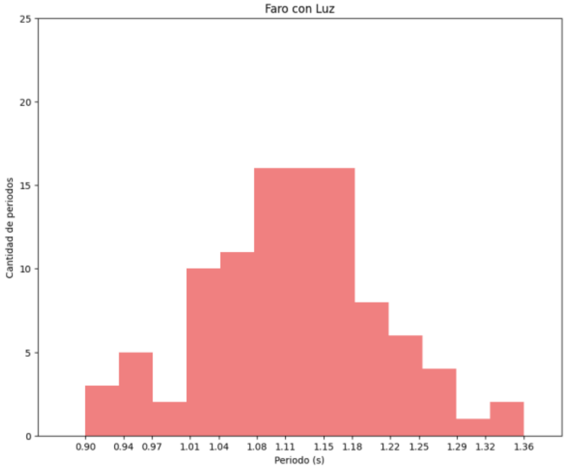


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.

COMPARTAMOS NUESTROS RESULTADOS

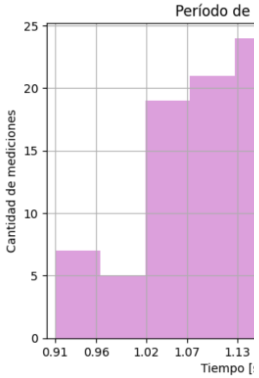
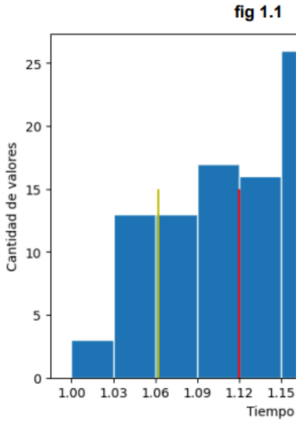


Figura 1. Período (T) de un faro medido media
cada cierto tiempo registrada 100 veces con u
segundos y una desviación estándar de 0.10 s



*Medición del período del faro mediante su l
**El valor promedio y la variación estándar
respectivamente.
***Puede verse una moda en el subrango 1,
son poco concluyentes debido a la leve
1,03s-1,06s y 1,12s-1,15s.

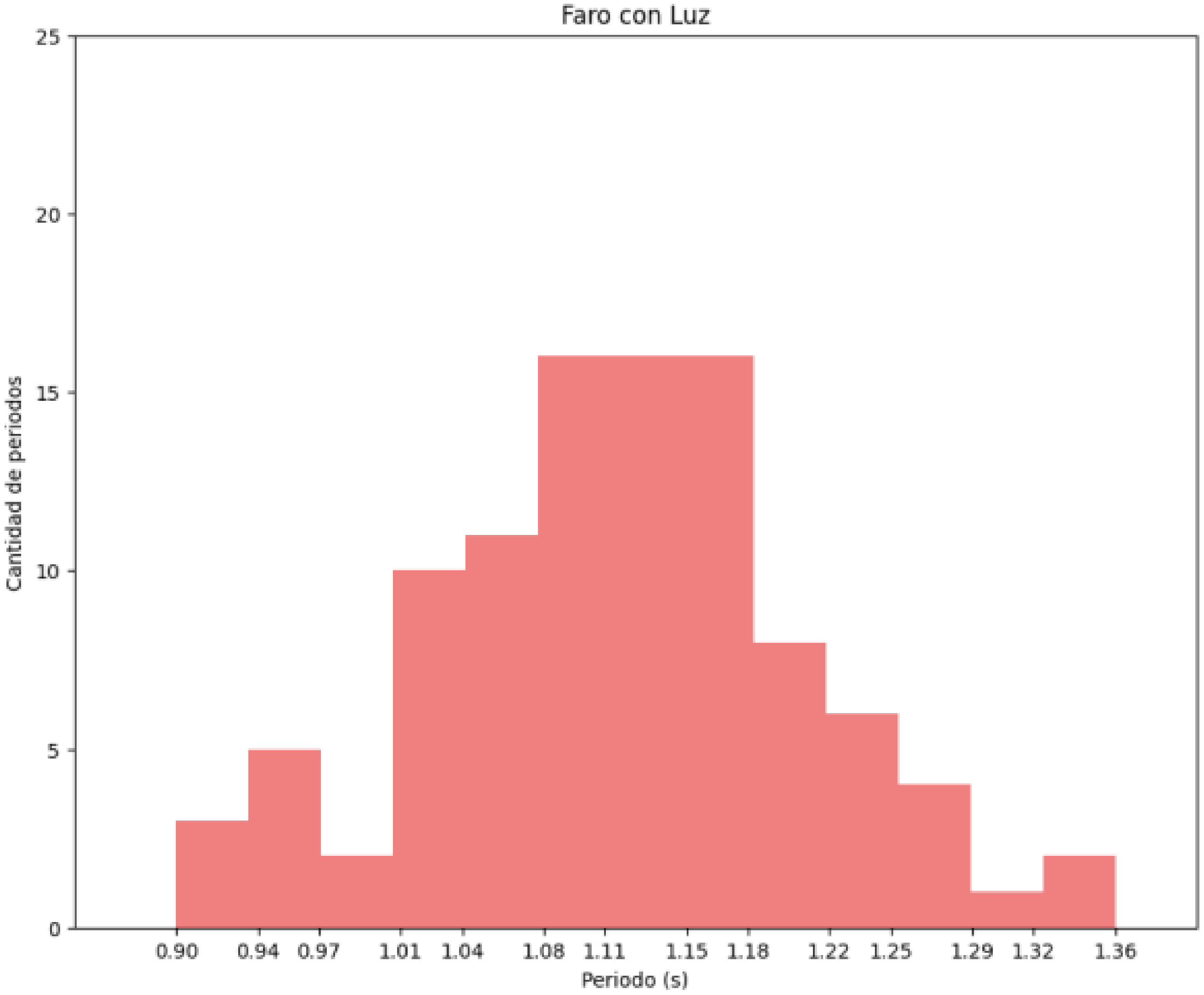
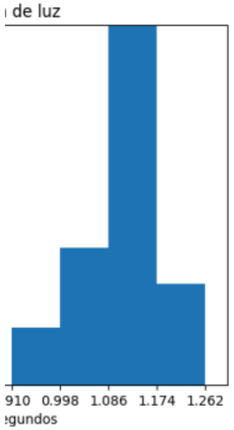


Fig.1 faro cronometrando los destellos de luz emitidos.



Histograma de la luz del faro medida con un cronómetro

Promedio: 1.11s
Desviación estándar: 0.109s

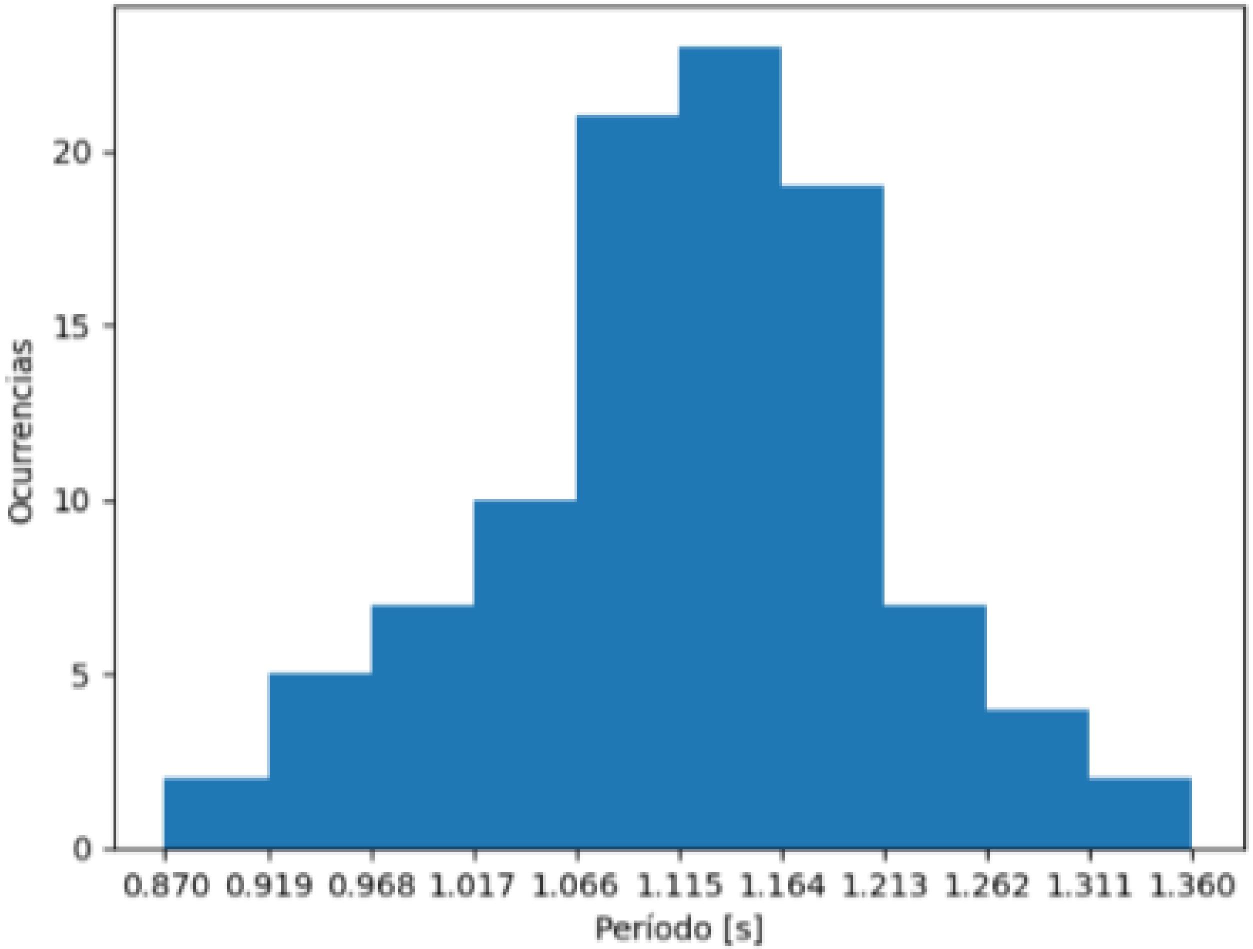


Figura 1: Histograma de la medición del período T de oscilación de un faro, mediante el registro del espaciado temporal entre destellos de luz por medio de un cronómetro de celular, desde la tercera fila de mesas del Laboratorio de Mecánica. El período promedio obtenido fue $\langle T \rangle = 1{,}12\,s$ y la desviación estándar $\sigma_x = 0{,}095\,s$.

Objetivos de la clase de hoy

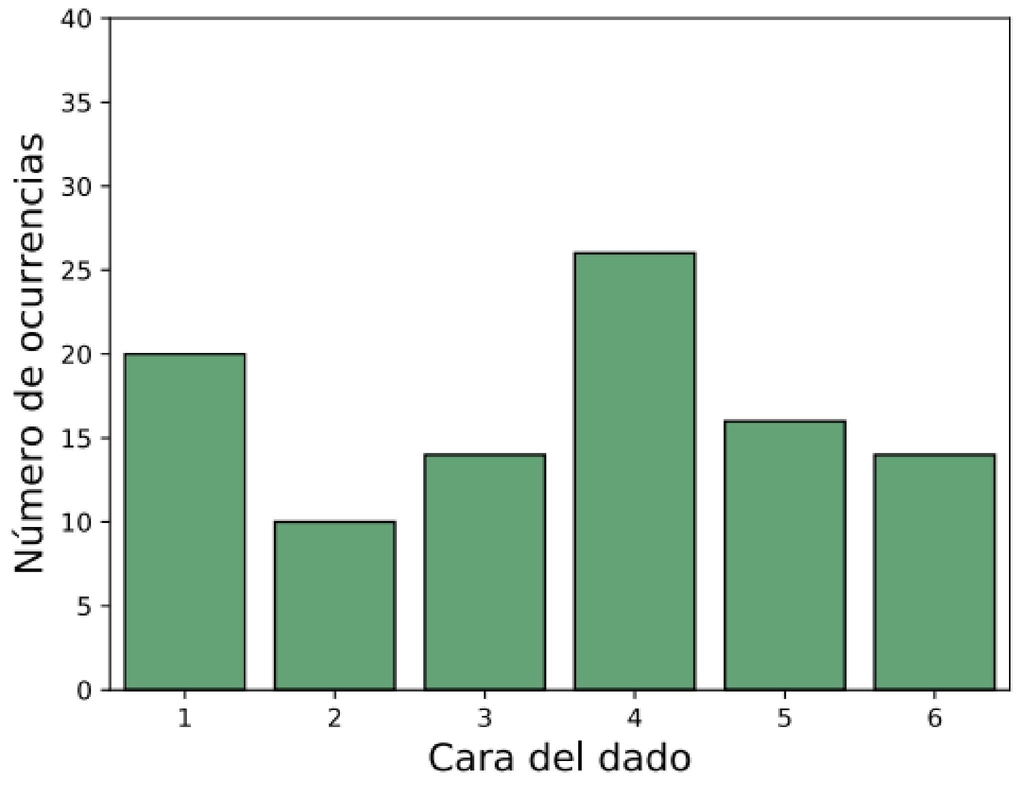
Determinar la incerteza absoluta Δx de medidas aleatorias

Comprender y visualizar la teoría (estadística) a partir de un experimento de un péndulo simple.

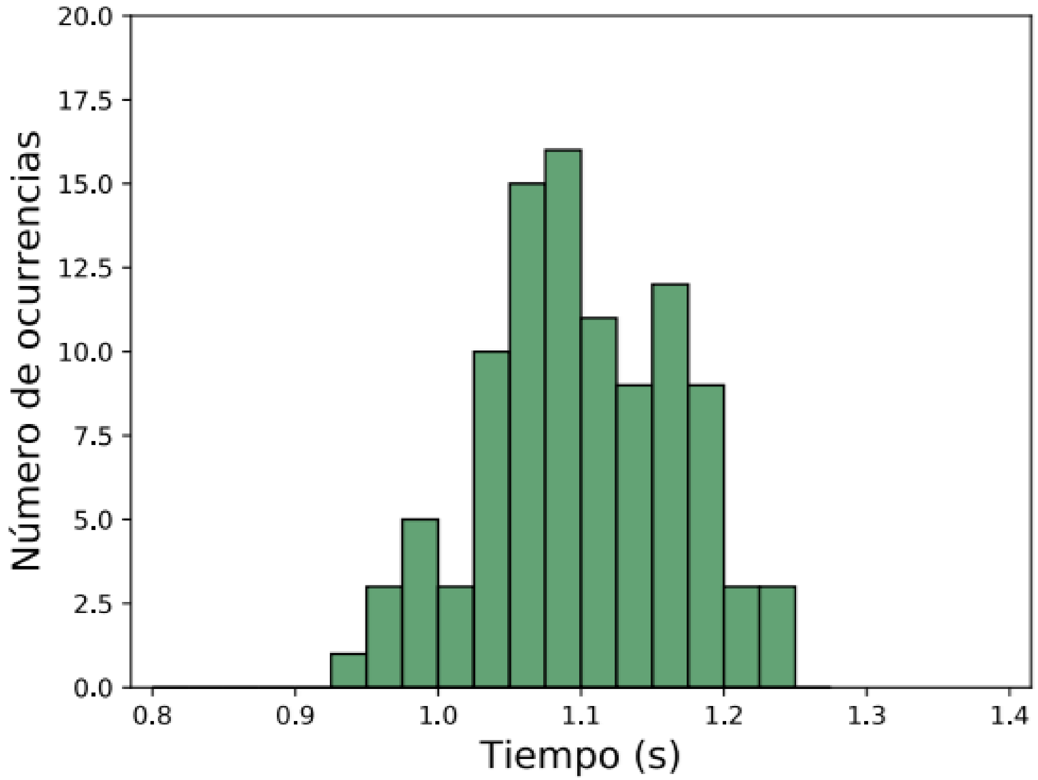
Obtener el resultado del período del péndulo y del período del faro

Resultados de un experimento: histograma

Tirar un dado N = 100 veces



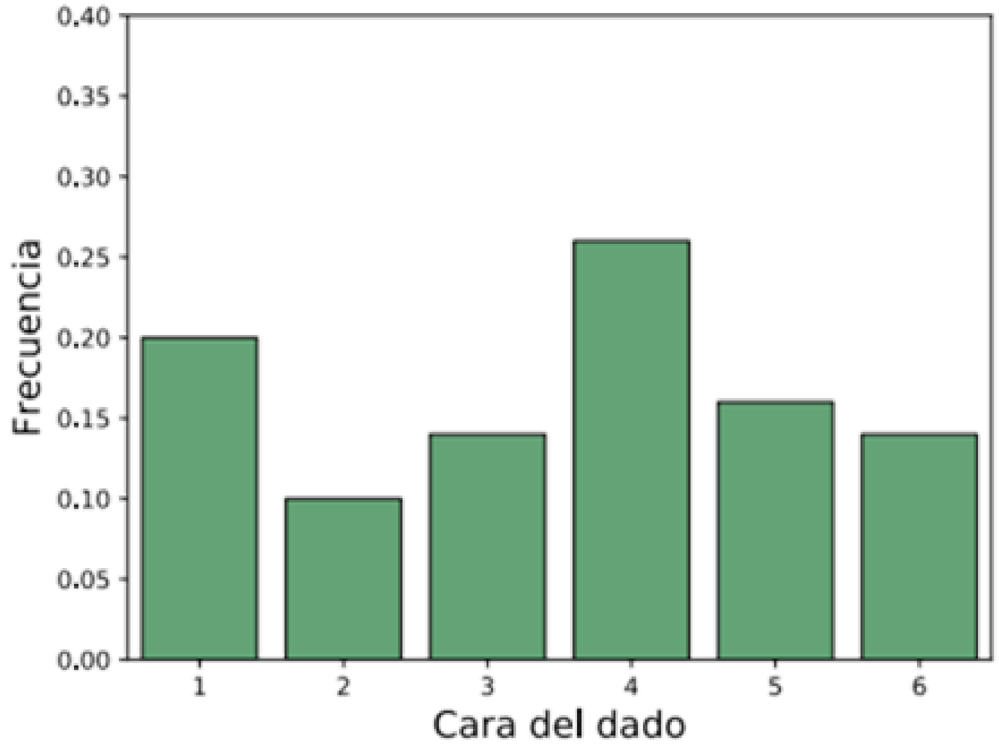
Medir el período de un faro N = 100 veces



Histograma normalizado

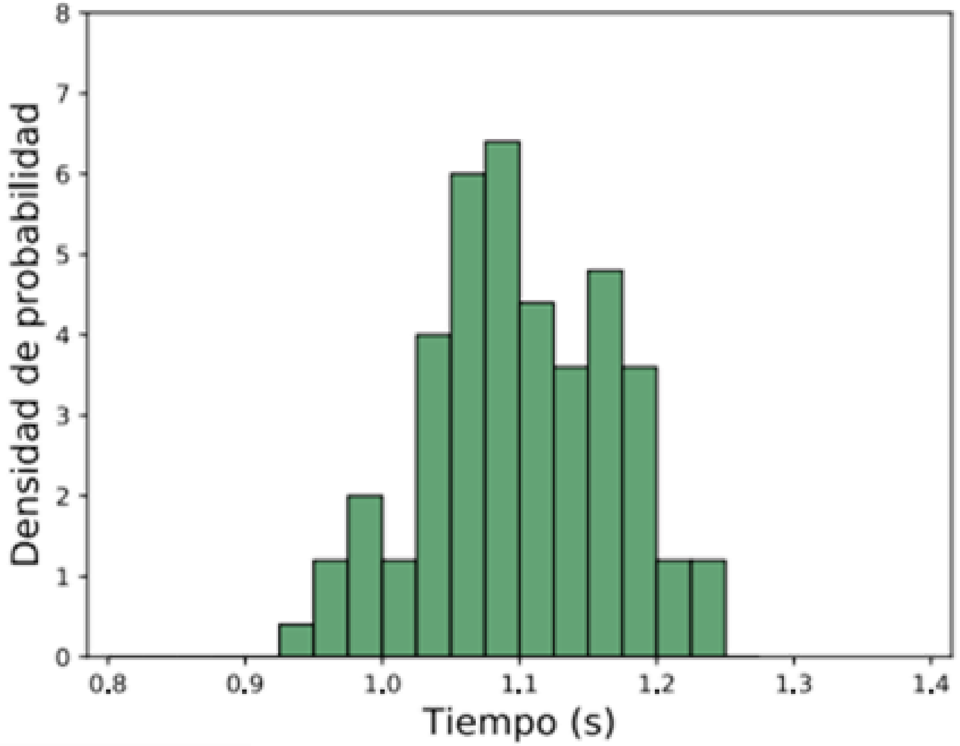
F_k = frecuencia del resultado k-ésimo
n_k = número de resultados en el bin k-ésimo
d_k = densidad de probabilidad del bin k-ésimo
a = tamaño del bin (bin size)
N = número total de eventos

Tirar un dado N = 100 veces



$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

Medir el período de un faro N = 100 veces

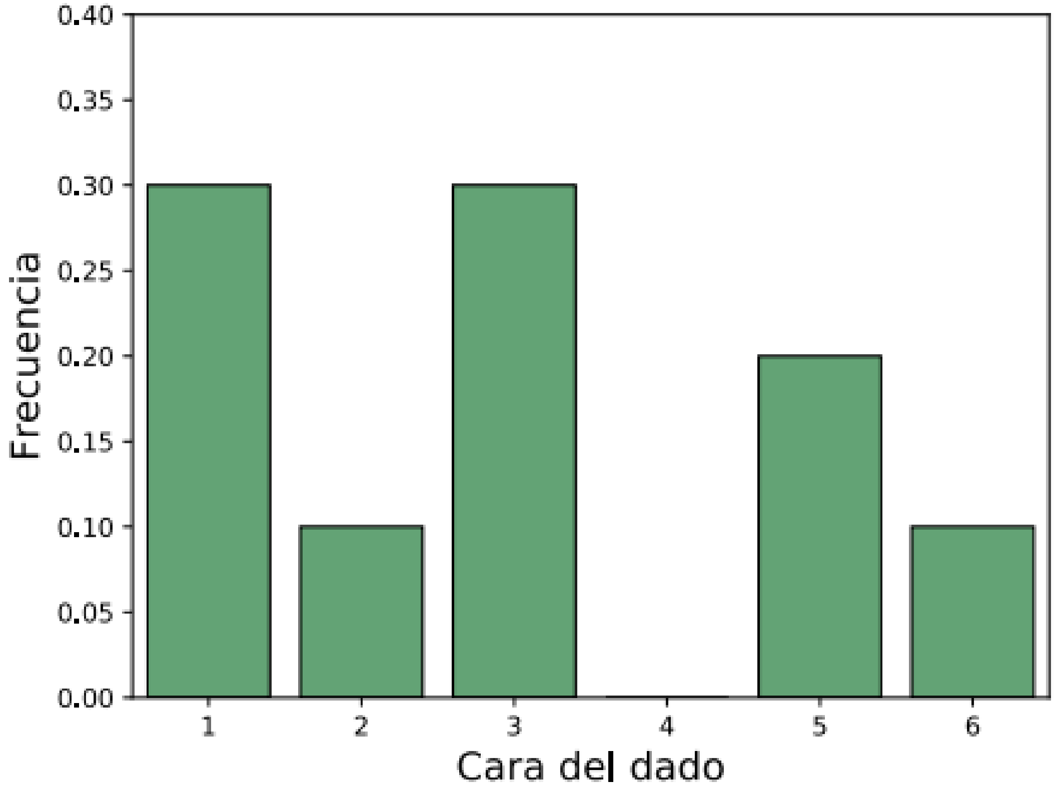


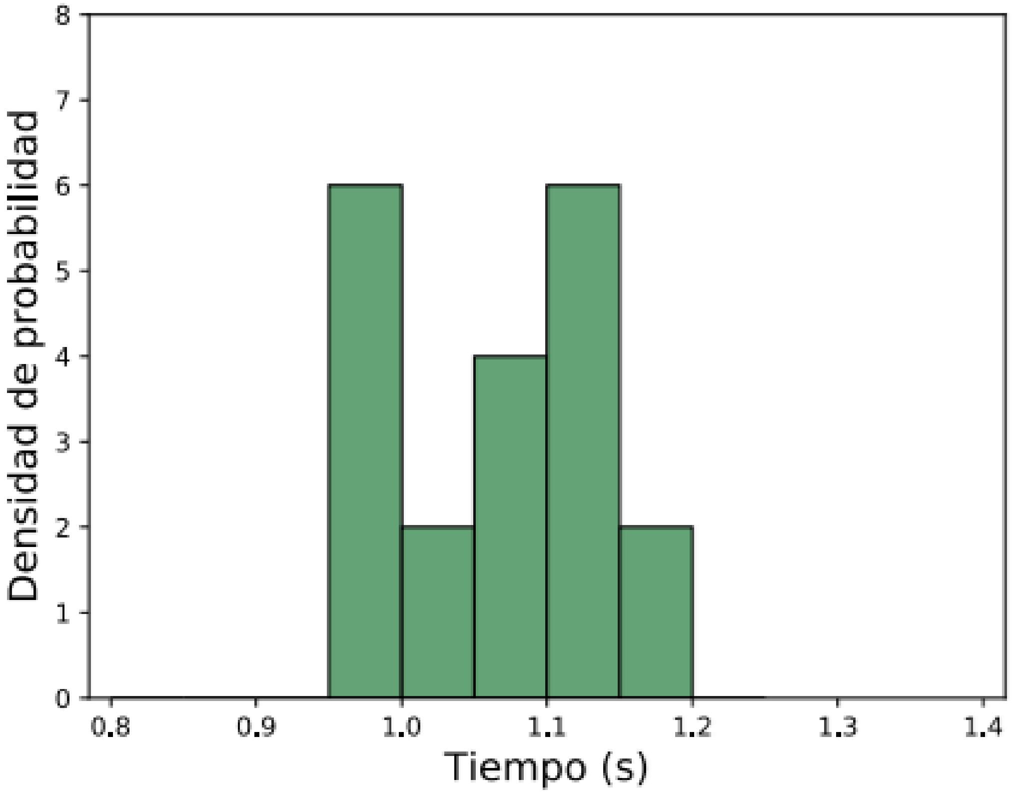
$$\boxed{\text{Normalización:} \quad \sum_k F_k = 1}$$

$$F_k = d_k\, a \quad \text{con} \quad d_k = \frac{n_k}{a\,N}$$

Distribución de probabilidad

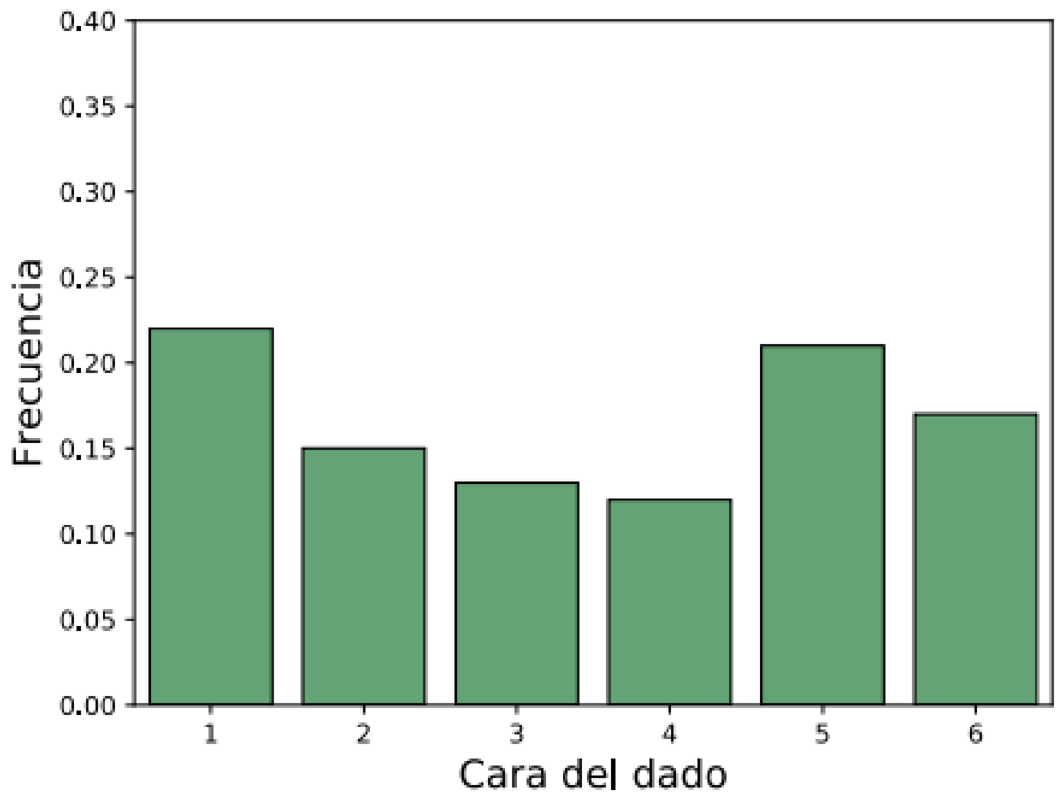
N = 10

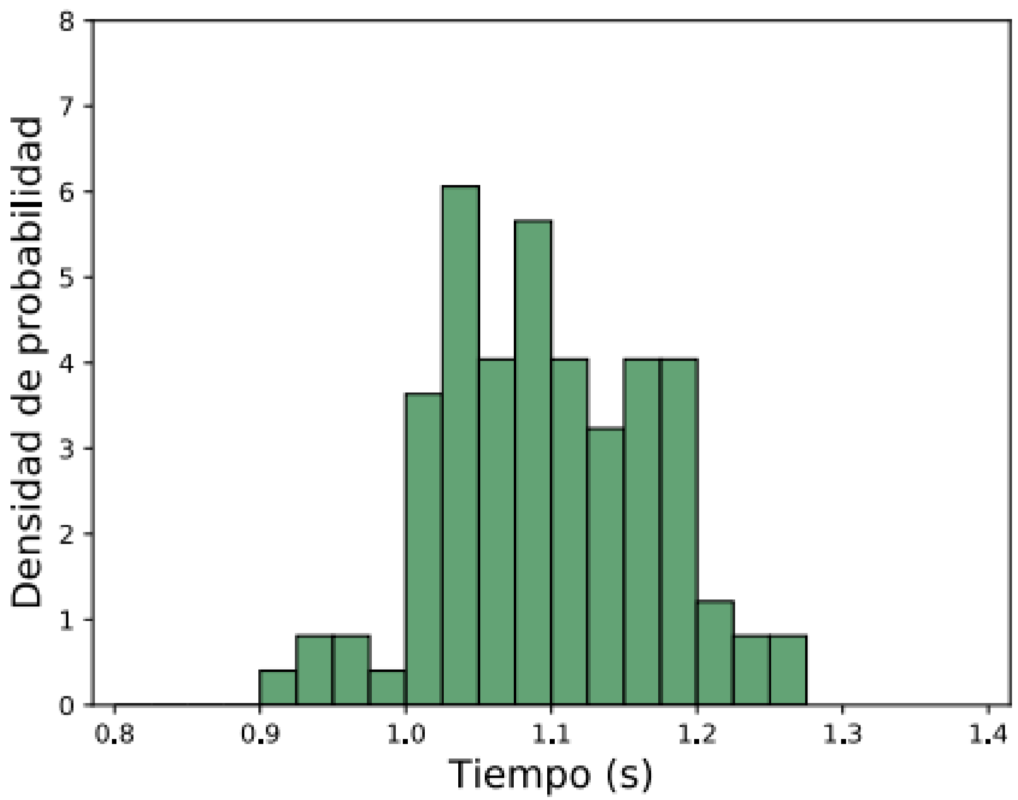




Distribución de probabilidad

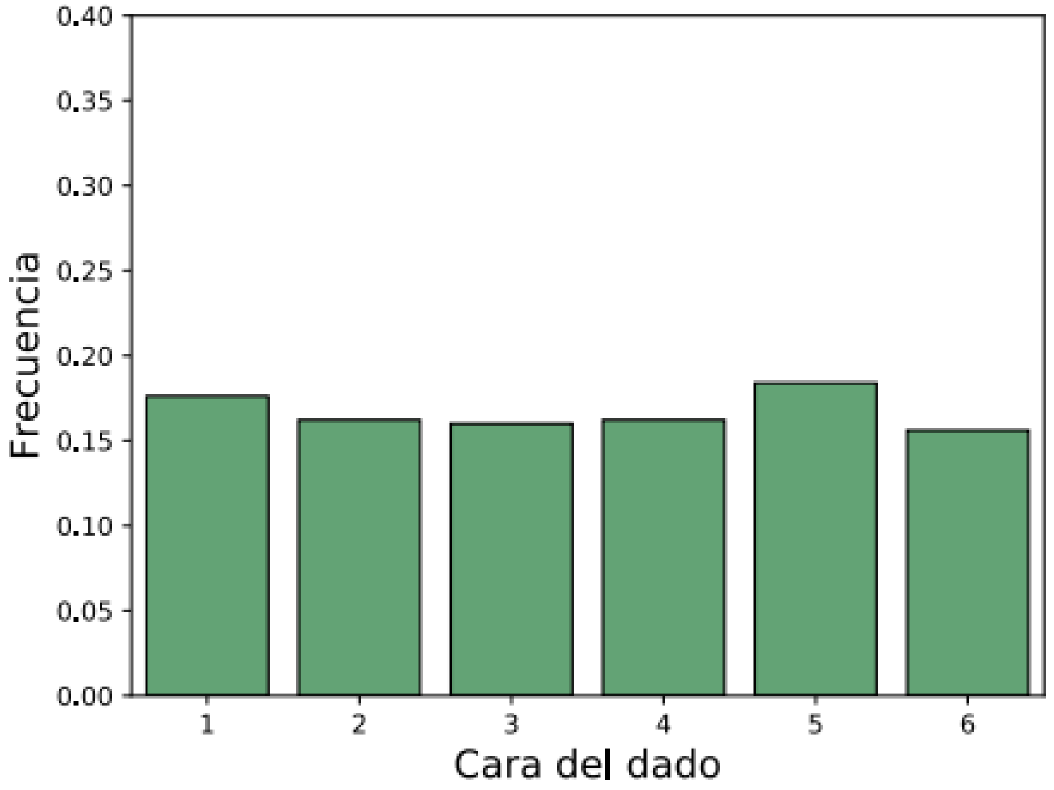
N = 100

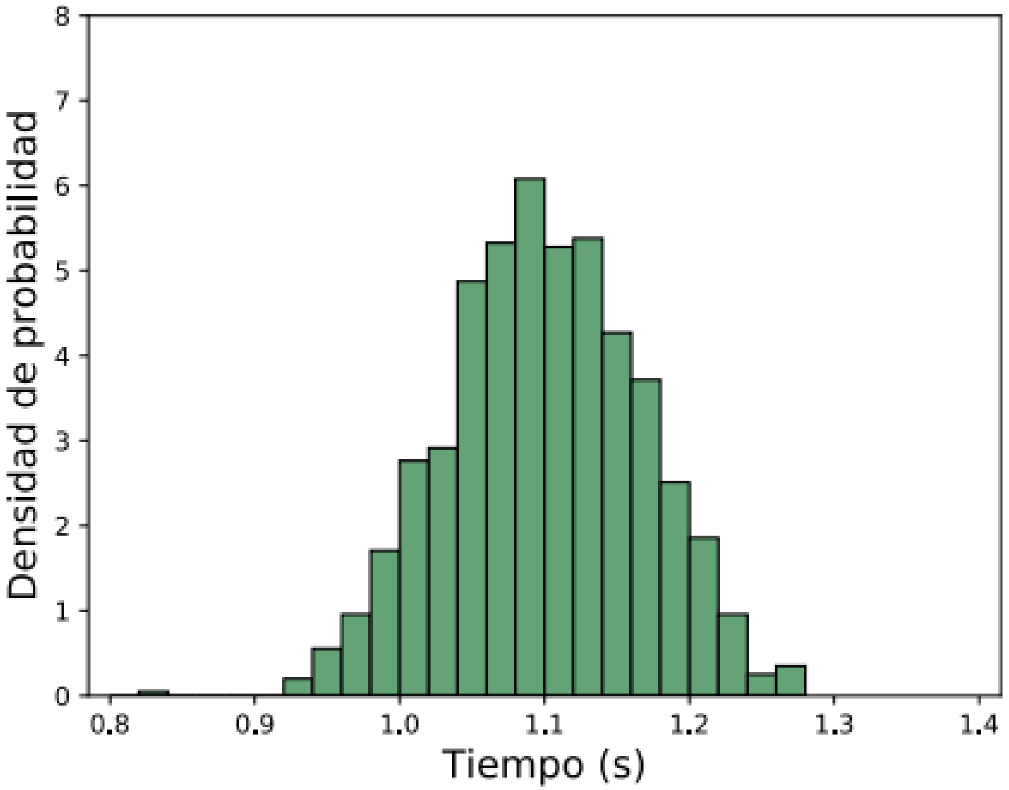




Distribución de probabilidad

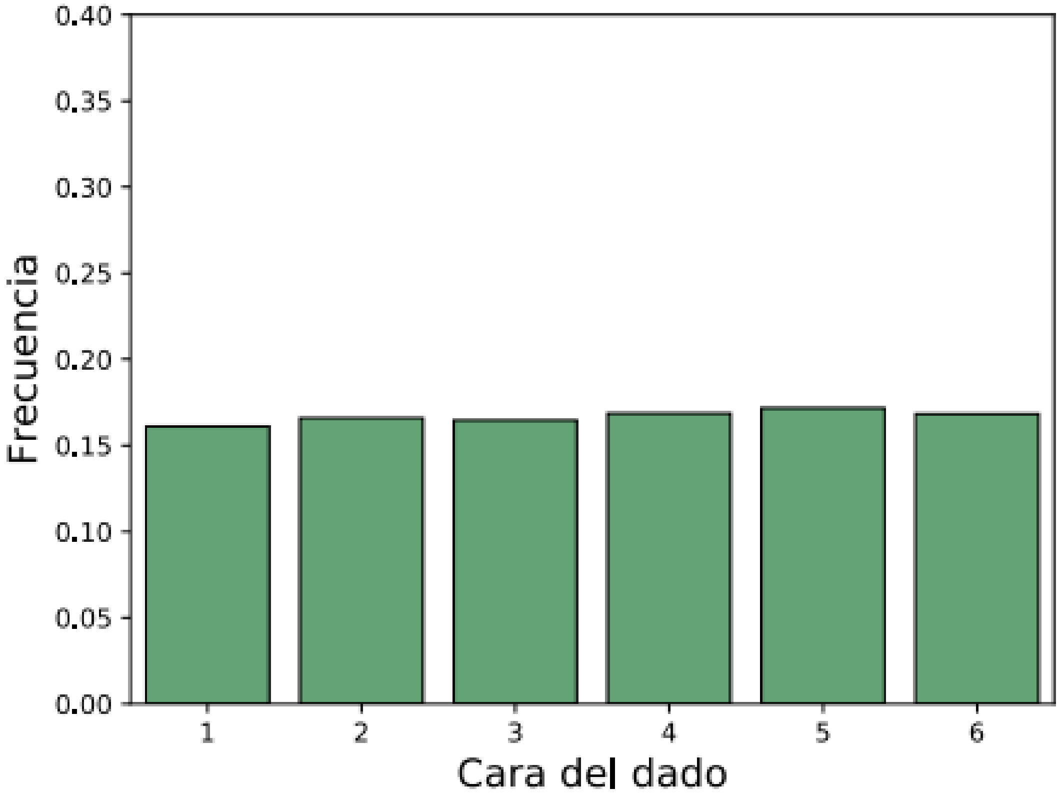
N = 1000

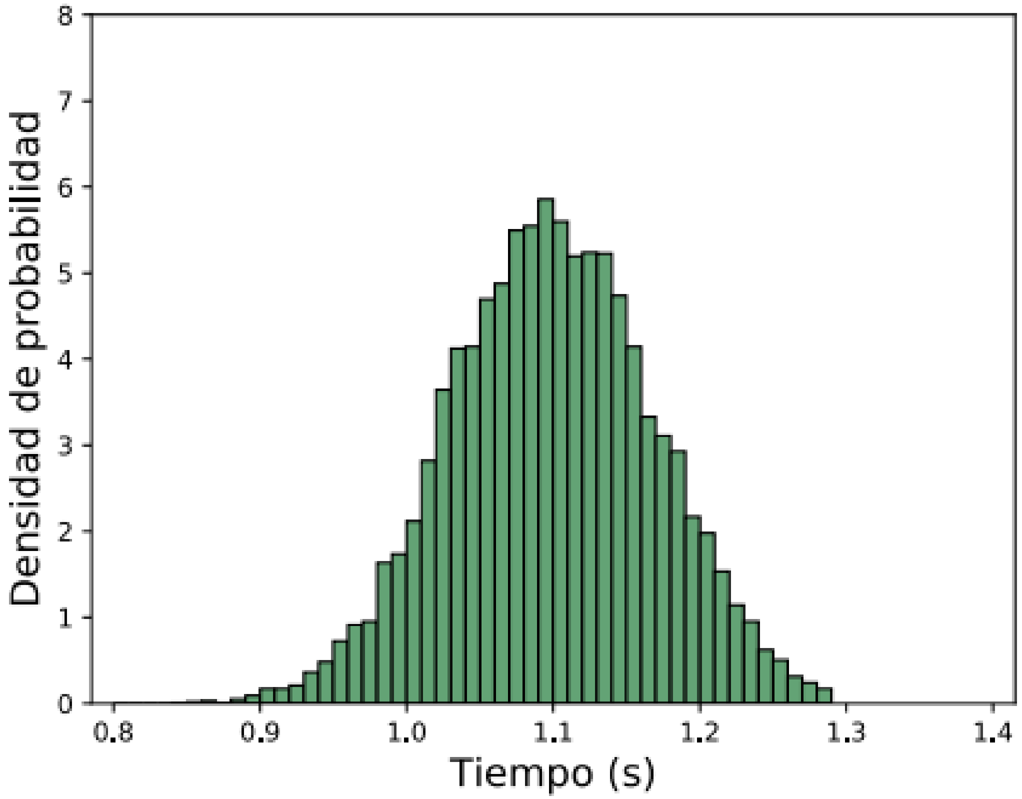




Distribución de probabilidad

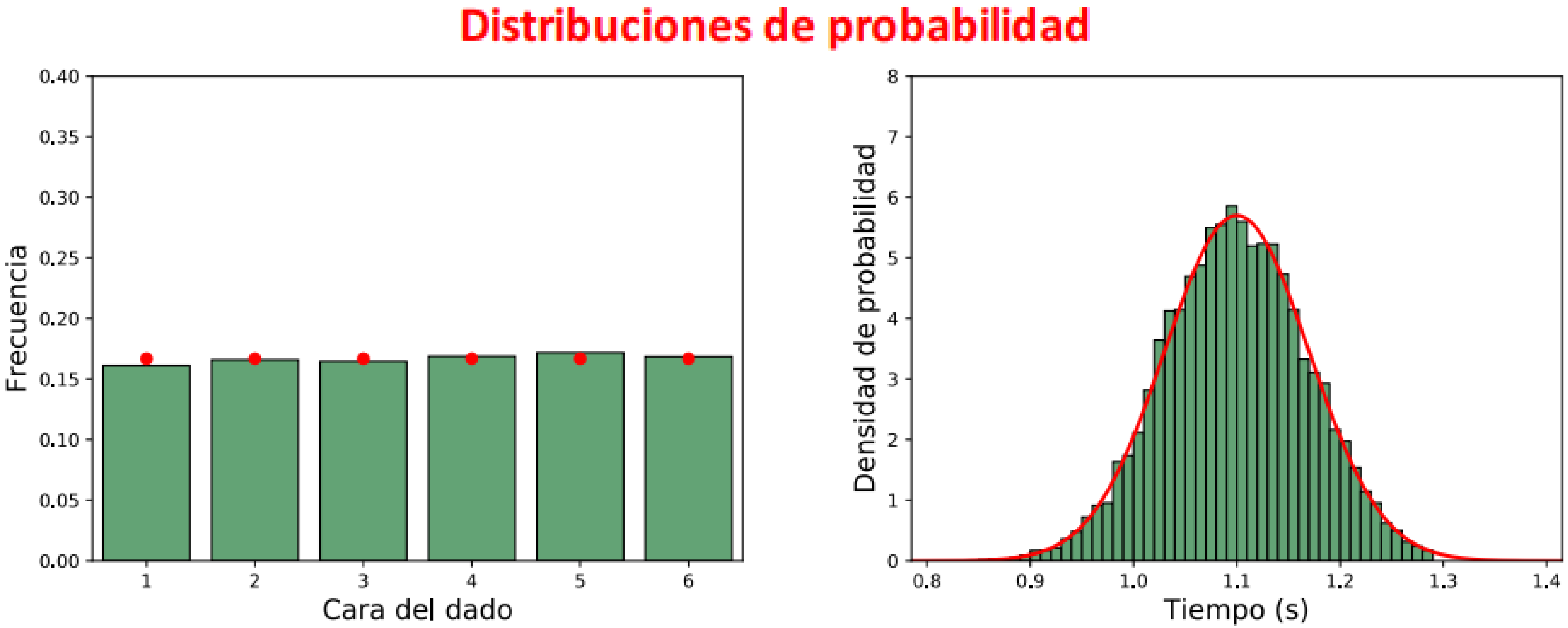
N = 10000





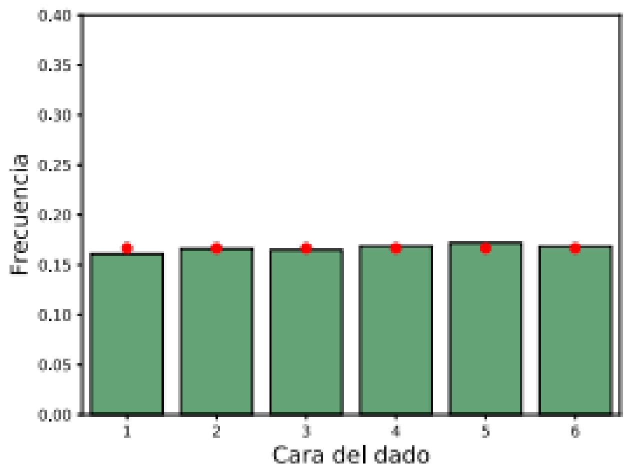
Distribución de probabilidad

N = 10000



Distribuciones de probabilidad discreta y continua

Discreto

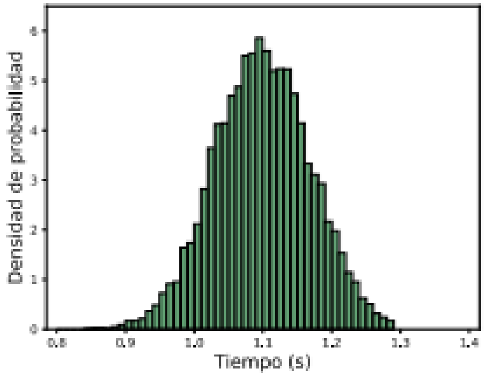


$$F_k \underset{N\to\infty}{\rightarrow} P_k$$

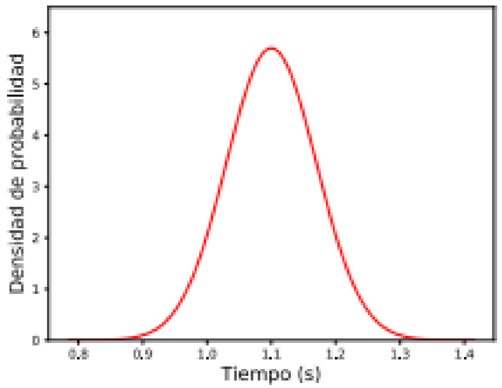
$$\sum_k P_k = 1$$

$$\boxed{F_k = \frac{n_k}{N}}$$

Continuo



$$\xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ a \to 0}]{}$$



$$F_k \rightarrow f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Condición de normalización

a: bin size

$$\boxed{F_k = d_k\, a \quad \text{con} \quad d_k = \frac{n_k}{a\, N}}$$

Valor medio, varianza y desviación estándar

	Caso discreto	Caso continuo
Valor medio	$E(X) = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k = \sum_k x_k F_k$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
Varianza	$VAR(X) = \frac{1}{N}\sum_k n_k (x_k - \bar{X})^2 = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$	$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx$

Desviación estándar $SD(X) = \sqrt{VAR(X)}$

Notaciones

$$E(X) \equiv \langle X \rangle \equiv \bar{X}$$

$$VAR(X) \equiv \sigma^2$$

$$SD(X) \equiv \sigma$$

X: variable aleatoria (ej: resultado de una medición)

x_k: resultado k-ésimo

x: resultado continuo — x es análogo a x_k

F_k: frecuencia del resultado x_k — *f(x)dx* es análogo a F_k

f(x): densidad de probabilidad del resultado x

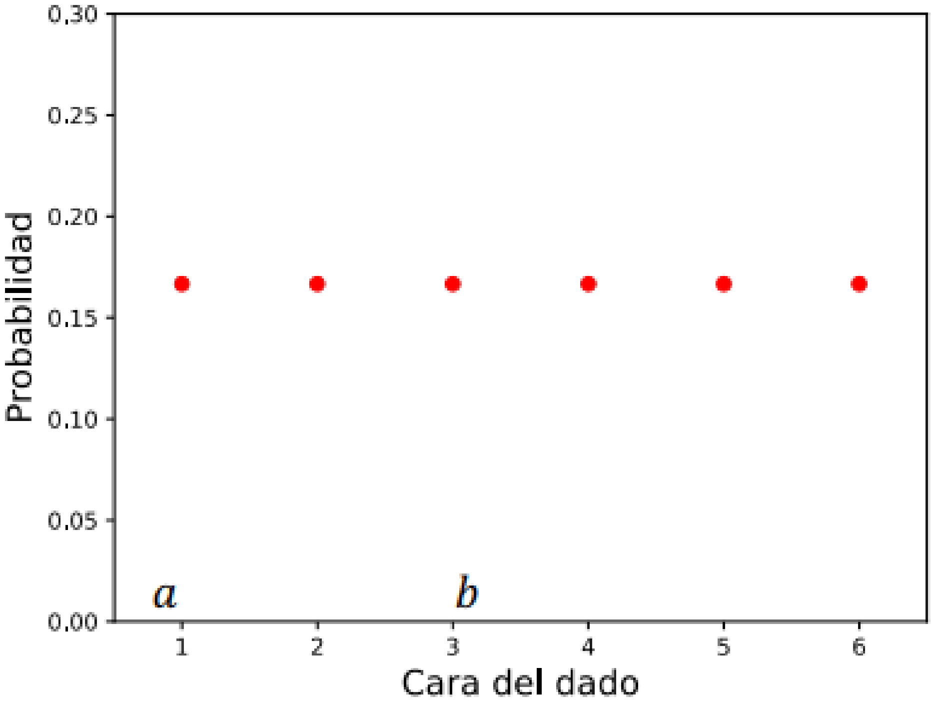
N: número total de resultados (ej: mediciones)

n_k: número de veces que se obtuvo x_k

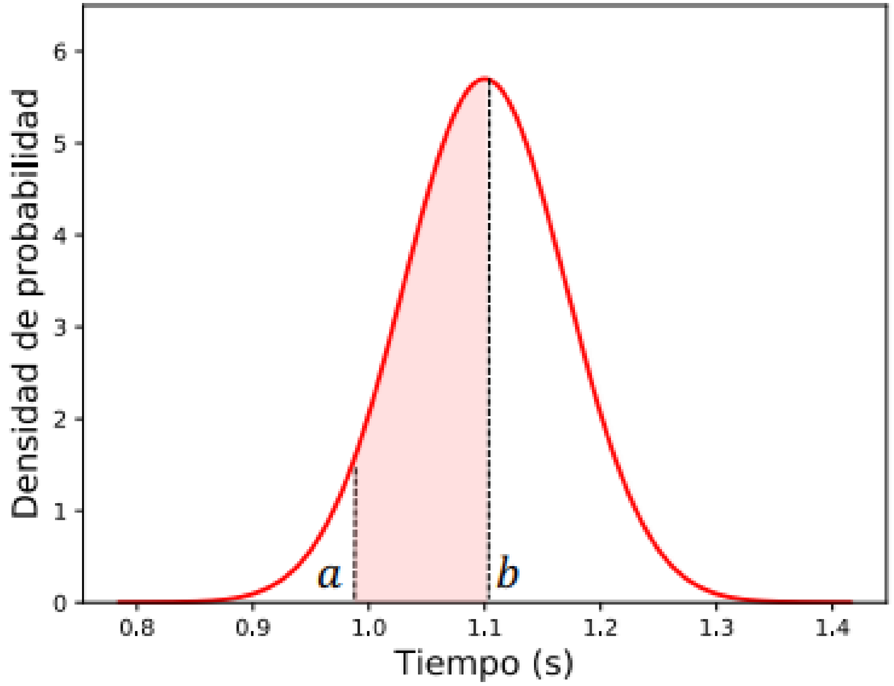
Cálculo de probabilidad en un cierto intervalo

¿Cuál es la probabilidad de que una medición esté comprendida entre a y b?

¿Tiene sentido preguntarse cuál es la probabilidad de medir un cierto *número real*?



$$Prob\,(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} P_k$$

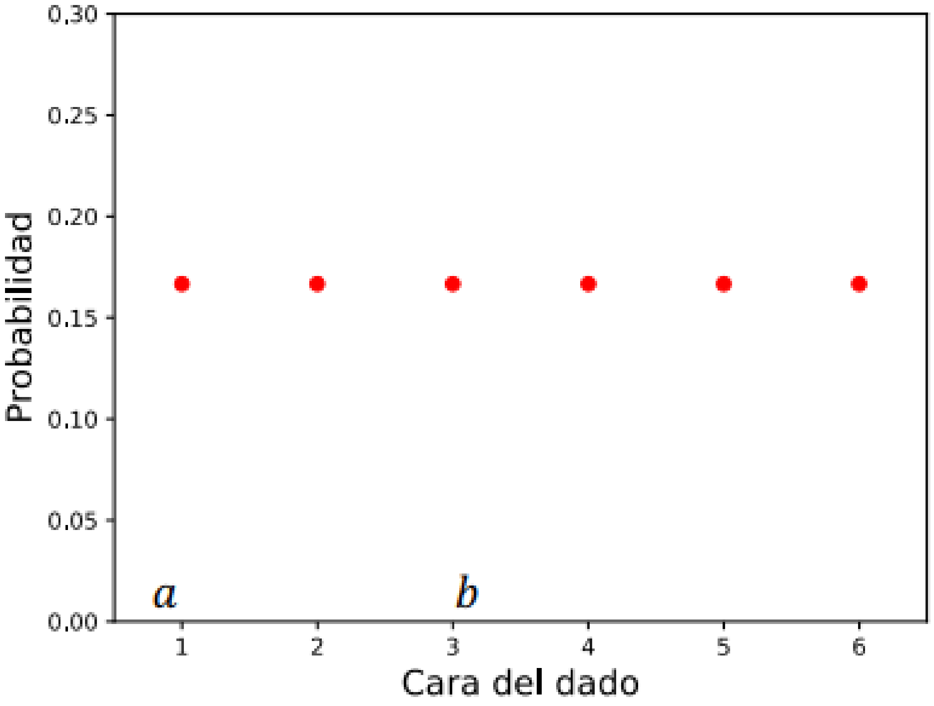


$$Prob\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Cálculo de probabilidad en un cierto intervalo

¿Cuál es la probabilidad de que una medición esté comprendida entre a y b?

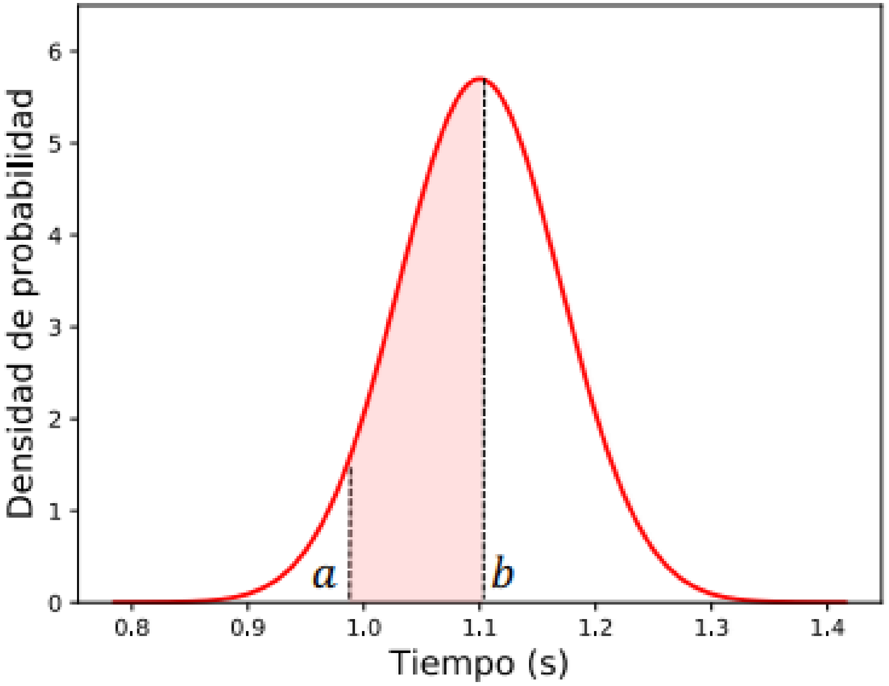
Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad que al tirar el dado salga 3 o menor que 3?



ej: $$Prob\,(1 \leq X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} P_k = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 0,50$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad que al medir el período del faro el cronómetro indique entre 1,0 y 1,1 s?

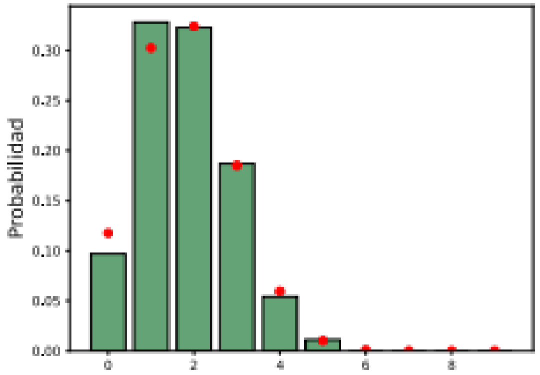
¿Tiene sentido preguntarse cuál es la probabilidad de medir un cierto *número real*?



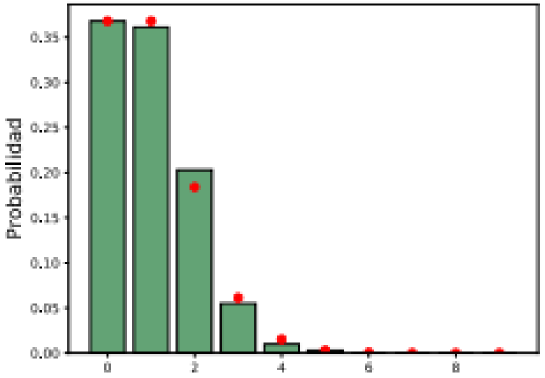
ej: $$Prob\,(1,0 \leq X \leq 1,1) = \int_{1,0}^{1,1} f(x)dx \approx 0,46$$

Ejemplos de distribuciones de probabilidad

Binomial

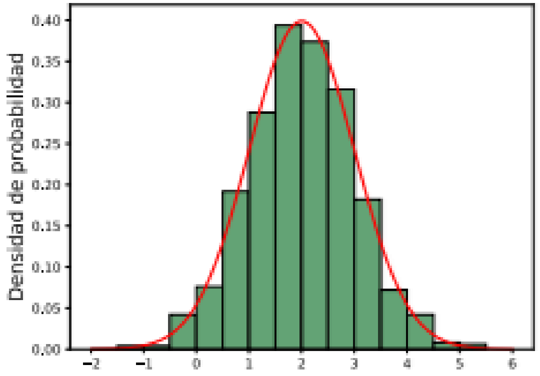


Poisson

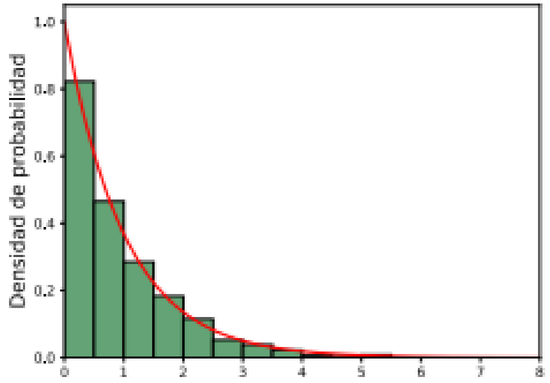


¡La de Gauss <u>no es la única</u> distribución de probabilidad!

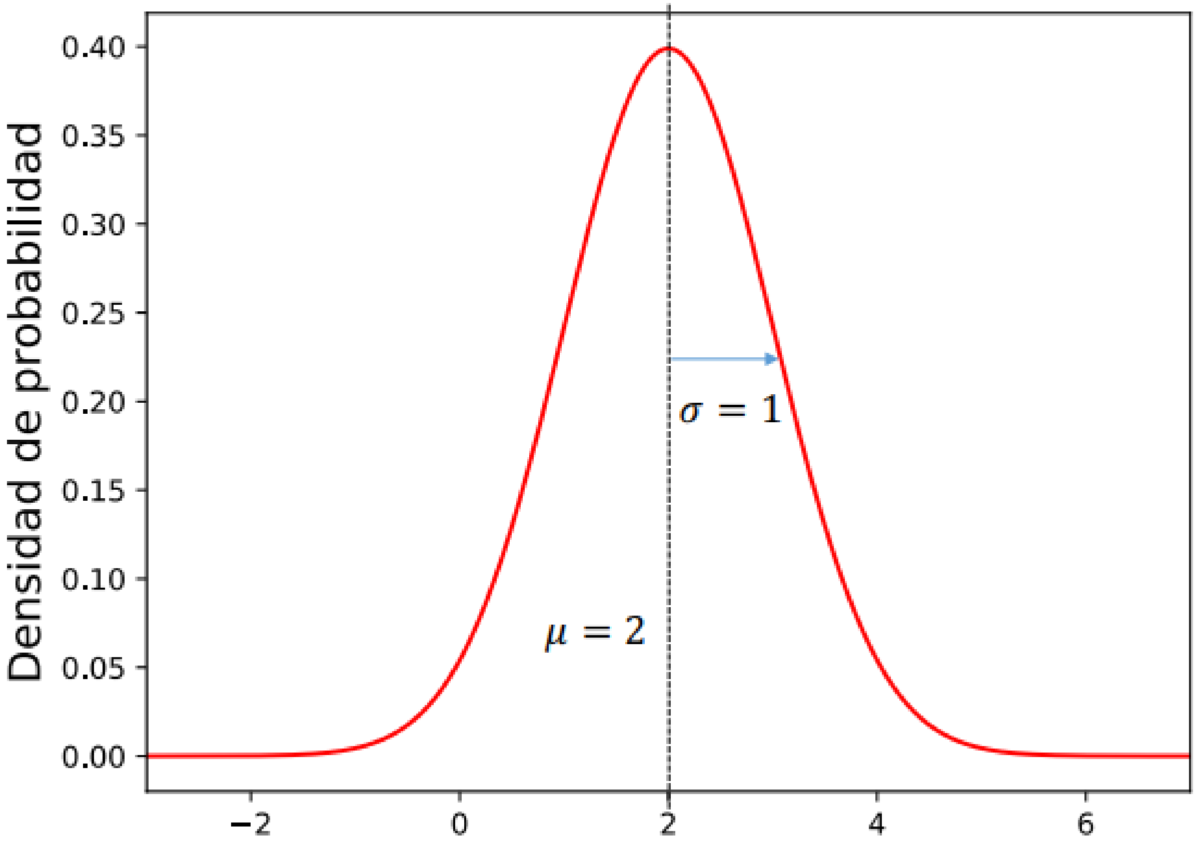
Gauss



Exponencial



Distribución de Gauss

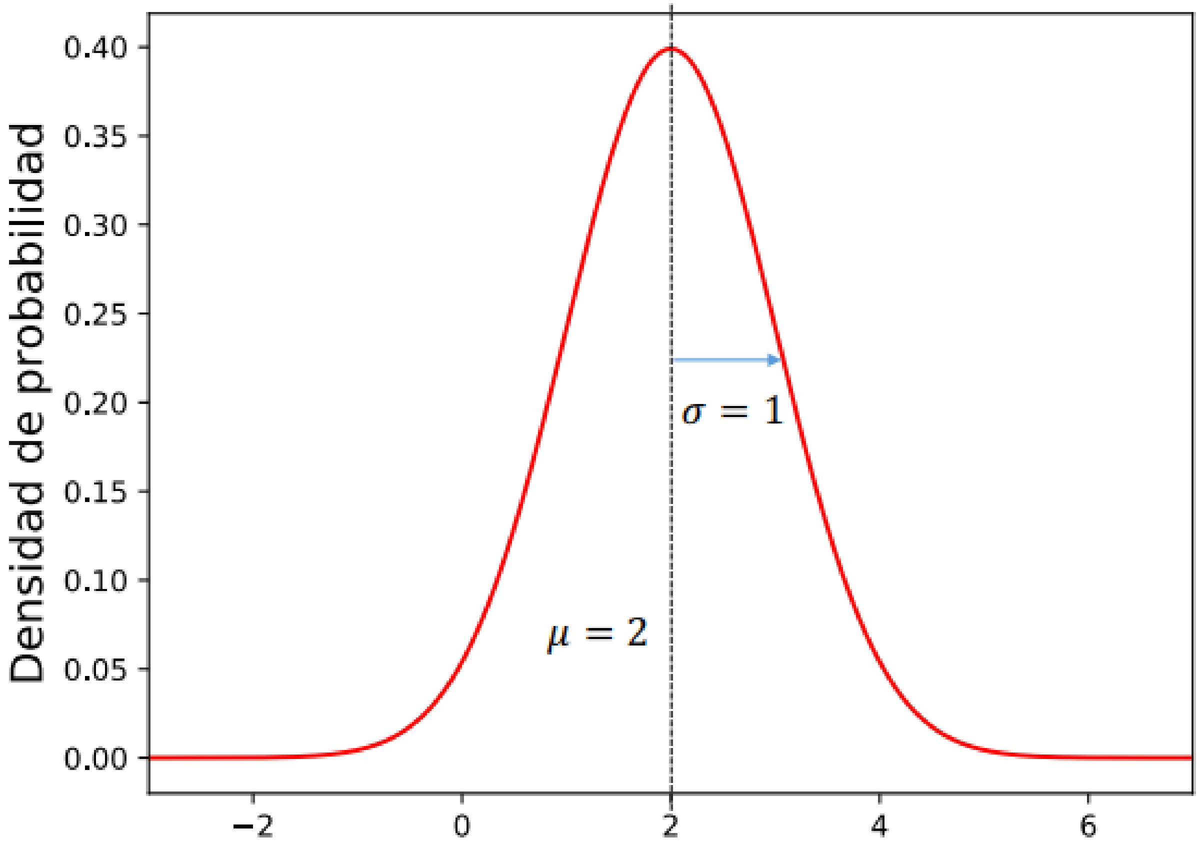


La distribución de Gauss es una buena *aproximación* para muchísimos casos*

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

* Ver *Teorema central del límite*

Distribución de Gauss



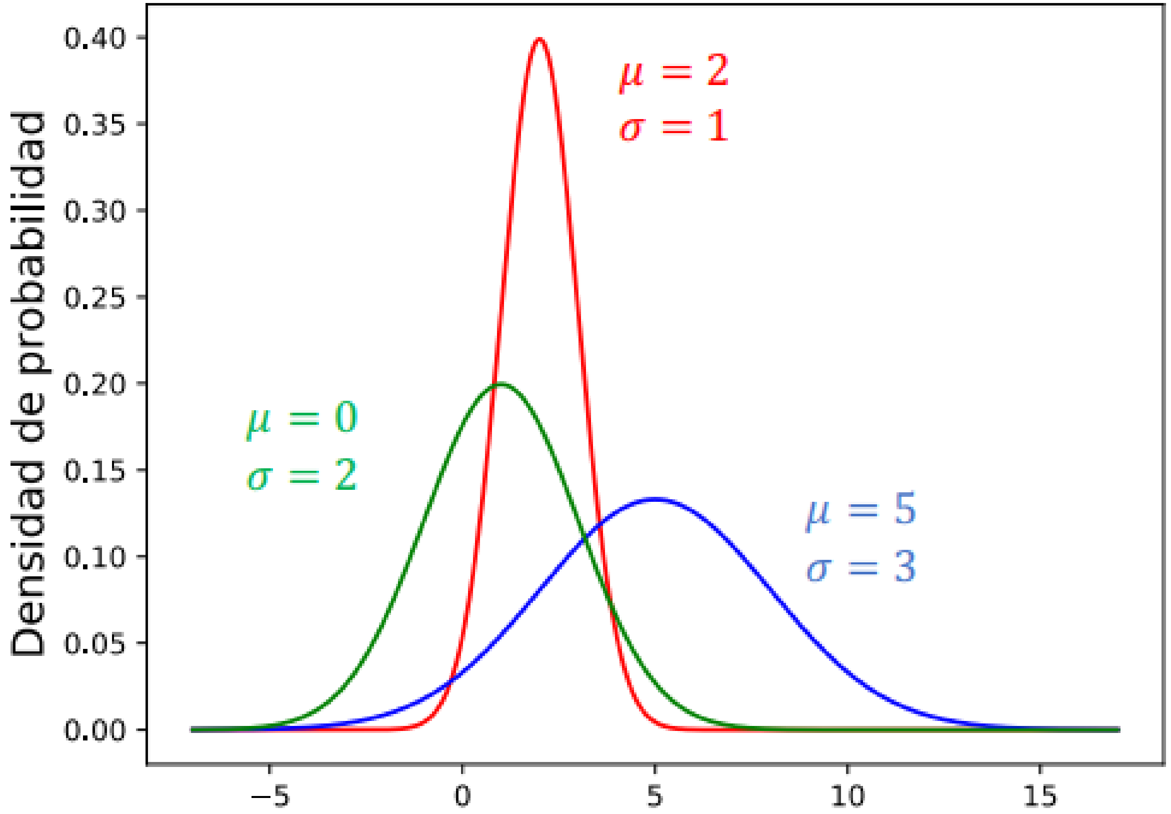
La distribución de Gauss es una buena *aproximación* para muchísimos casos*

$$\boxed{G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu,\sigma}(x)dx = 1$$

Distribución de Gauss: algunas propiedades

- Está centrada en $x = \mu$
- Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$
- El parámetro σ da una medida de su ancho



$$\boxed{G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

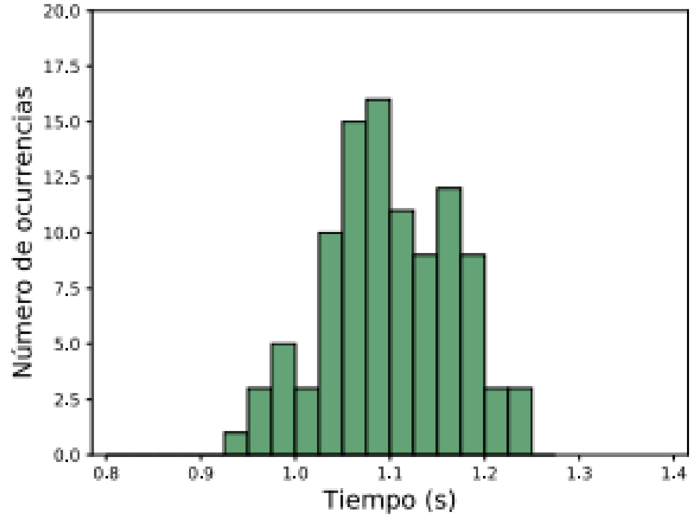
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu,\sigma}(x)dx = 1$$

Estadística

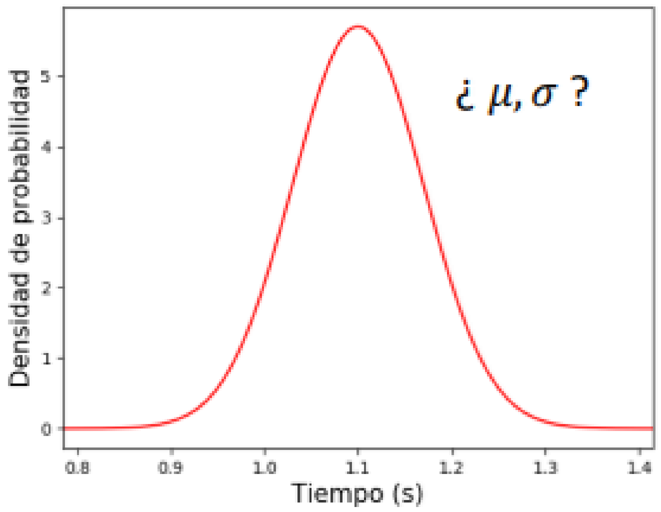
por ejemplo μ y σ de la gaussiana

Objetivo: *estimar* los parámetros de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria a partir de los datos.

Datos obtenidos



¿De qué distribución de probabilidad provienen mis datos?

¿  ?

Estimación de los parámetros de la distribución de Gauss

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i \longrightarrow E(X) = \mu$$

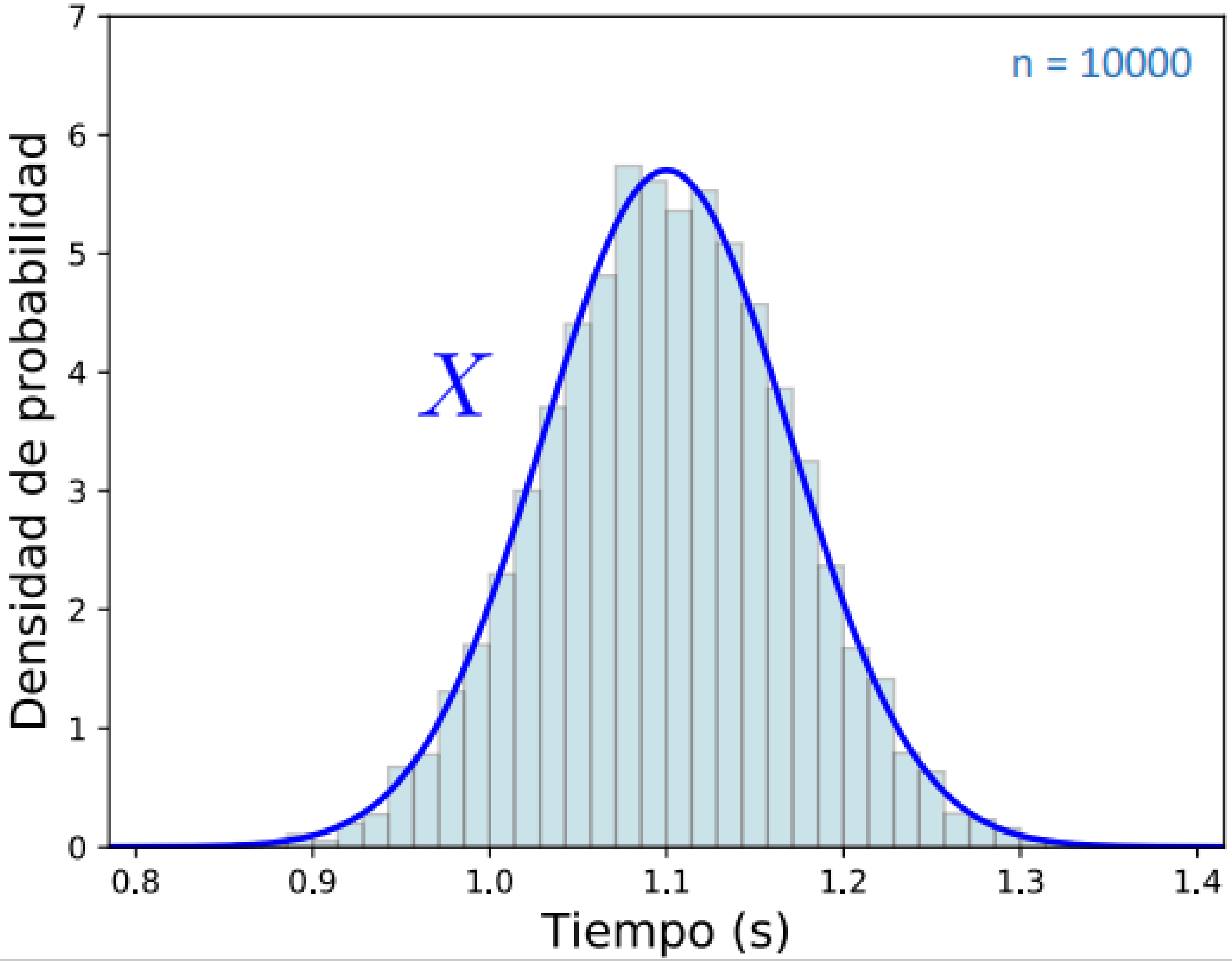
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i} (x_i - \bar{X}_n)^2 \longrightarrow VAR(X) = \sigma^2$$

Son *estimadores*: funciones de los datos medidos x_i

Parámetros desconocidos de la distribución de Gauss

n: cantidad de mediciones de la variable aleatoria X realizadas

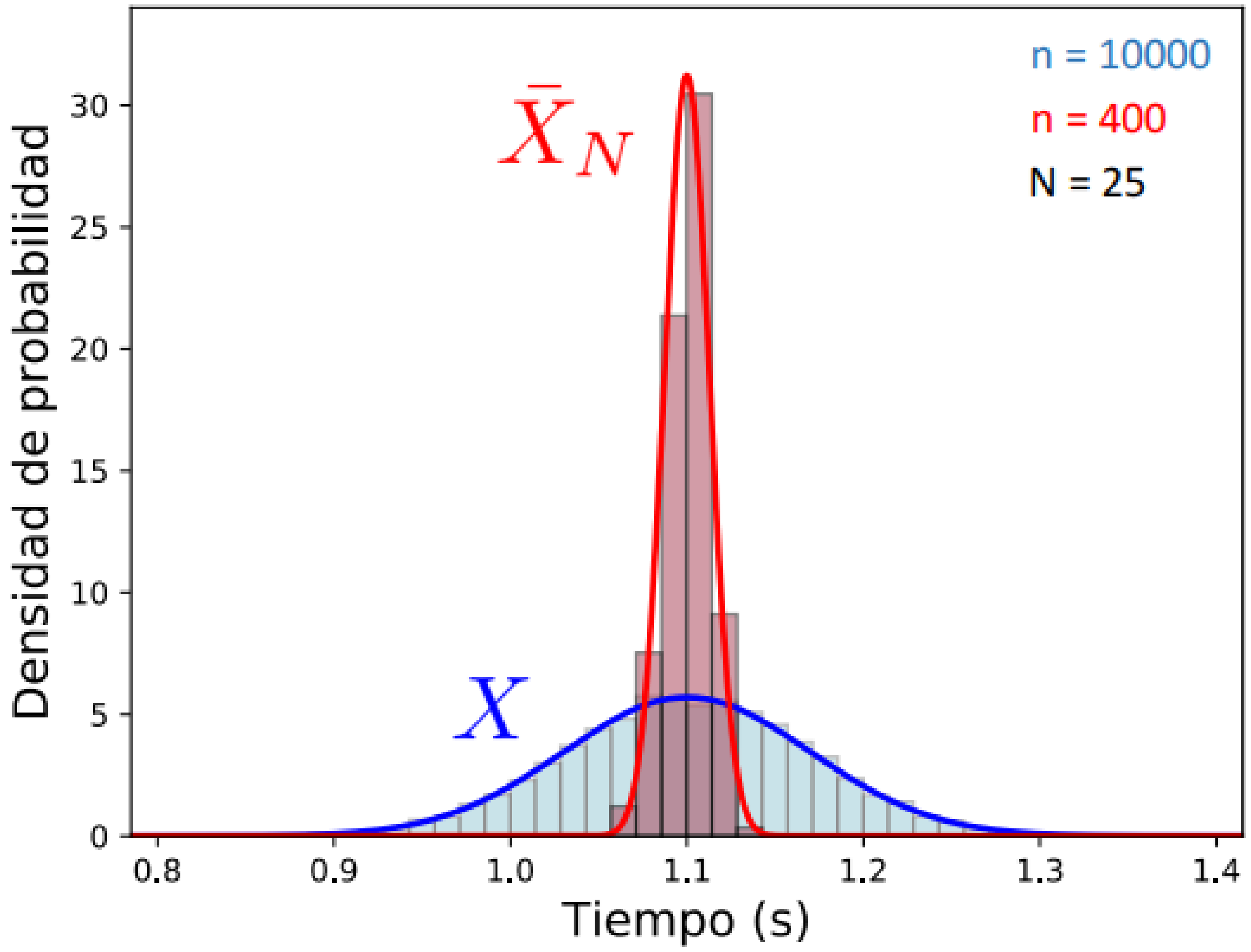
Distribución de la variable aleatoria "una medición"



$$\langle X \rangle = 1,100\ s$$

$$\sigma_X = 0,070\ s$$

Distribución de la variable aleatoria "promedio de N mediciones"



$$\langle X \rangle = 1,100\ s$$ promedio de X

$$\sigma_X = 0,070\ s$$ desv. estándar de X

$$\langle \bar{X}_N \rangle = 1,100\ s$$ promedio de $\bar{X}_N$

$$\sigma_{\bar{X}_N} = 0,014\ s$$ desv. estándar de $\bar{X}_N$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}_N} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}}\ *$$

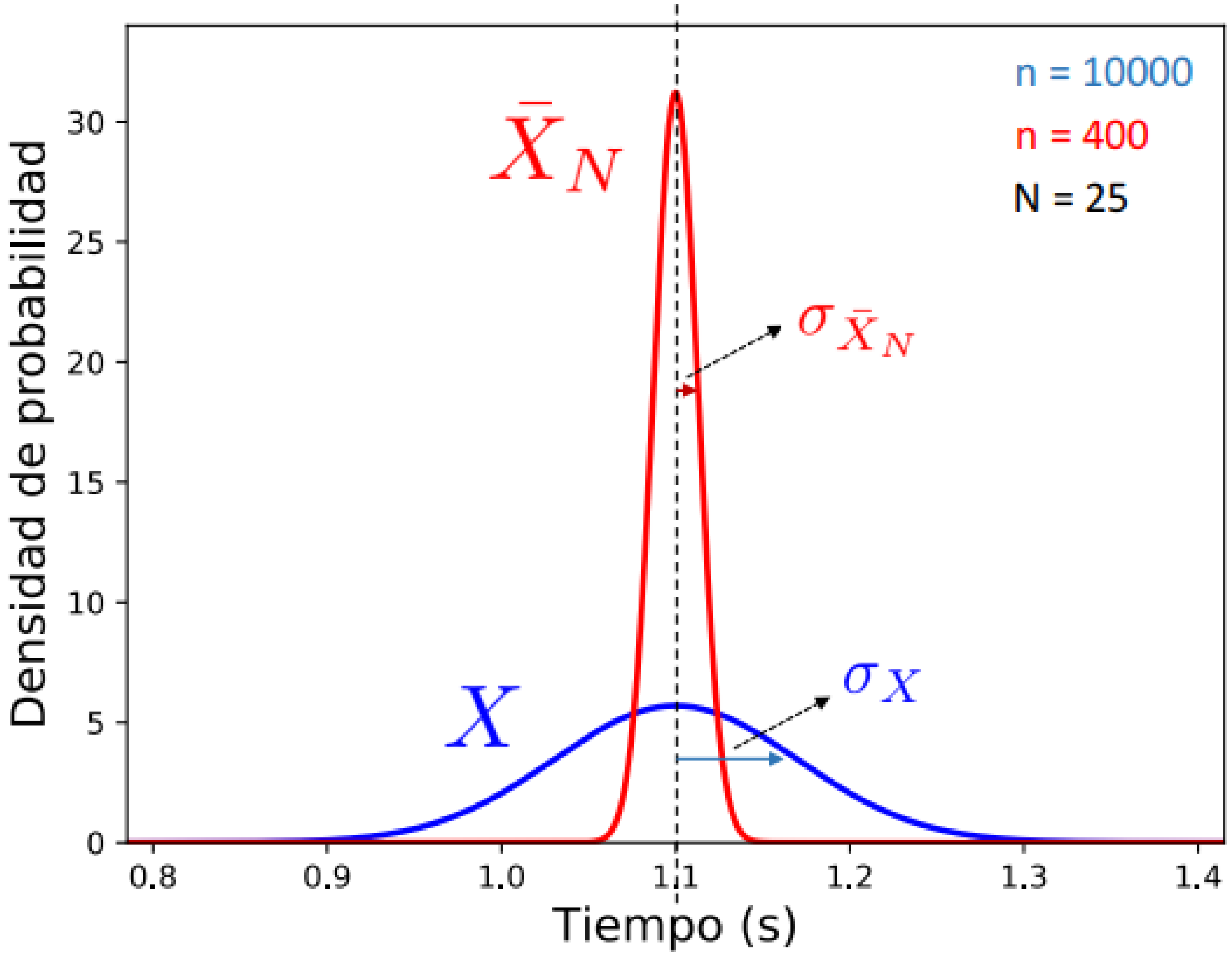
X : variable aleatoria "una medición"

$\bar{X}_N$: variable aleatoria "promedio de N mediciones"

n: número de cuentas en el histograma

* La demostración de este resultado general está en el apéndice

Distribución de la variable aleatoria “promedio de N mediciones”



$$\langle X \rangle = 1,100\ s$$ promedio de X

$$\sigma_X = 0,070\ s$$ desv. estándar de X

$$\langle \bar{X}_N \rangle = 1,100\ s$$ promedio de $\bar{X}_N$

$$\sigma_{\bar{X}_N} = 0,014\ s$$ desv. estándar de $\bar{X}_N$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}_N} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}}\ ^*$$

X : variable aleatoria “una medición”

$\bar{X}_N$: variable aleatoria “promedio de N mediciones”

n: número de cuentas en el histograma

* La demostración de este resultado general está en el apéndice

En general se mide 1 sola serie de N mediciones. Entonces, sabiendo como se va a comportar el valor medio de la serie de otro experimentador que mide la misma MF, con el mismo protocolo y con el mismo numero de datos, se escribe el resultado de mi serie de mediciones como:

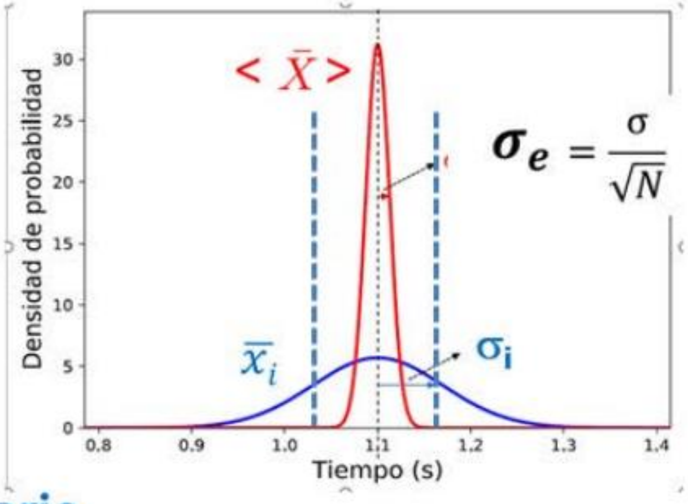
$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ \text{Unid}} \qquad \Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2} \qquad \sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Para una nueva muestra representativa, su valor de $\bar{x}$ tendrá

- ***Probabilidad de ~68%*** de encontrarse en $(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$
- ***Probabilidad de ~95%*** de encontrarse en $(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)$
- ***Probabilidad de ~99%*** de encontrarse en $(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)$

Dada una serie de N mediciones con un dado de $\overline{x}$ y un dado σ

¿Cual es el intervalo en el que hay un 68 % de probabilidades que se encuentre :



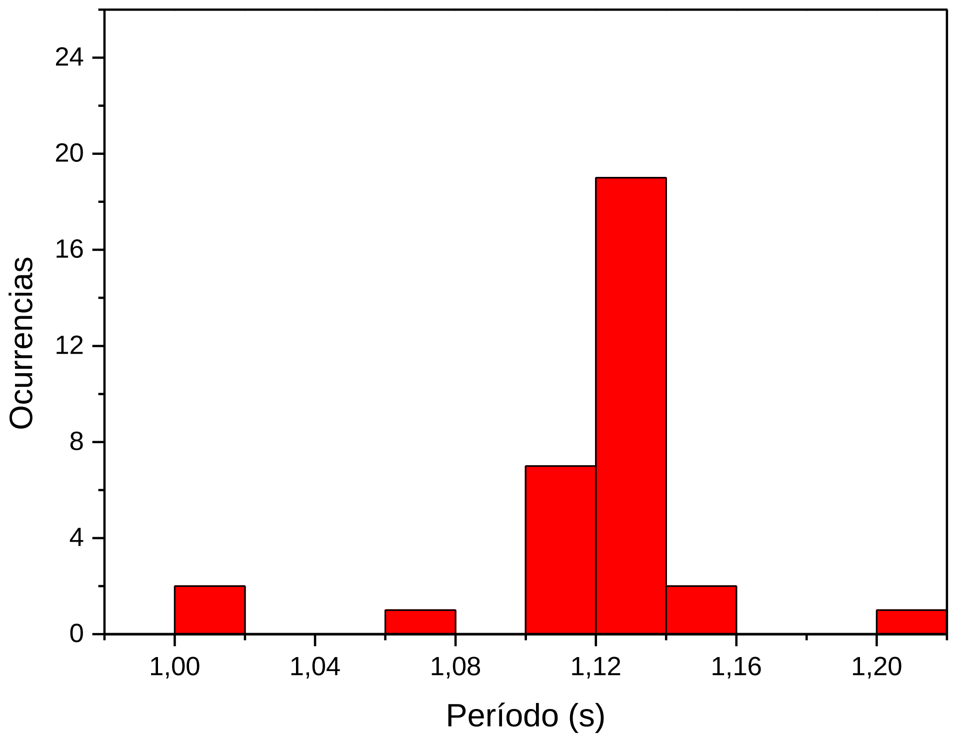
A) Una nueva medición de la misma serie

B) El valor promedio de una nueva serie de mediciones

PROBABILIDAD	Una nueva medida de x_i	una nueva medida de $\overline{x}_i$
• ~68%	$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	$(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$
• ~95%	$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	$(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)$
• ~99%	$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	$(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)$

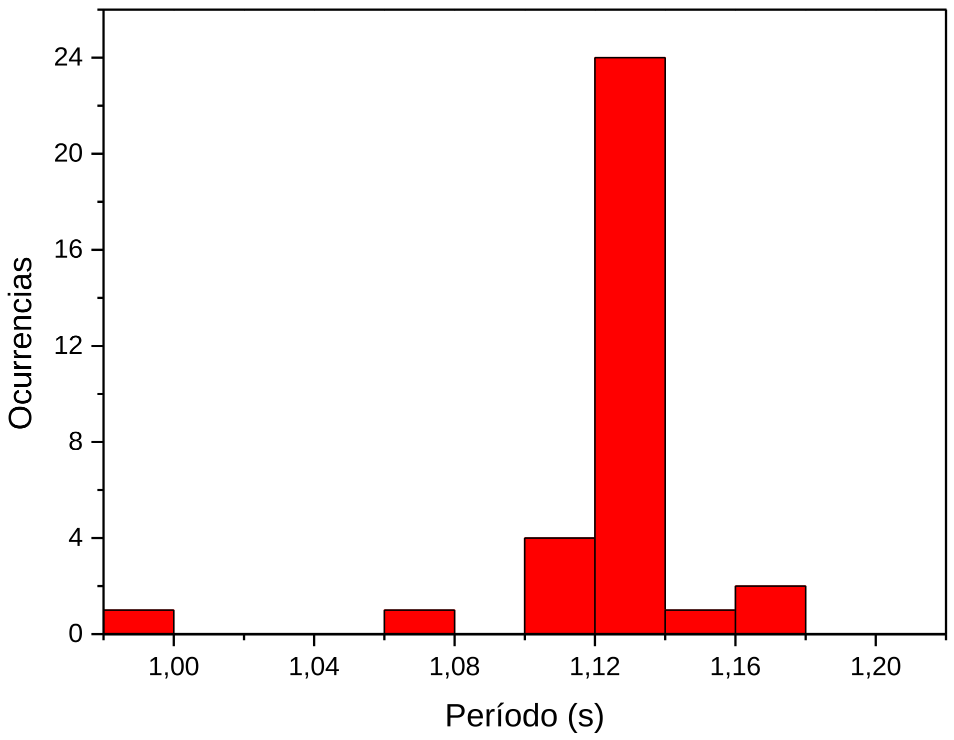
¿QUE PASA SI HACEMOS UN HISTOGRAMA DE NUESTROS VALORES MEDIOS?

LUZ



Período promedio: 1,116 s
Desviación estándar: 0,037 s

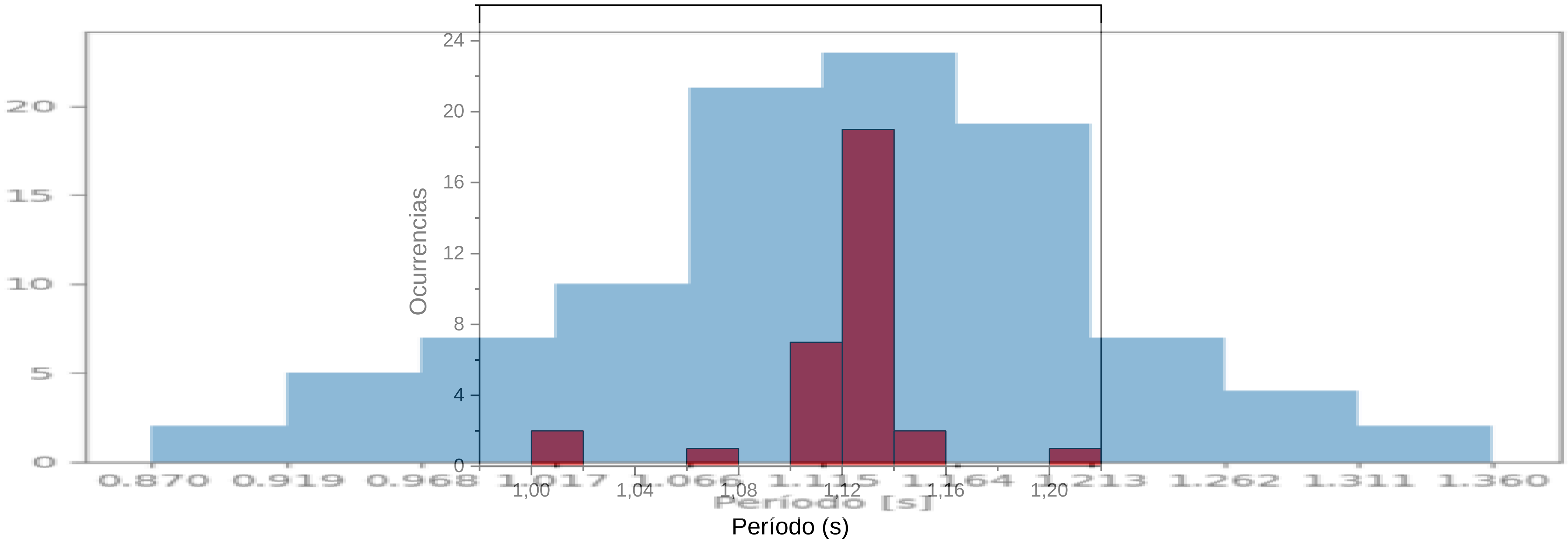
SONIDO



Período promedio: 1,120 s
Desviación estándar: 0,030 s

¿QUE PASA SI SUPERPONEMOS UN HISTOGRAMA ORIGINAL?

LUZ



Distribución de la variable aleatoria "promedio de N mediciones"

Varias Series de mediciones

Teorema Central del Límite (TCL)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$S_{x1} \cong S_{x2} \cong S$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana**, centrada en: $<\bar{x}>$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

* La demostración de este resultado general está en el apéndice

Error estadístico y error instrumental

Llamaremos *error estadístico* a la desviación estándar de la media de N mediciones $e_{stat} \equiv \sigma_{\bar{X}_N}$

- El error estadístico disminuye a medida que se realizan más mediciones con dependencia $\propto \frac{1}{\sqrt{N}}$
- El error instrumental *no depende* de la cantidad de mediciones realizadas

El error total de una medición es la suma en cuadratura* de todas las contribuciones de error *independientes*.
Si volvemos al ejemplo de la medición del período del faro considerando por ahora solamente el error instrumental (por ej. la precisión para medir tiempo del cronómetro) y el error estadístico (la variabilidad en la medición por parte del experimentador)

$$e_{tot}^2 = e_{stat}^2 + e_{inst}^2$$

¿Cuántas veces es necesario medir para que e_{stat}^2 sea despreciable respecto a e_{inst}^2?

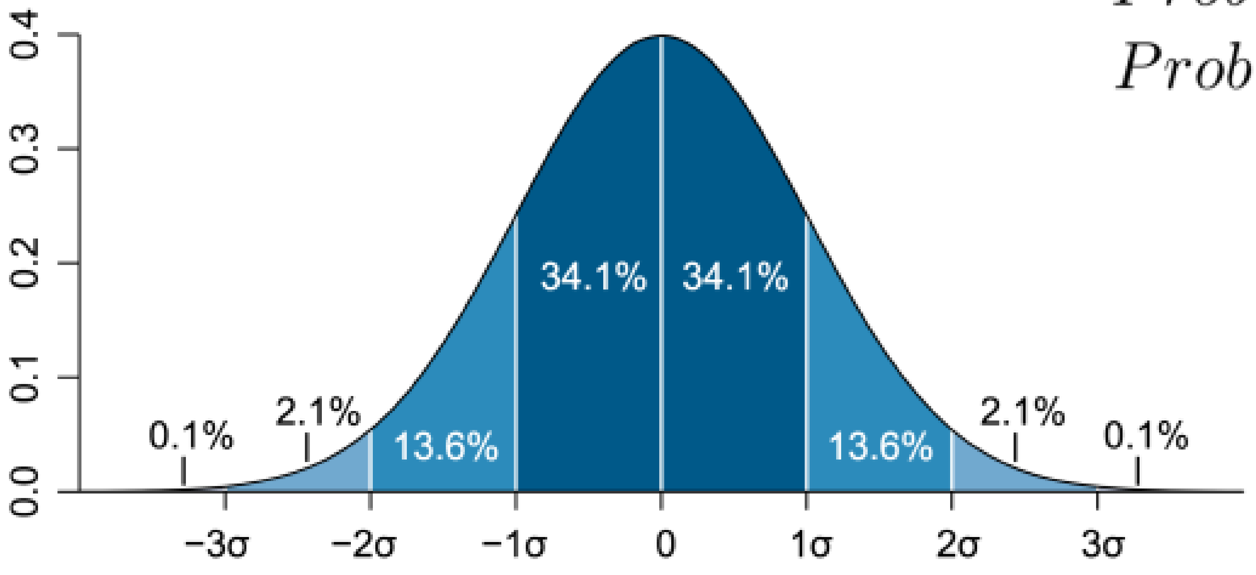
Resultado de una medición e intervalo de confianza

¿Cuál es la probabilidad de que una medición (o un promedio de N mediciones) esté entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$?

¿Y entre $\mu - t\sigma$ y $\mu + t\sigma$?

$$Prob\,(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \boxed{0,6827}$$
$$Prob\,(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \boxed{0,9545}$$
$$Prob\,(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx \boxed{0,9974}$$

Nivel de confianza



La notación

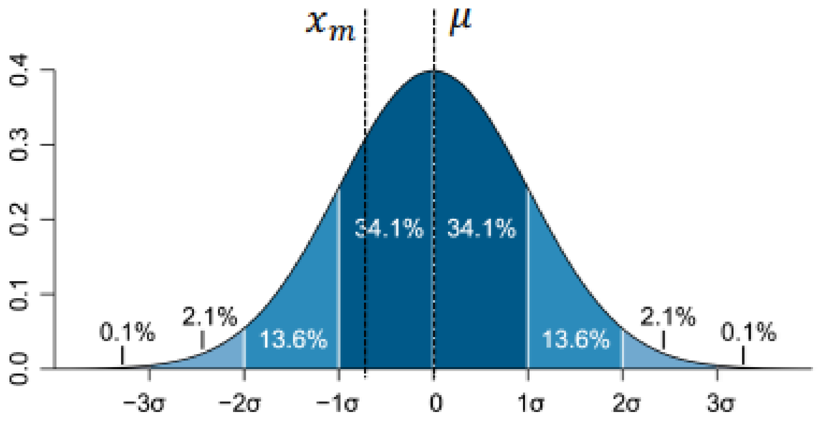
resultado = valor ± error

Significa *error = σ*
(nivel de confianza del **68,3%**)

Resultado de una medición e intervalo de confianza

resultado = valor ± error

ej: T = (1,10 ± 0,07) s



Dos interpretaciones:

$$Prob\,(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,6827 \longrightarrow$$

La probabilidad de que la *próxima medición* se encuentre entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es del 68,3%

=

$$Prob\,(X - \sigma \leq \mu \leq X + \sigma) \approx 0,6827 \longrightarrow$$

La probabilidad de que el *valor real* μ se encuentre entre $x_m - \sigma$ y $x_m + \sigma$ es del 68,3%

x_m: valor medido

RESUMEN DE CONCEPTOS IMPORTANTES

- **Desviación Estándar (de la muestra)**
  - Permite predecir probabilidad de hallar valores al medir
  - SD o σ
- **Error Estándar**
  - $SD/\sqrt{N}$
  - Incerteza del valor medio μ o x_0
  - SE o σ_{x0}
- **Valor medio**
  - Estimación del valor real que se trata de medir
  - μ o x_0 o $\langle x \rangle$ o $\bar{x}$

¿Cuál es el valor de T?

1,10 s	1,19 s	1,16 s
1,14 s	1,15 s	1,11 s
1,20 s	1,21 s	1,16 s

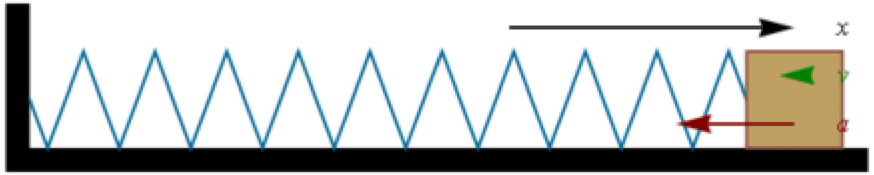
$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$$

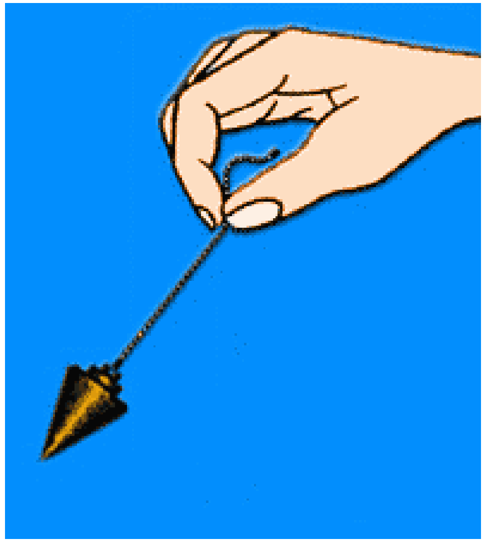
$$\Delta T = ???$$

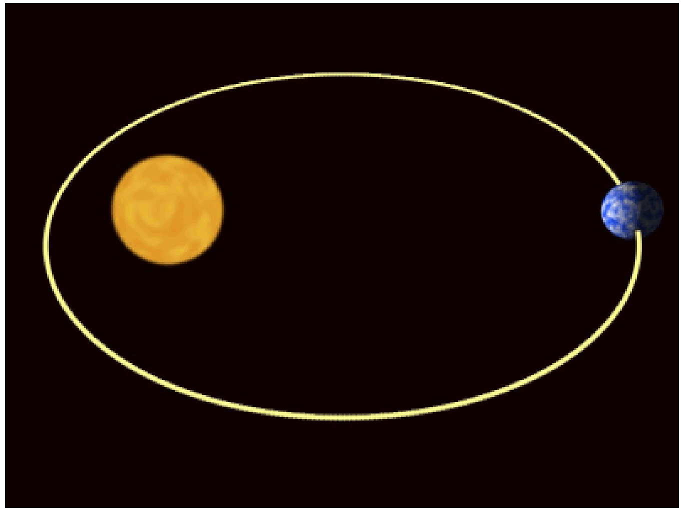
$$e_{tot}^2 = e_{stat}^2 + e_{inst}^2$$

¿QUE VAMOS A HACER HOY?

Estudiar estadísticamente un sistema de movimiento **periódico**

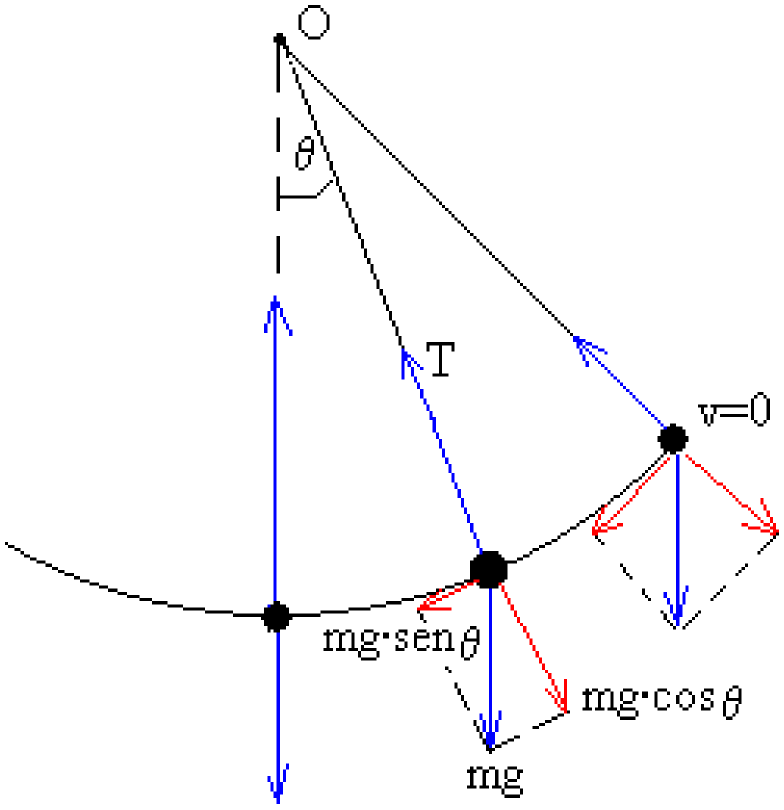




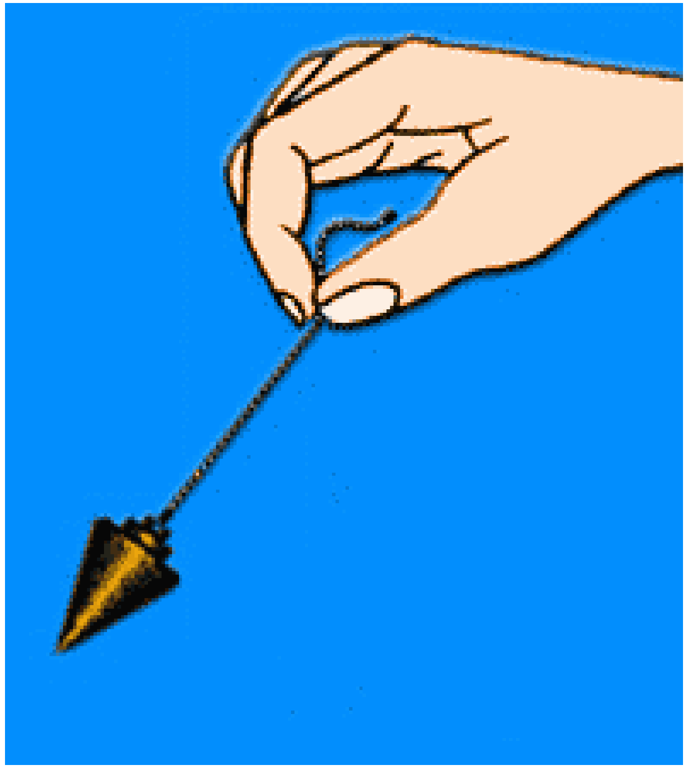


¿QUE VAMOS A HACER HOY?

Estudiar estadísticamente un sistema de movimiento **periódico**

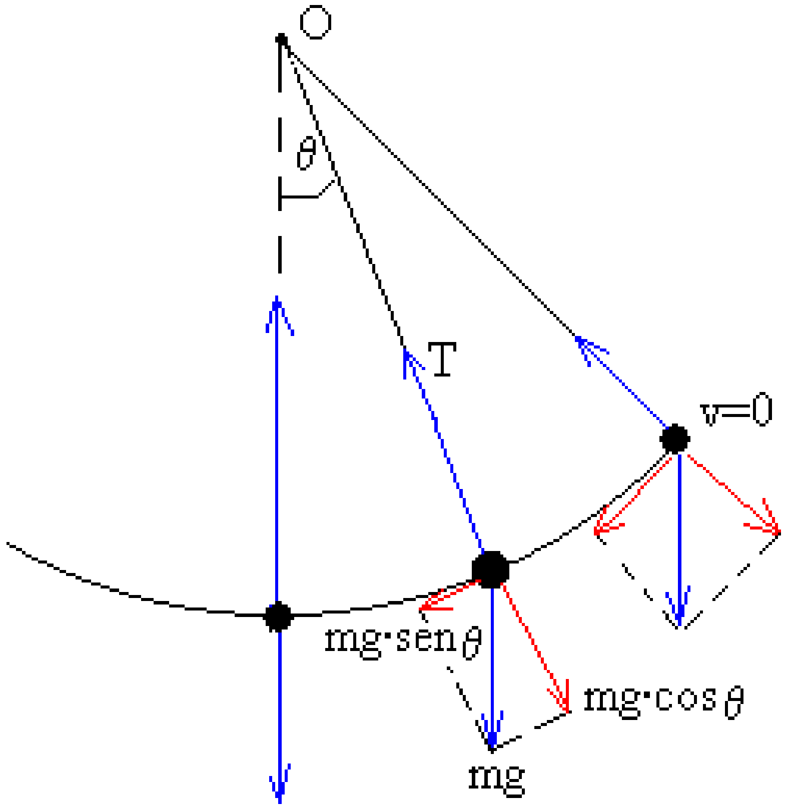


Un **péndulo simple** es un punto material que oscila suspendido de un hilo inextensible y sin peso.



¿QUE VAMOS A HACER HOY?

Estudiar estadísticamente un sistema de movimiento **periódico**



Un **péndulo simple** es un punto material que oscila suspendido de un hilo inextensible y sin peso.

Si además consideramos ángulos pequeños

Periodo de un péndulo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T = periodo

π = pi

L = longitud del péndulo

g = aceleración debida a la gravedad

Período de un Péndulo de (50,0 ± 0,1) cm de longitud

- Tomen **40 medidas** del período del péndulo (N = 40) (θ < 10°) con un cronómetro. ¿Observan una tendencia a la disminución en los valores del tiempo? ¿Se está frenando el péndulo?

- Obtengan 160 medidas más tomando 4 series de 40 mediciones cada una. Tendrá un total de N = 200.

- Realicen 5 Histograma manteniendo el rango del eje X y del eje Y para 1) N = 40, 2) N = 80, 3) N = 120, 4) N = 160, 5) N = 200. ¿Depende de N la forma, el centro, y/o el ancho de los histogramas? ¿Presentan una forma similar a la de una distribución Gaussiana?

- Hagan una Figura superponiendo los histogramas de N = 40 y N =200. ¡Así verán claramente las diferencias!

Período de un Péndulo de (50,0 ± 0,1) cm de longitud

- Mezcles sus 200 datos al azar. Utilicen grupos con: N = 10, 20, 30, 40, ..., 200 calculen el valor más representativo $\boldsymbol{T}$ y la desviación estándar $\boldsymbol{S}$ de cada caso. ¿Parecen depender $\boldsymbol{T}$ o $\boldsymbol{S}$ de N?

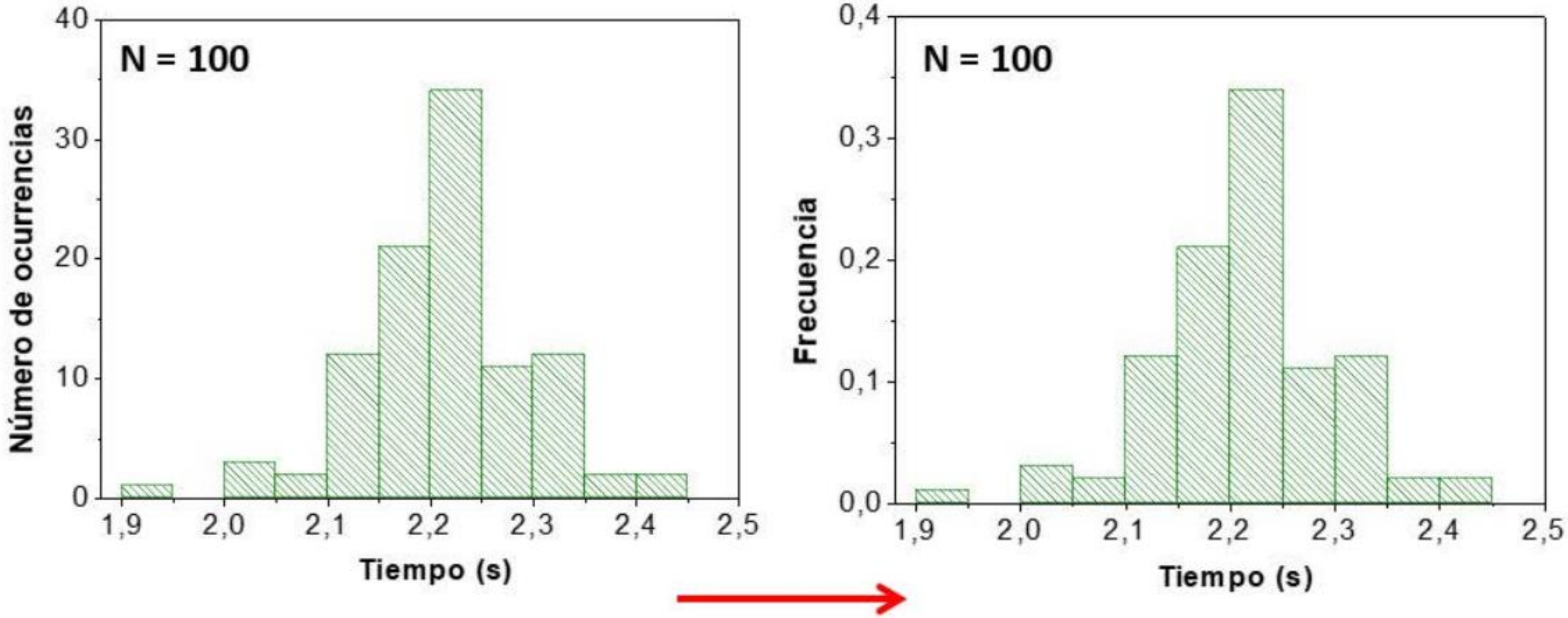
- Hagan un gráfico de puntos de $\boldsymbol{T}$ en función de N y otro de $\boldsymbol{S}$ en función de N. ¿Observan una clara dependencia?

- Calculen el RESULTADO del período del péndulo:

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T} \pm \Delta \boldsymbol{T})\ \boldsymbol{Ud}$$

considerando que N = 200 es representativo para su experimento. Exprese el resultado con 2 cifras significativas para el error.

Cómo comparo histogramas

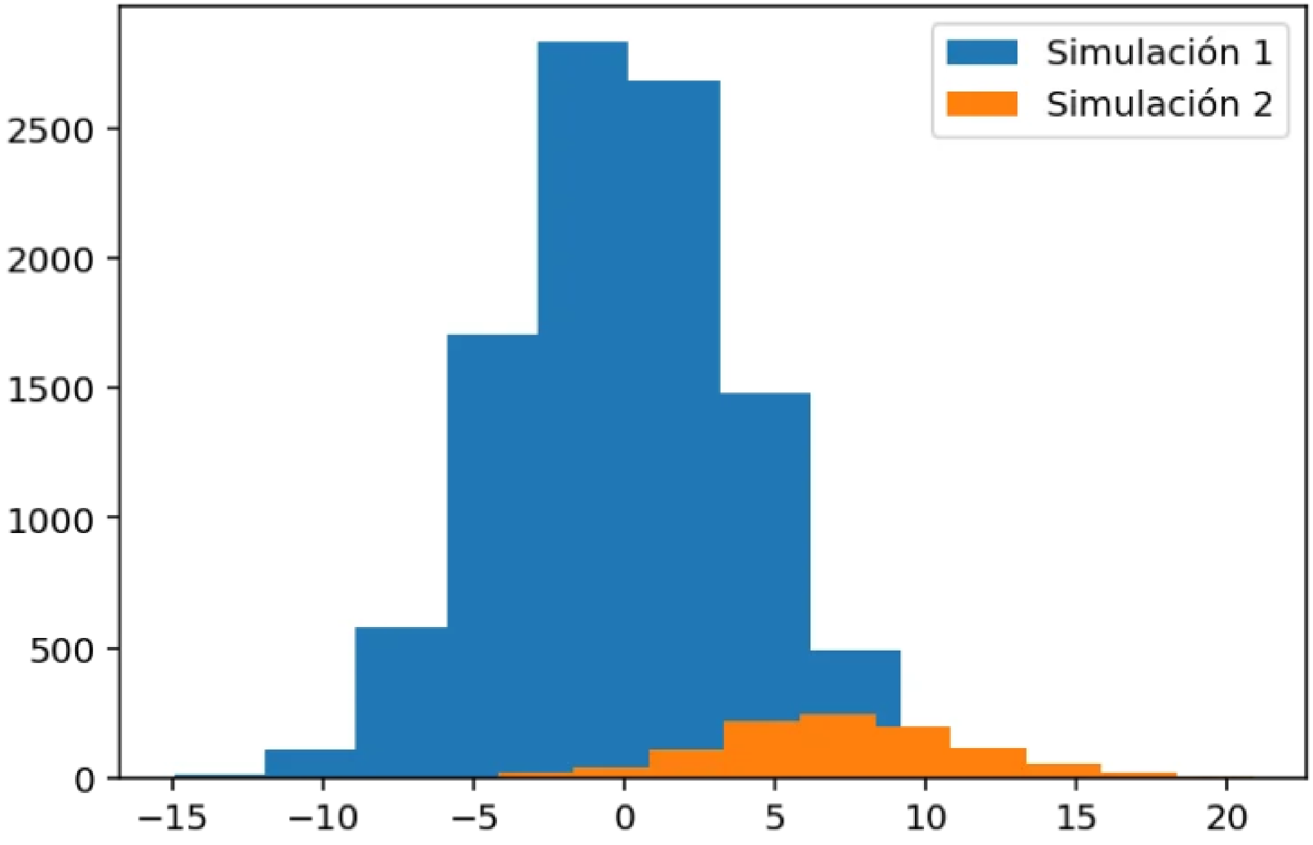


$$\frac{Número\ de\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia\ (Fk) \qquad F_k = \frac{n_k}{N}$$

Condición de Normalización → $\sum_i F_i = 1$ $\qquad F_i = \frac{n_i}{N}$

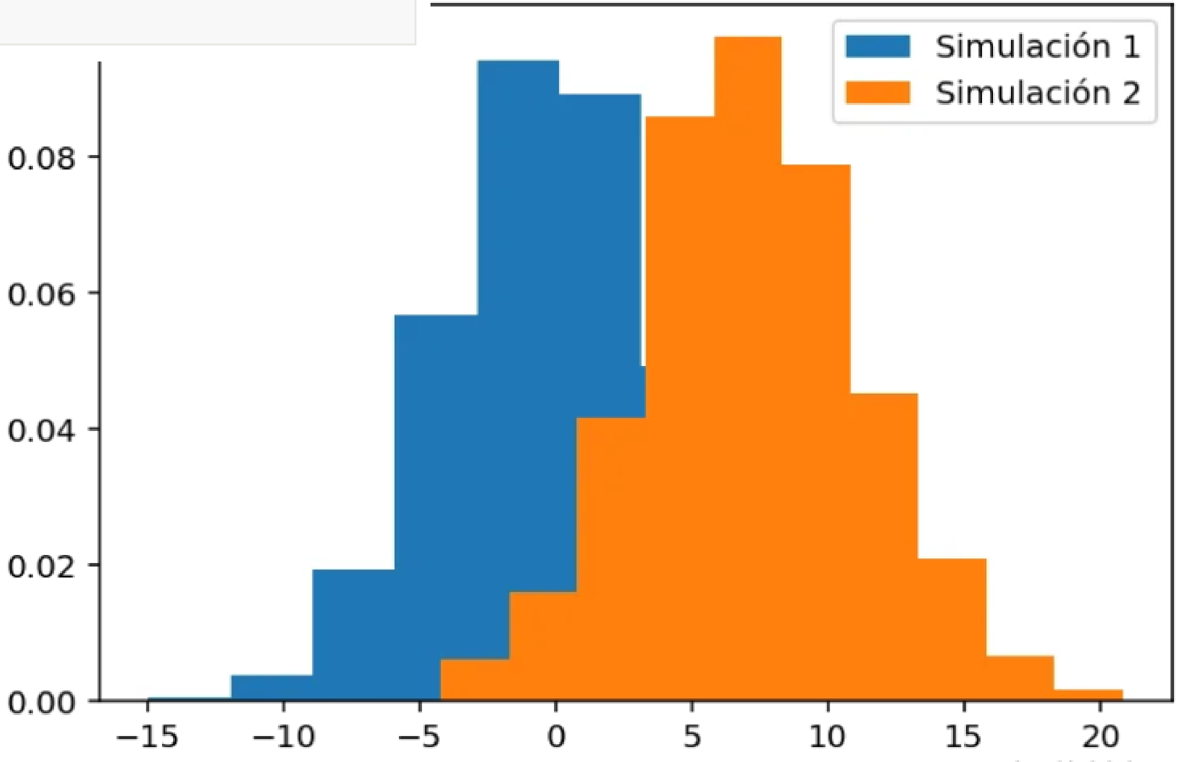
Para dibujar **dos histogramas** en **una figura** de Matplotlib solamente hay que crear uno y luego otro mediante en la misma figura con el método `hist()`. El resultado es una única figura con ambos histogramas, superpuesto el segundo sobre el primero. Por ejemplo, en el siguiente código se generan aleatoriamente los valores de dos distribuciones normales con diferente media y se muestran ambos histogramas en una figura.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(0)

sim_1 = np.random.normal(0, 4, 10000)
sim_2 = np.random.normal(7, 4, 1000)

plt.hist(sim_1, label='Simulación 1')
plt.hist(sim_2, label='Simulación 2')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```



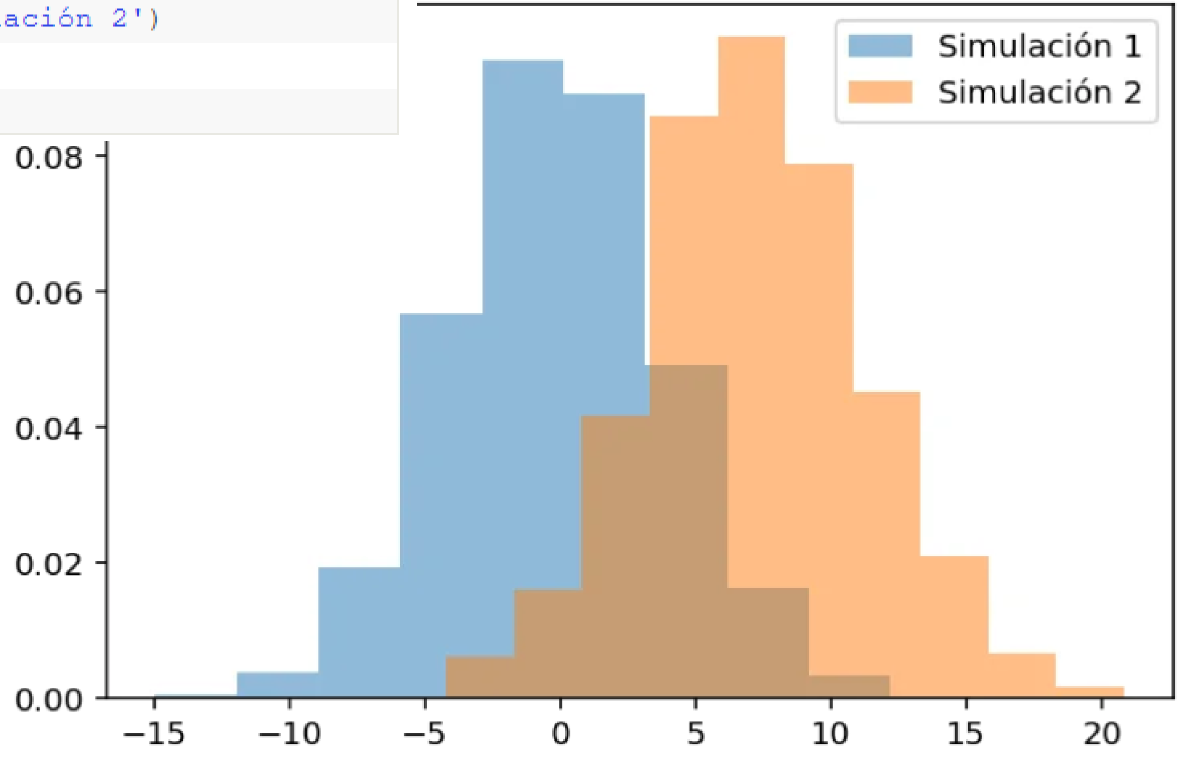
Si lo que se desea comprar es la frecuencia y no el número de ocurrencias, es necesario indicarlo a la función hist(). Mediante el parámetro density de la función hist() se puede cambiar el comportamiento de esta para que use en el eje de ordenados se incluya la frecuencia en lugar del número de ocurrencias. Así, aunque el número de muestras sea diferente, se puede comparar las densidades de ambas distribuciones. Lo que se muestra en el siguiente código.

```
plt.hist(sim_1, density=True, label='Simulación 1')
plt.hist(sim_2, density=True, label='Simulación 2')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```



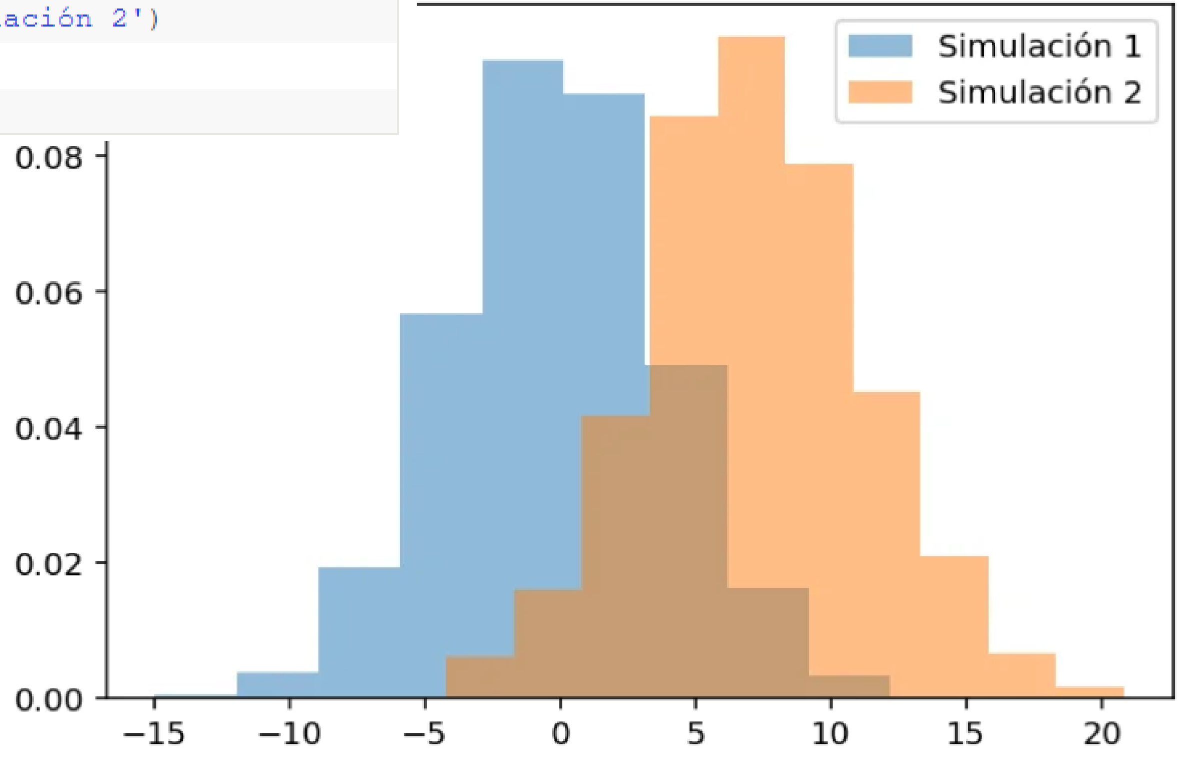
En el último ejemplo el histograma del segundo conjunto de datos oculta parte del primero, dificultando el análisis de la información. Siendo este un problema para el que existen varias soluciones. Una de las opciones más sencillas es incluir un valor de alpha distinto al de la unidad, por lo que los histogramas serán parcialmente transparentes. Así, aunque se superpongan parcialmente los datos, se podrán seguir viendo la forma de todos. Lo que se consigue asignando al parámetro alpha de la función hist() un valor inferior a la unidad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

```
plt.hist(sim_1, alpha=0.5, density=True, label='Simulación 1')
plt.hist(sim_2, alpha=0.5, density=True, label='Simulación 2')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```



En el último ejemplo el histograma del segundo conjunto de datos oculta parte del primero, dificultando el análisis de la información. Siendo este un problema para el que existen varias soluciones. Una de las opciones más sencillas es incluir un valor de alpha distinto al de la unidad, por lo que los histogramas serán parcialmente transparentes. Así, aunque se superpongan parcialmente los datos, se podrán seguir viendo la forma de todos. Lo que se consigue asignando al parámetro alpha de la función hist() un valor inferior a la unidad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

```
plt.hist(sim_1, alpha=0.5, density=True, label='Simulación 1')
plt.hist(sim_2, alpha=0.5, density=True, label='Simulación 2')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```



Nuestros datos, ¿siguen una distribución normal?

Para saberlo necesitamos ver si los datos se **ajustan** a una Gaussiana

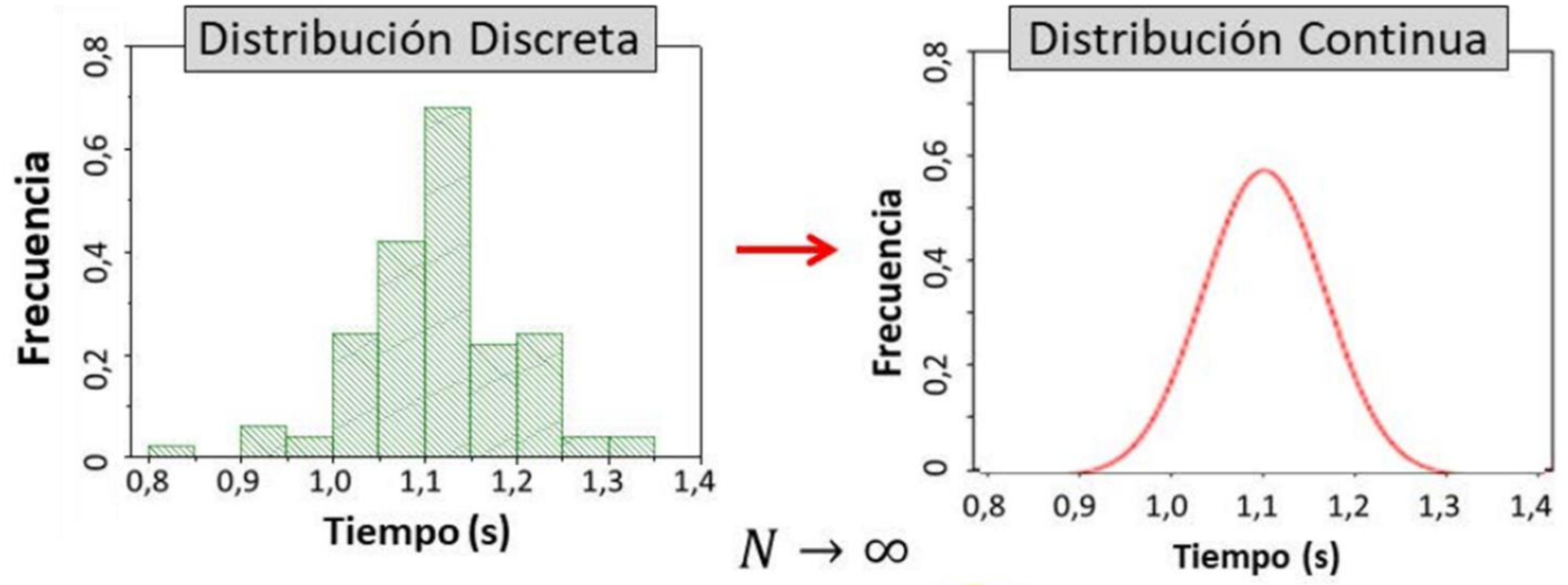
Objetivo

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos estimamos los parámetros de la distribución

Nuestros datos, ¿siguen una distribución normal?

Para saberlo necesitamos ver si los datos se **ajustan** a una Gaussiana



$N \to \infty$

$\bar{x} \rightarrow \mu$

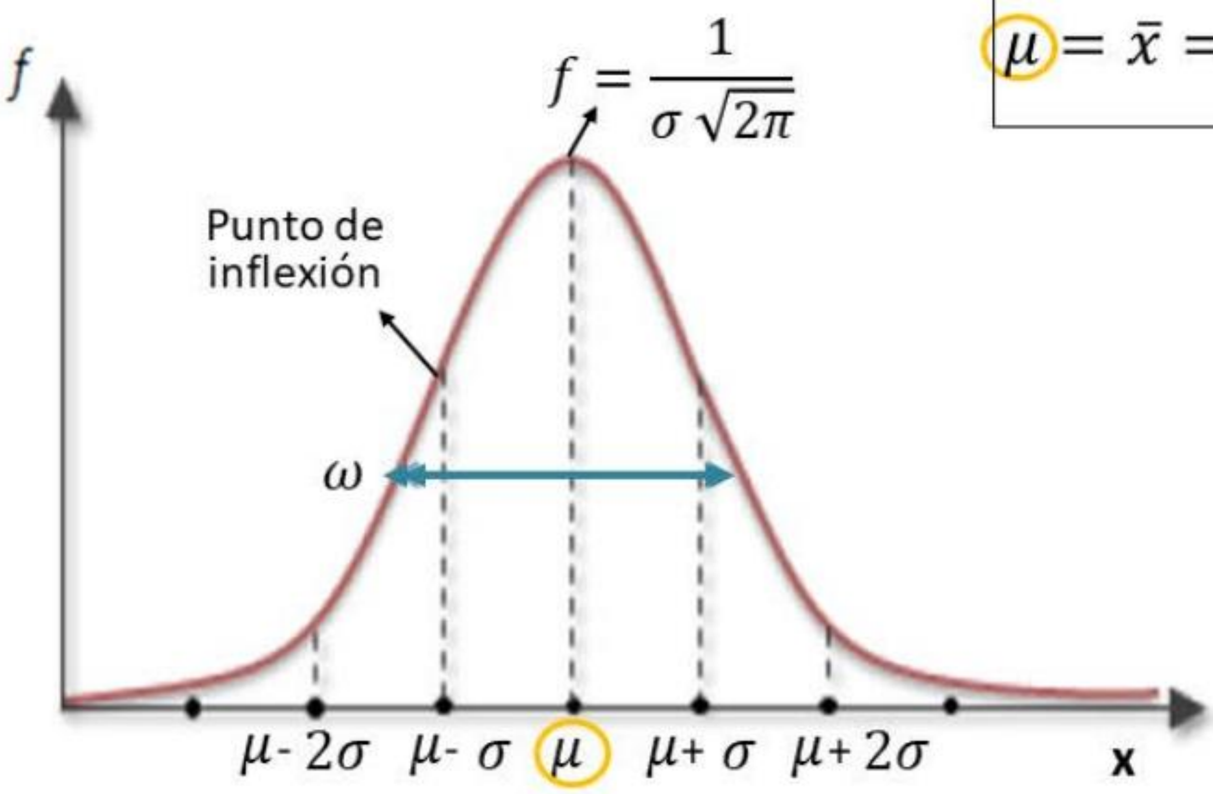
$S \rightarrow \sigma$

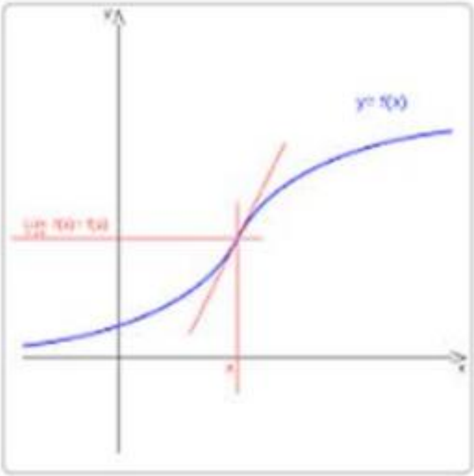
Función de distribución: Gauss

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\boxed{\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}$$





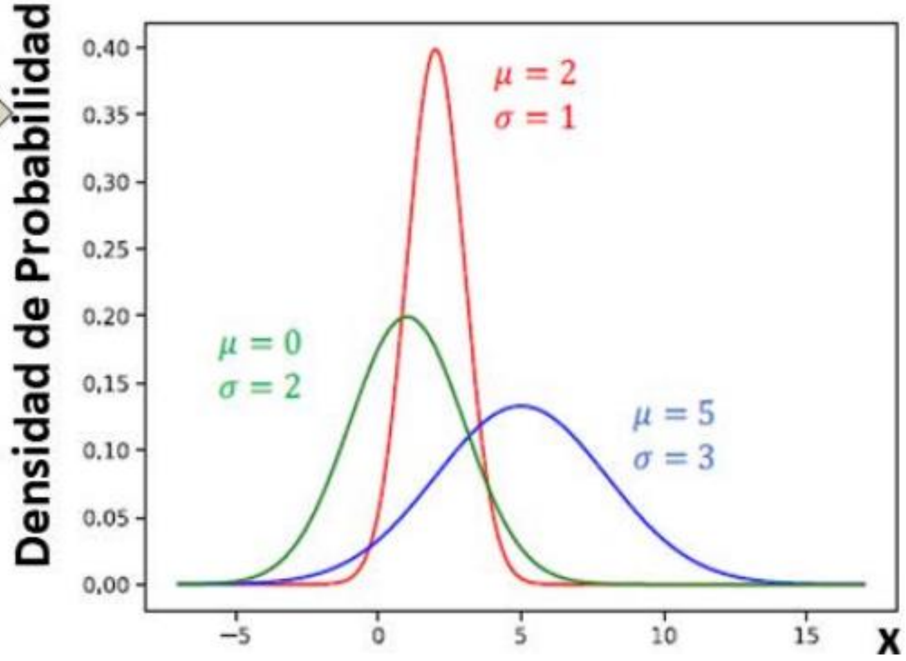
Función de distribución: Gauss

Otras características de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

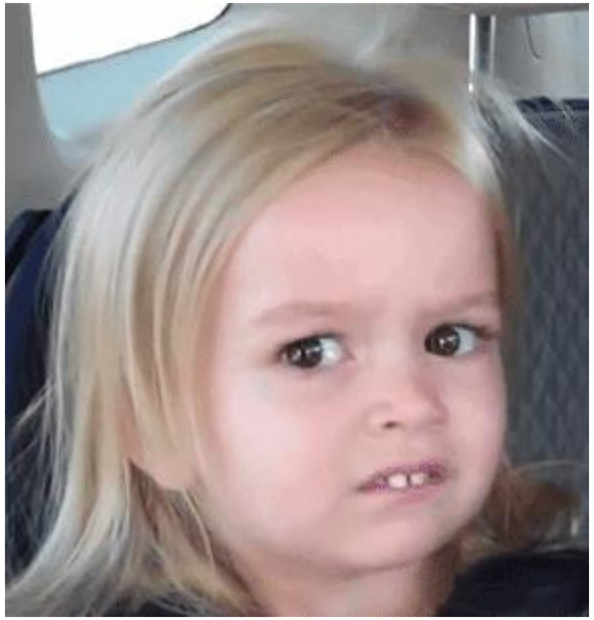
- → Está centrada en $x = \mu$
- → Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- → Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$
- → El parámetro σ da una idea del ancho de la curva

Función de distribución de 3 Muestras



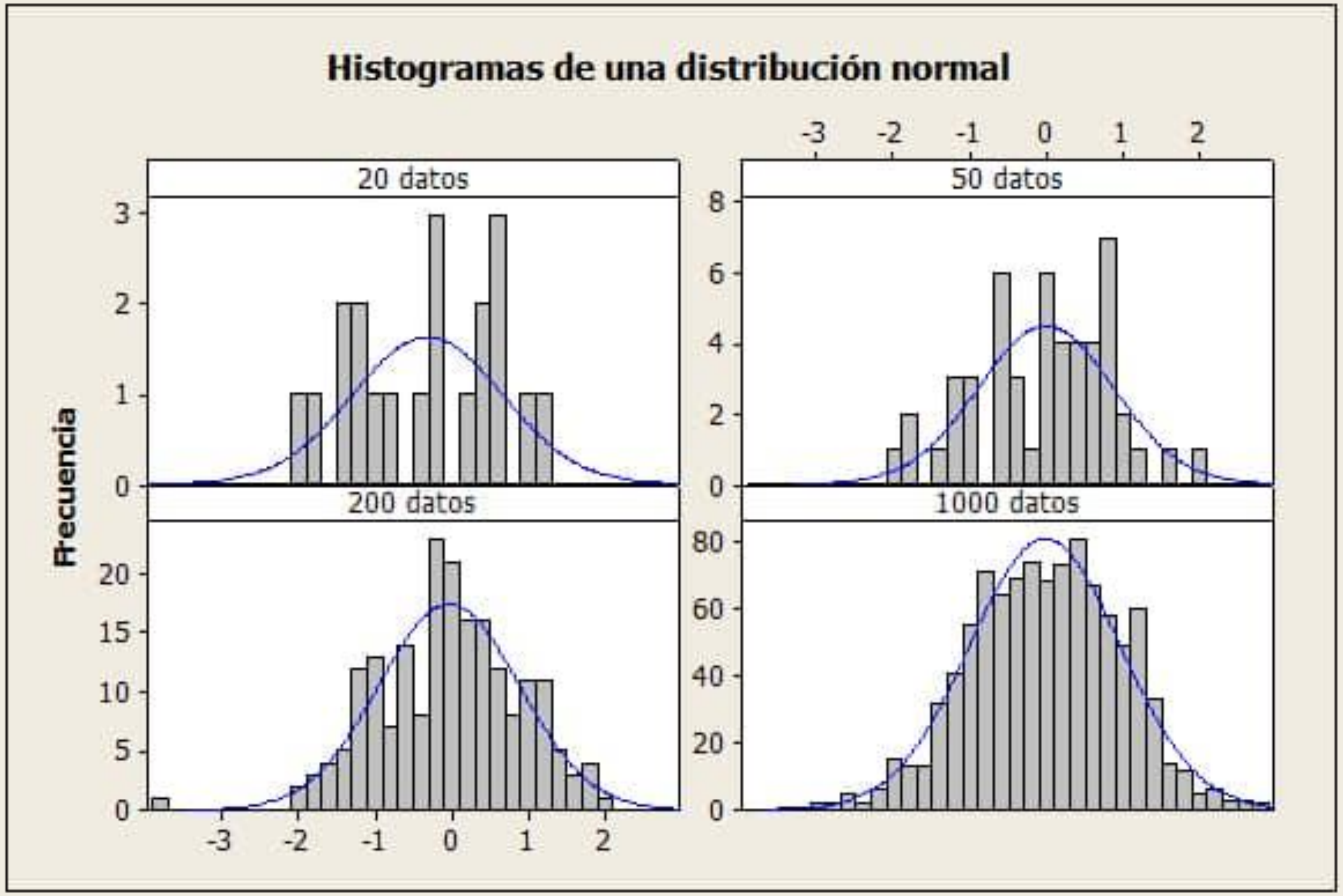
- μ Corrimiento en x
- σ Aumento del ancho

Ajuste Gaussiano en Python??



Para el Lunes 02/9 a las 12 del mediodía:

- Sección resultados de un informe, mostrando los resultados del experimento de hoy
  - Histogramas para 1) N = 40, 2) N = 80, 3) N = 120, 4) N = 160, 5) N= 200 + análisis. Histogramas superpuestos de N =40 y N =200. ¿Depende de N la forma, el centro, y/o el ancho de los histogramas? ¿Presentan una forma similar a la de una distribución Gaussiana?
  - Gráfico de puntos de $\boldsymbol{T}$ en función de N y otro de $\boldsymbol{S}$ en función de N. Análisis. ¿Observan una clara dependencia?
  - Resultado del período del péndulo: $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T} \pm \Delta\boldsymbol{T})\ \boldsymbol{Ud}$, considerando que N = 200 es representativo para su experimento. Exprese el resultado con 2 cifras significativas para el error.
  - Gráfico superponiendo el histograma de 200 datos, el centro de cada bin como puntos, el ajuste por Gaussiana y la Gaussiana teórica. Relación entre los estimadores experimentales y los parámetros de la distribución que encontraron. Análisis.


Histogramas de una distribución normal
20 datos
50 datos
200 datos
1000 datos
Frecuencia

2.4. Resultados y discusión

Esta sección puede dividirse en secciones, si fuese necesario aunque suele facilitar la lectura combinarlas. Por resultados se refiere a los valores obtenidos en las mediciones o por medio de cálculos. Por discusión se refiere a un análisis o procesamiento de los resultados obtenidos, que va llevando de una medición o cálculo a la otra, armando una única historia con todos ellos.

Se debe incluir las mediciones realizadas presentadas de una manera apropiada. Brevemente, hay tres formas de presentar los resultados, como: 1) valores incluidos en el texto, 2) tablas, o 3) figuras. Algunos criterios para seleccionar una de ellas son: 1) Si el resultado es un valor aislado, como cuando se mide una constante, este debe presentarse como tal incluido en el texto (por ejemplo: "*La constante de la gravedad en la tierra medida en el laboratorio es (9.8 ± 0.1) m/s*"); 2) Si se realizaron varias mediciones independientes que se quieren comparar, se puede utilizar una tabla como alterntiva a incluirlas todas en el texto, esto se justifica cuando son muchas o el texto se refiere a ellas muchas veces (el criterio general también seria minimizar el uso de tablas); y 3) Si los valores medidos dependen de una variable, o se quieren mostrar una relación entre dos variables medidas, lo óptimo es presentarlas en un gráfico y el tipo de gráfico es una nueva decisión a tomar...

Tanto si se presentan valores, tablas o gráficos, deben estar claramente indicadas las unidades y las incertezas. En el caso de las tablas y los valores también se deben cuidar de expresarlos con la cantidad de cifras significativas correcta. En los gráficos, identificar claramente los nombres de cada eje (y al lado de ellos las unidades de cada uno).

Esta sección debe contener una descripción de la forma en que fueron evaluadas las incertezas, los gráficos y los resultados con una descripción de cómo se obtuvieron. También se discuten los mismos en cuanto a su validez, precisión, interpretación, etc.

Aquí se analizan, por ejemplo, las dependencias observadas entre las variables, la comparación de los datos con un modelo propuesto, o las similitudes y discrepancias observadas con otros resultados. Si el trabajo además propone un modelo que trate de dar cuenta de los datos obtenidos, es decir, si el modelo es original del trabajo, su descripción debe quedar lo más clara posible; o bien, si se usó un modelo tomado de otros trabajos, debe citarse la fuente consultada (ver *Bibliografía*). Las ecuaciones que se utilizan deben estar explicitadas directamente o si ya fueron introducidas anteriormente (en la *Introducción*) a través de una cita al número de ecuación correspondiente.

NOTA: *TODOS LOS VALORES DEBEN INCLUIR EL INCERTEZA, LAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS CORRECTAS Y LAS UNIDADES.*

NOTA: *TODAS LAS FIGURAS DEBEN INCLUIR UN PIE DE FIGURA CON LA REFERENCIA (Figura 1) Y UNA BREVE DESCRIPCIÓN. Las figuras deben ser citadas en el texto cuando se refieran a ella, en ese sentido un criterio para decidir si incluir una figura o no es si esta ilustra una nueva idea o presenta un resultado nuevo. Para darse cuenta de ello se puede releer el texto una vez terminado y si esta figura nunca fue citada, es decir que nunca se necesito para contar la historia, entonces está de más y se puede sacar.*

¿Se incluyó una motivación-descripción-análisis de las figuras presentadas en resultados? (no están sólo puestas ahí...)
¿Se comparó con los resultados esperados (de modelos o mediciones previas/ajenas)?

¿Se analizaron las posibles fuentes de las incertezas medidas?

Figuras / Tablas

¿Se incluyeron todas las figuras/tablas necesarias?

¿Se descartaron las figuras/tablas INNECESARIAS?

¿Todas las figuras/tablas incluídas están citadas en el texto?

¿Todas las figuras/tablas tienen pie de figura?

¿Las figuras/tablas están correctamente numeradas?

Figuras

¿Los ejes incluyen nombre de la variables y unidades?

¿Están las barras de incerteza?

¿Se ven las barras de incerteza? ¿o están detallados en el pie de figura?

¿La escala permite observar las regiones de interés?

De necesitar leyendas ¿Están en castellano? ¿describen correctamente las distintas condiciones?

Valores

¿Los valores tienen unidades?

¿Los valores tienen incerteza?

¿La cantidad de cifras significativas es la correcta?

¿La cantidad de cifras significativas es consistente a lo largo del informe?

Esta presentación está basada en presentaciones previas de Marcelo Luda, Silvia Goyanes y Lucía Fama.

¡Gracias a los tres!