Laboratorio 1

Docentes

Gustavo Grinblat, Laura Ribba, Ayelén Santos, Delfina Rodríguez Juiz

Pañolera: Yamila Burrafato

Departamento de Física, FCEN, UBA – Segundo Cuatrimestre, 2024

Web: https://materias.df.uba.ar/l1a2024c2

Promedios pesados

Promedios pesados entre N mediciones independientes con su error

$$\boxed{\frac{1}{\sigma^2_{\langle x\rangle_p}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

$$\boxed{\langle x\rangle_p = \sigma^2_{\langle x\rangle_p} \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{\sigma_k^2}}$$

$\sigma_{\langle x\rangle_p}$: Error del promedio pesado
$\langle x\rangle_p$: promedio pesado de x

Método de cuadrados mínimos - Planteo del problema

- Se tiene un conjunto de mediciones $\{x_i\}_{i=1,\ldots,N}$
- Se tiene otro conjunto de mediciones $\{y_i\}_{i=1,\ldots,N}$
- Hipótesis: Existe una relación funcional entre las mediciones x e y de la forma $y = f(x)$
  $\rightarrow$ **modelo teórico**.
- Por ejemplo:

$$y = f\left(x\right) = mx + q \text{ es una relación } \textbf{lineal} \text{ entre } x \text{ e } y$$

Asumiendo un cierto modelo teórico (por ej. $y = mx + q$) ¿Cómo se encuentran los parámetros del modelo (por ej. m y q) que **mejor ajustan** los datos experimentales?

Método de cuadrados mínimos

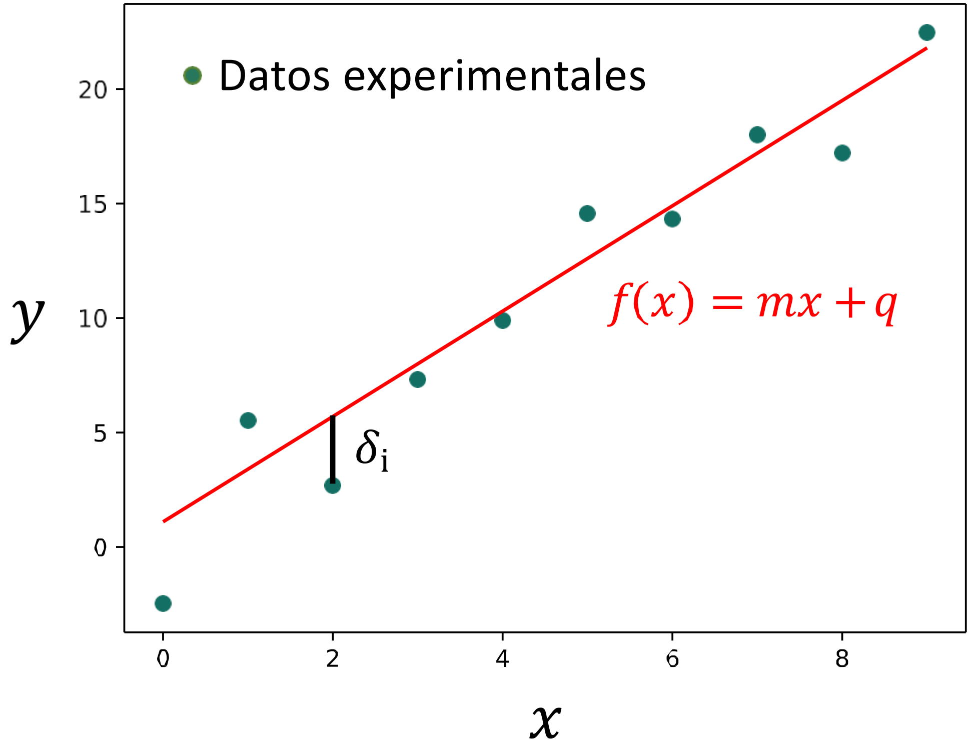
- Encontrar la función $f(x)$ que minimice la suma de las diferencias al cuadrado entre la predicción $f(x_i)$ y la medición y_i.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(x_i\right) - y_i\right)^2$$

- Hipótesis: La variable y tiene distribución gaussiana con valor medio $f(x)$. El error relativo en x es mucho menor al de y.

- Caso lineal ($y = f(x) = mx + q$)

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|(mx_i + q) - y_i\right|^2$$



Método de cuadrados mínimos

$$S\left(m,q\right)=\sum_{i=1}^{N}\left|(mx_i+q)-y_i\right|^2=\sum_{i=1}^{N}y_i^2+m^2\sum_{i=1}^{N}x_i^2+Nq^2+2mq\sum_{i=1}^{N}x_i-2m\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-2q\sum_{i=1}^{N}y_i$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S\left(m,q\right)}{\partial m}&=0\\ \frac{\partial S\left(m,q\right)}{\partial q}&=0\end{aligned}\right] \longrightarrow \left.\begin{aligned}2m\sum_{i=1}^{N}x_i^2+2q\sum_{i=1}^{N}x_i-2\sum_{i=1}^{N}x_iy_i&=0\\ 2Nq+2m\sum_{i=1}^{N}x_i-2\sum_{i=1}^{N}y_i&=0\end{aligned}\right] \longrightarrow \boxed{\begin{aligned}m&=\frac{N\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i}{N\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\\ q&=\frac{\sum x_i^2\sum y_i-\sum x_i\sum x_iy_i}{N\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\end{aligned}}$$

Minimización de *S* en función de *m* y *q*

Encontramos los parámetros m y q que minimizan la suma cuadrática de las diferencias entre el modelo y los datos.

Método de cuadrados mínimos

Errores de *m* y *q* (asumiendo que todas las medidas en *y* tienen igual precisión)

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial m}{\partial y_i} \sigma_y \right)^2$$

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial q}{\partial y_i} \sigma_y \right)^2$$

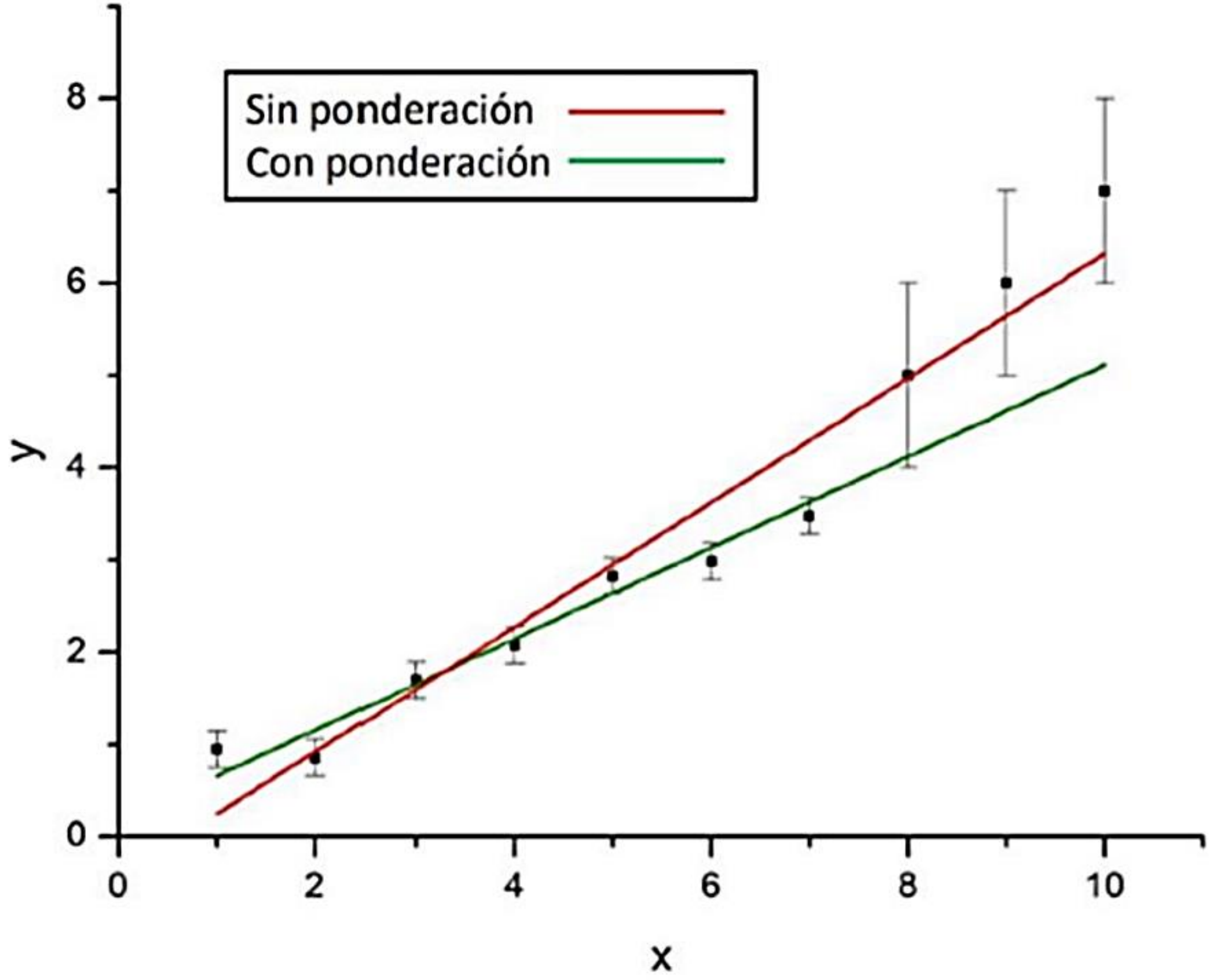
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i{}^2}{N-2}}$$

(Estimación)

$$\boxed{\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad \sigma_q = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}}}$$

Método de cuadrados mínimos

Ajuste ponderado por el error (considera las medidas más precisas como las más relevantes)

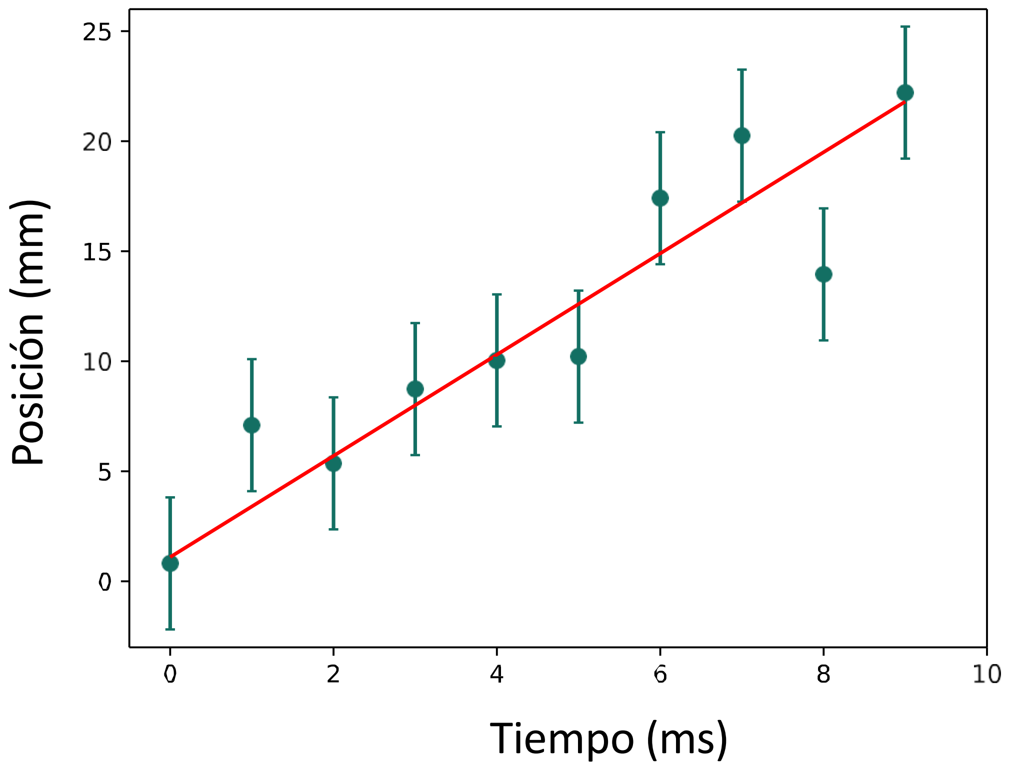


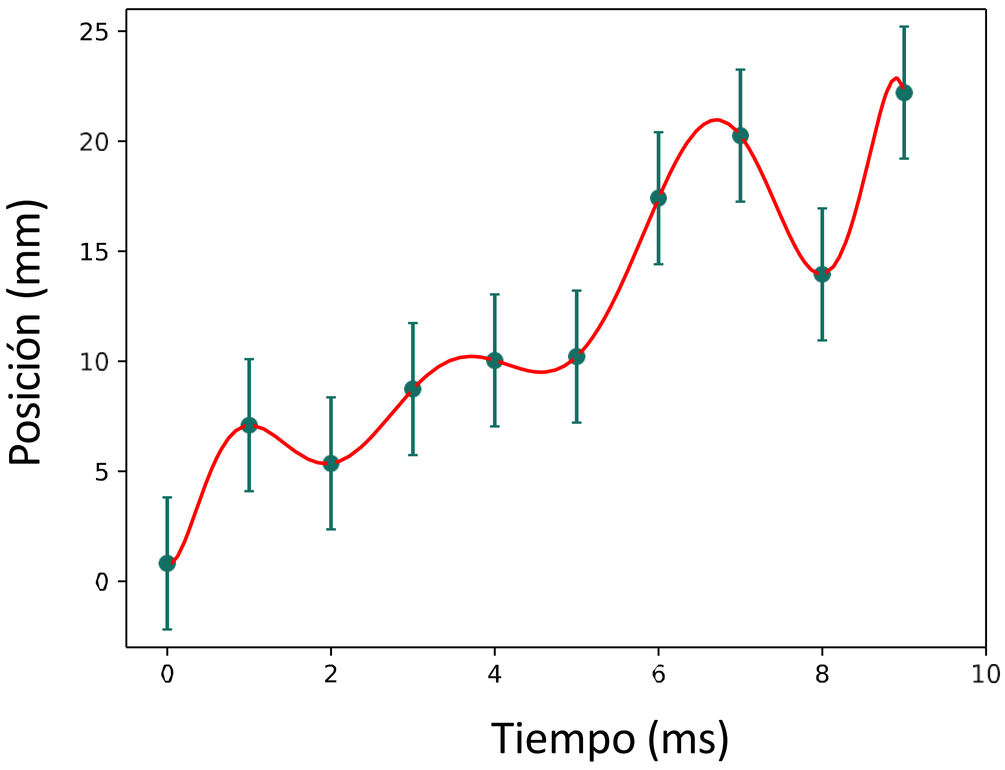
$$S = \sum_{i=1}^{N} |(mx_i + q) - y_i|^2$$

vs

$$S_p = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{(mx_i + q) - y_i}{\sigma_{y_i}} \right|^2$$

Criterios de ajuste



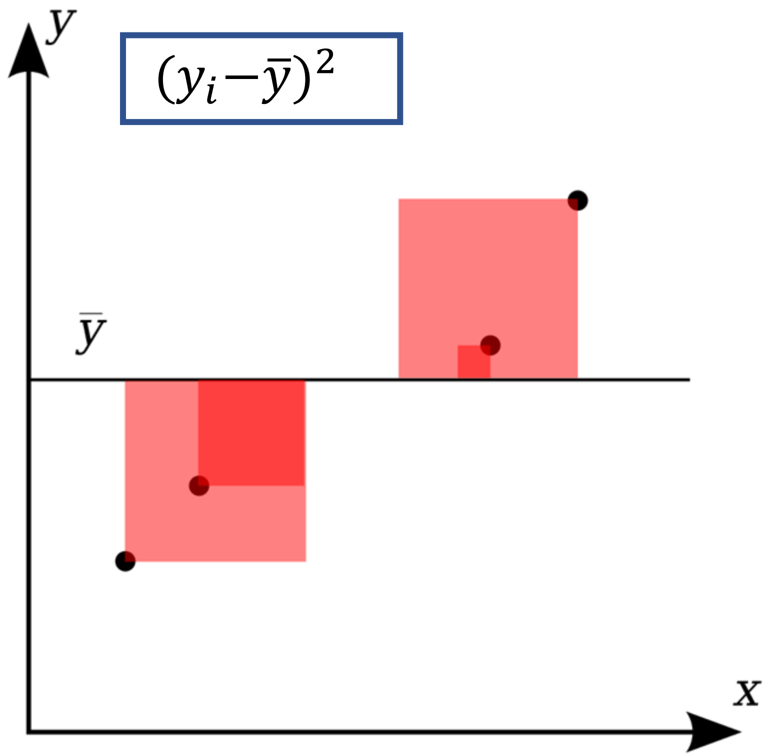


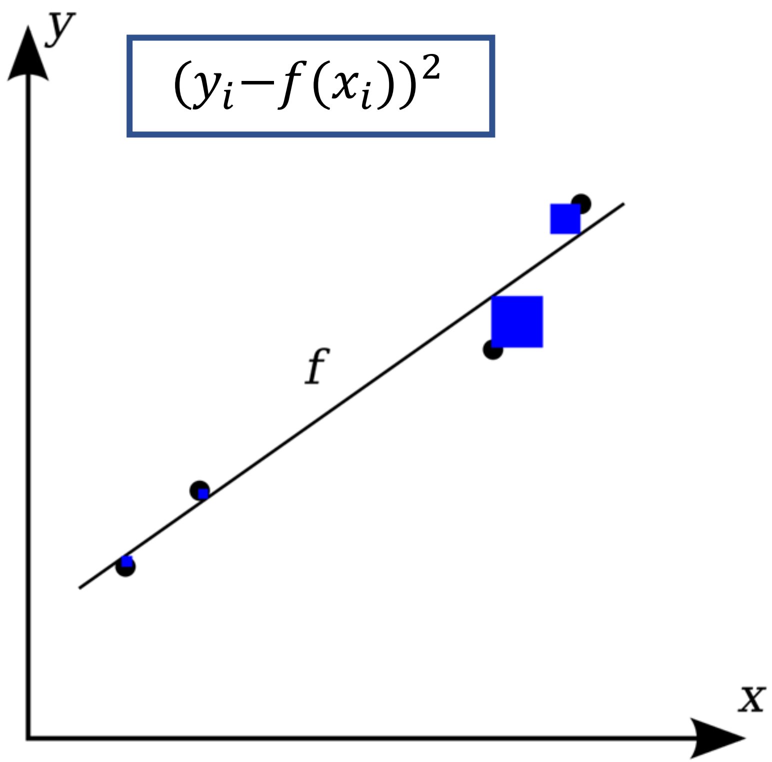
¿Qué ajuste elegirían? ¿Por qué? $\boxed{d = d_0 + v * t}$

Validez de un ajuste

Coeficiente de determinación R²: Mientras más cercano a 1, mejor es el ajuste

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$



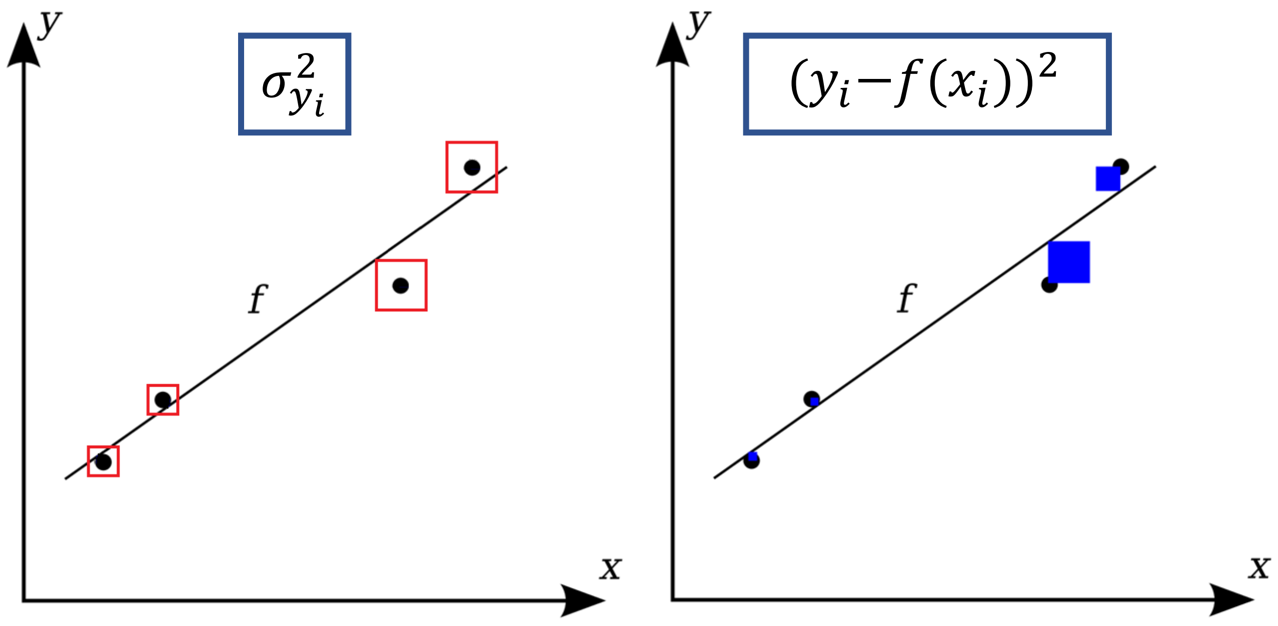


Validez de un ajuste

Chi cuadrado reducido (χ_v^2): Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo, pesando con la incerteza en *y*.

$$\chi_v^2 = \frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

n, número de parámetros ajustados $\longrightarrow$ $n = 2$



- **χ_v^2 ~ 1 o menor** → El modelo describe adecuadamente a las observaciones.
- **$\chi_v^2 \gg 1$** → El modelo no representa una buena descripción de los datos.
- **$\chi_v^2 \ll 1$**→ El modelo es “demasiado bueno”, lo cual puede indicar que se sobreestimaron los errores.

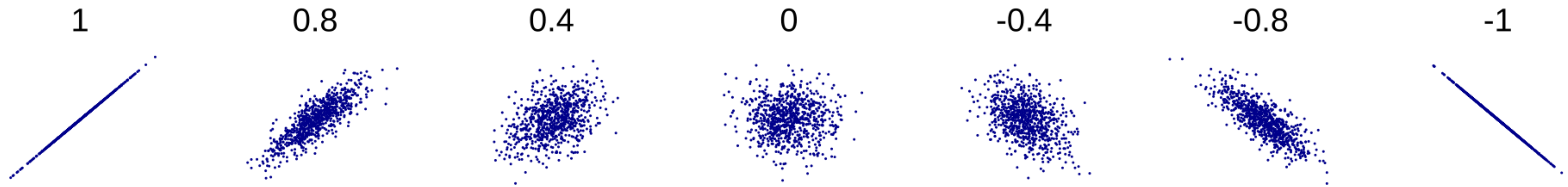
Validez de un ajuste

Coeficiente de correlación de Pearson: Indica cuán fuerte es la correlación entre las variables *x* e *y*

$$\left\{\begin{aligned} Var(x) &= \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1} \\ Var(y) &= \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}{N-1} \\ Cov(x,y) &= \sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{N-1} \end{aligned}\right. \longrightarrow$$

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}$$

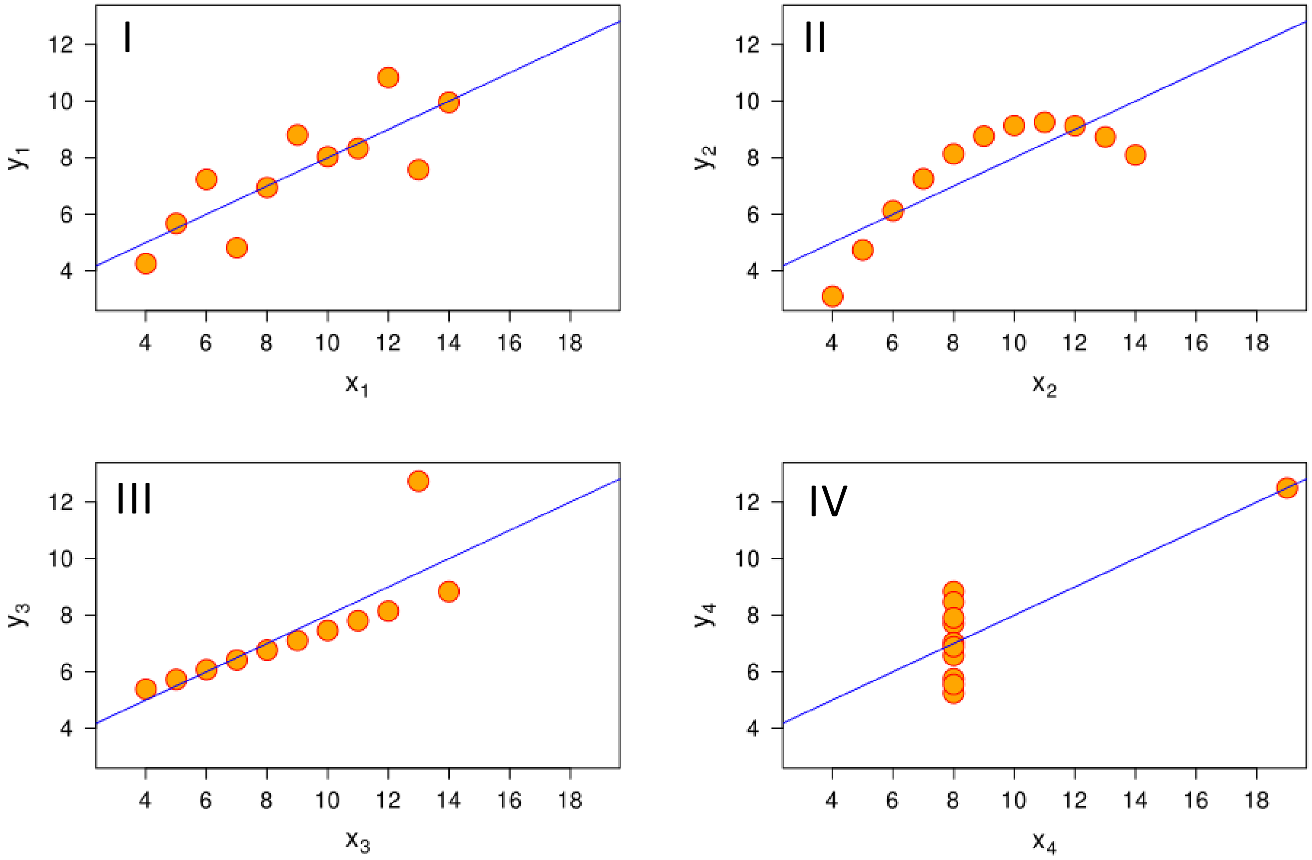
$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}}$$



$\boxed{-1 \leq r \leq 1}$ $\longrightarrow$ Se espera que $|r| \sim 1$

Validez de un ajuste

Cuarteto de Anscombe

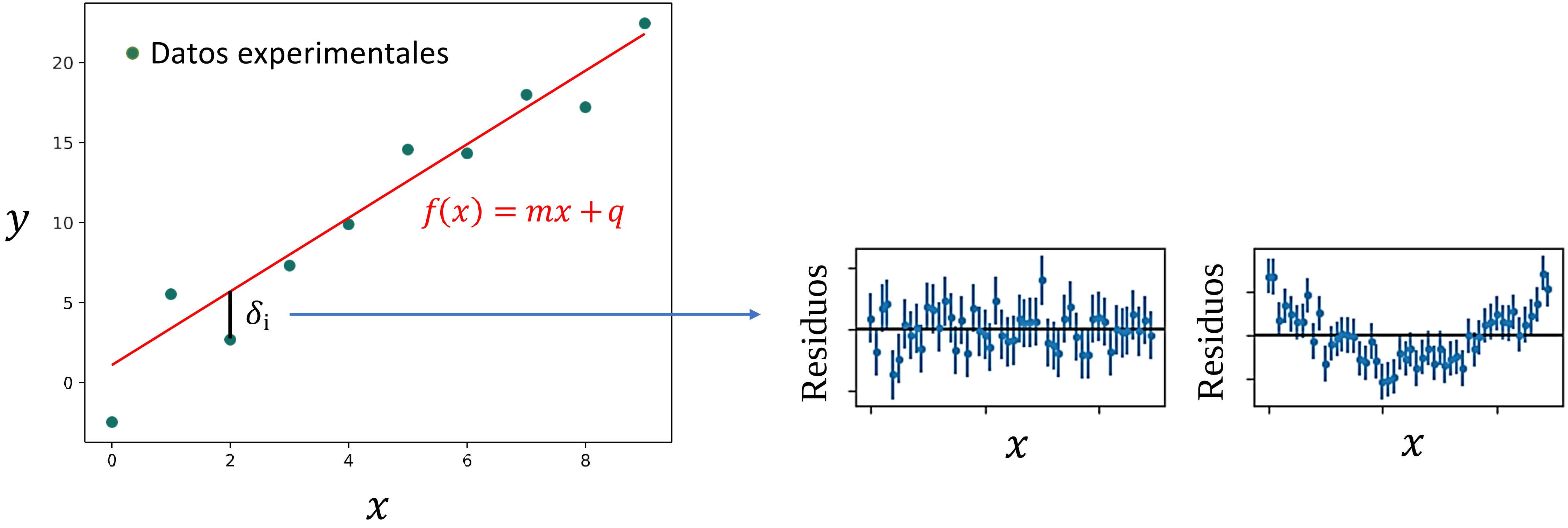


Estos cuatro conjuntos de datos tienen una estadística idéntica ¡Pero se ven muy diferentes!

Es muy importante ver los datos antes de hacer un ajuste.

Validez de un ajuste

Los residuos deben estar distribuidos en forma aleatoria alrededor del 0, y no tener estructura



Linealización de ecuaciones

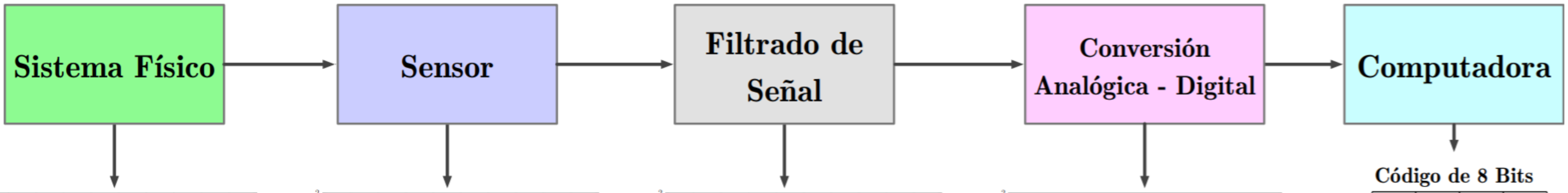
Cuando la ecuación de ajuste no es lineal $\longrightarrow$ Muchas veces conviene linealizar la ecuación

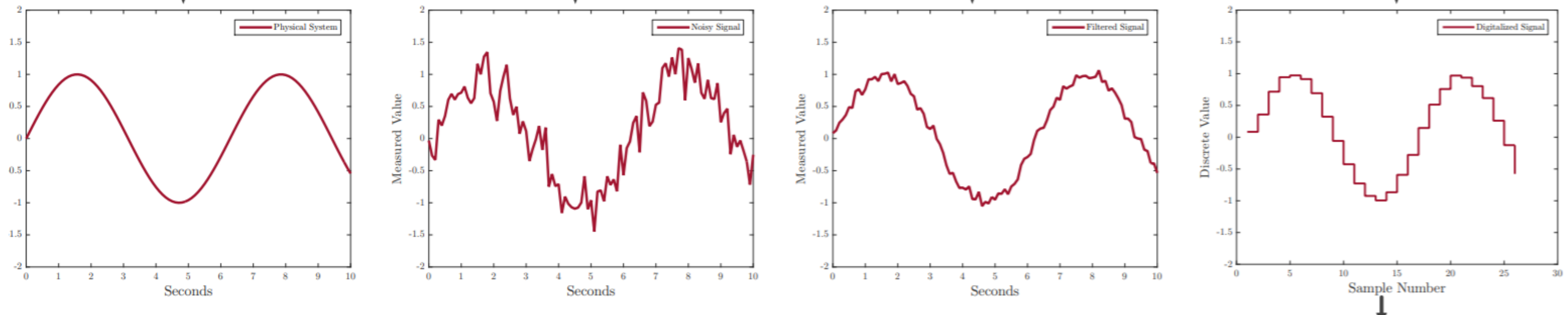
$y = A * b^x \rightarrow ln(y) = ln(A) + x * ln(b)$ $\longrightarrow$ Se grafica $ln(y)$ vs. x

$y = A * x^b \rightarrow ln(y) = ln(A) + b * ln(x)$ $\longrightarrow$ Se grafica $ln(y)$ vs. $ln(x)$

Esto permite evaluar más fácilmente la presencia de valores atípicos, y determinar si el modelo es adecuado.

Adquisición digital de datos

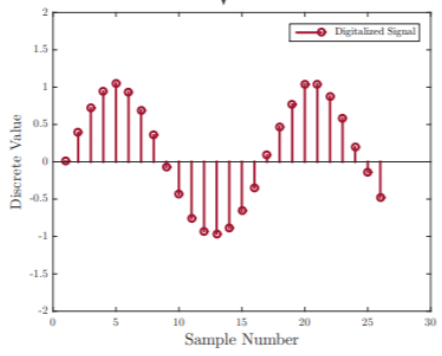




Señal Física

Señal Eléctrica

Señal Filtrada



Señal Digitalizada

Código de 8 Bits

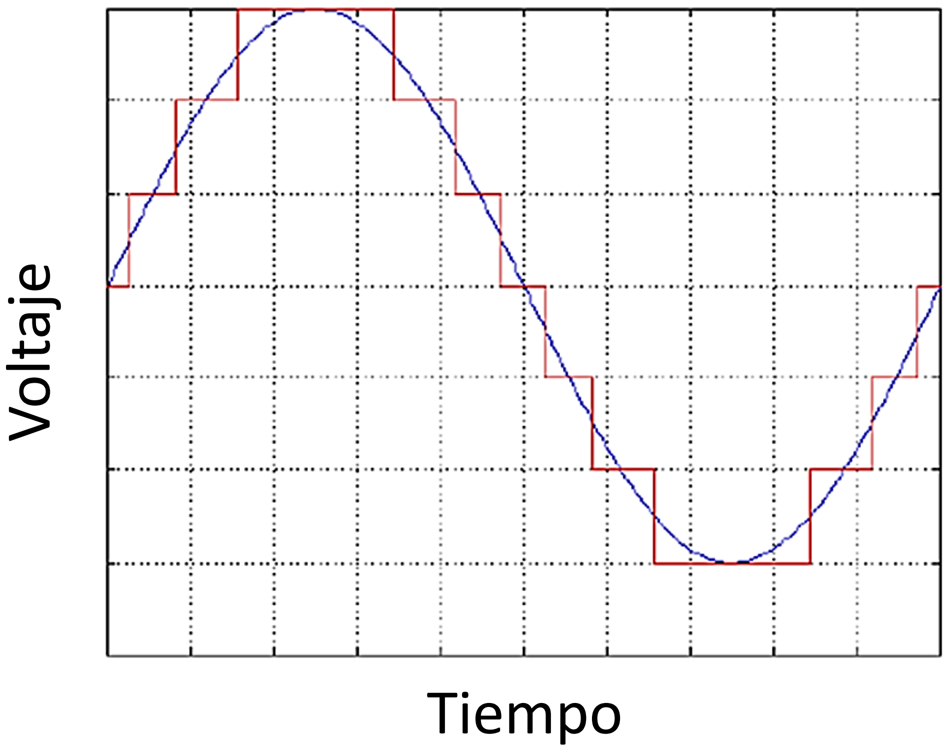
0	1	1	1
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0
0	0	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Un sensor "capta" magnitudes físicas. Tiene alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir, y convierte la magnitud a una señal eléctrica.

https://es.wikipedia.org/wiki/Adquisici%C3%B3n_de_datos

Conversor analógico-digital

- Tanto la calidad del sensor como del proceso de digitalización determinan la calidad de la señal adquirida.
- Digitalizar es discretizar una señal continua.



Conversor analógico-digital

- Resolución en voltaje: Cada dato medido se representa utilizando una “x” cantidad de números binarios (bits).

2 bits → 00, 10, 01, 11

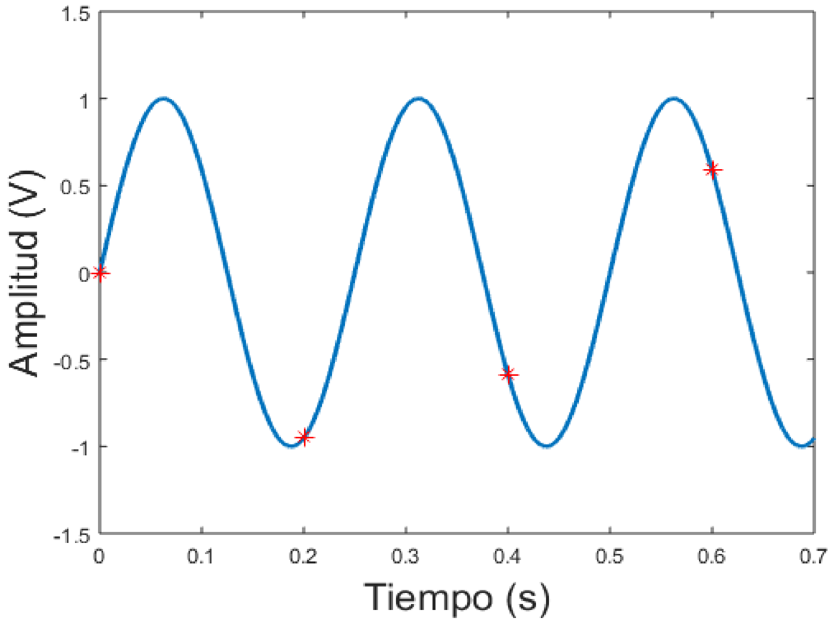
3 bits → 000, 010, 001, 011, 100, 110, 101, 111

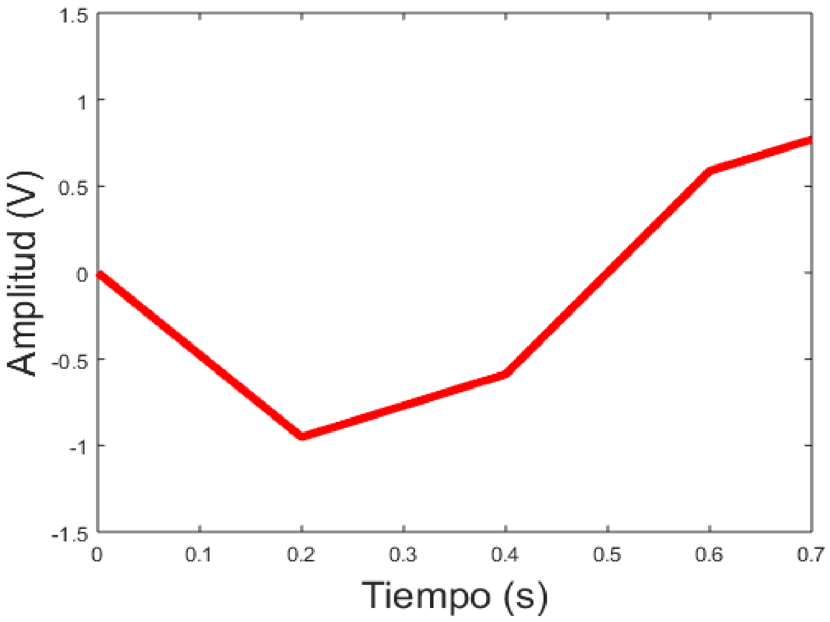
x bits → 2^x números

$$\text{Resolución} = \frac{\text{Rango}}{2^x}$$

Conversor analógico-digital

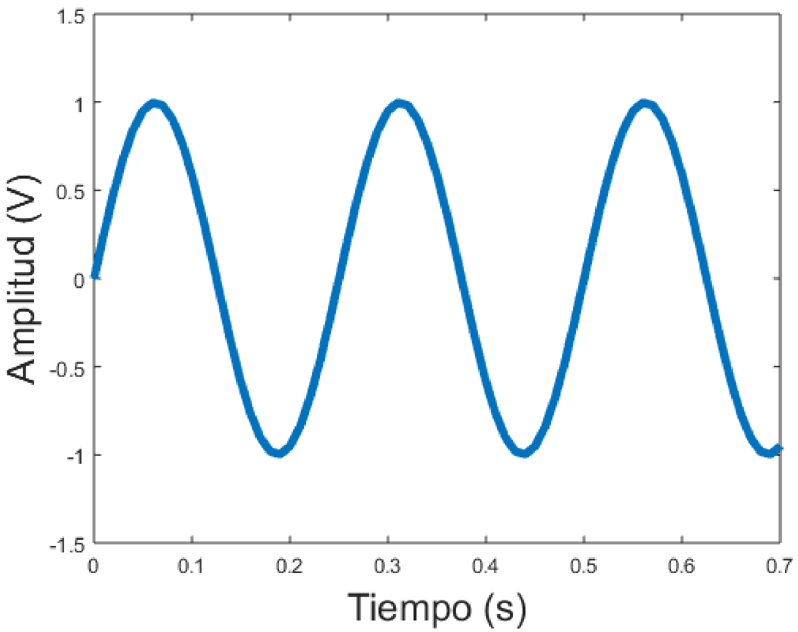
- Así como la cantidad de bits determina los niveles en los que se discretiza la señal, la frecuencia de muestreo determina cada cuánto se toma una muestra.
- Frecuencia de muestreo = $\frac{\#\, de\ muestras}{segundo}$
- ¿Qué sucede si se hace un “mal muestreo”?

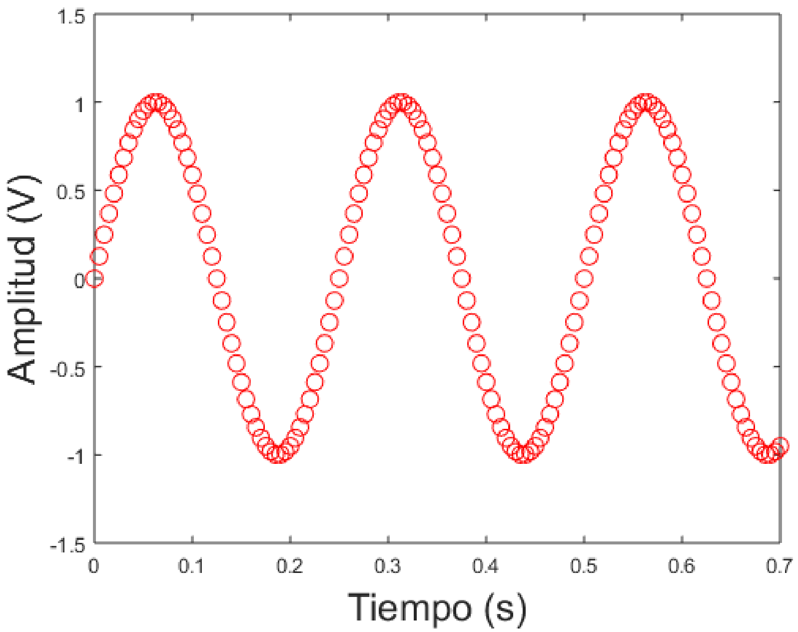




Conversor analógico-digital

- La frecuencia de muestreo determina qué frecuencias de la señal original pueden ser recuperadas.
- Para ver que existe una oscilación, es necesario una frecuencia de muestreo de al menos el doble de la que se quiere detectar (criterio de Nyquist).
- Para definir una oscilación, se usa una frecuencia de muestreo de al menos diez veces la frecuencia que se quiere detectar.





Conversor analógico-digital

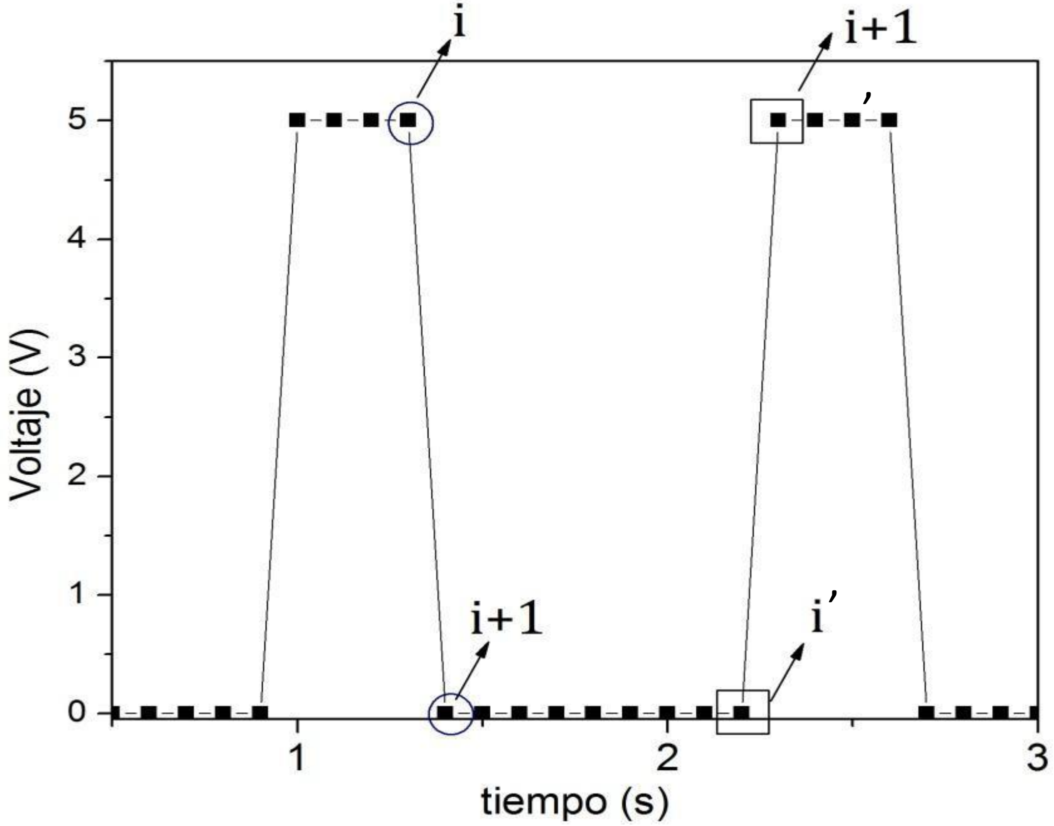
- Resolución (tensión): 13 bits
- Frecuencia de muestreo máxima: 48000 Hz
- 3 canales analógicos, 1 digital

Foto-interruptor

- Permite obtener señales muy precisas para determinar tiempo entre eventos.
- Principio de funcionamiento: en uno de los brazos se emite un haz infrarrojo (IR), que llega a un detector rápido IR en el brazo opuesto.
- Cuando el detector está recibiendo el haz, la señal de salida es de ~0V, mientras que si algo obtura al haz, la salida es de +5V (o viceversa).
- La salida es analógica. Para ser digitalizada, debe pasar por el conversor analógico/digital.

Foto-interruptor

- Medición de ejemplo



En este caso, lo que interesa son los tiempos en los que ocurre el evento, y no el valor de voltaje de salida.

Actividad

Obtener el valor de la aceleración gravitatoria

- Calcular g utilizando el valor de T de la experiencia 2 (N = 200).
- Comparar con la determinación de g a partir de medir T para péndulos con diferentes longitudes (10), empleando un modelo lineal con el método de cuadrados mínimos.

$f(x) = mx$ vs $f(x) = mx + q$ ¿Resulta 0 la ordenada al origen?

Entrega (18/09)

- Informe completo (incluyendo experiencia 2)