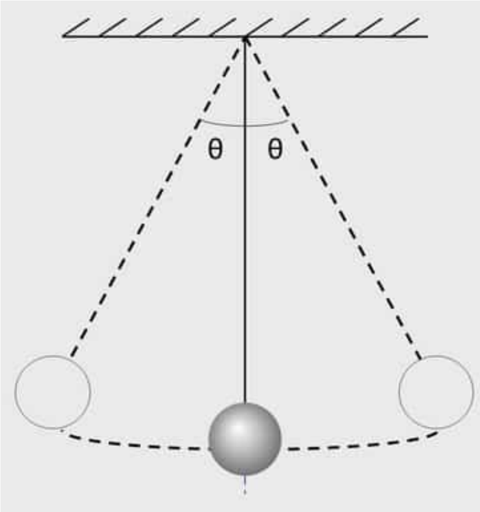
Cálculo de la aceleración de la gravedad: método de cuadrados mínimos

Laboratorio 1
Departamento de física -FCEyN- UBA

Experimento: péndulo simple



Recordamos:

- Pequeñas oscilaciones
- hilo inextensible y de masa despreciable
- movimiento en el plano
- ¿Qué más?

El período del péndulo está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Actividad: Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del periodo de un péndulo para distintas longitudes utilizando un modelo lineal

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hago un cambio de variables

T no está relacionada de forma lineal con la longitud l

Actividad: Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del periodo de un péndulo para distintas longitudes utilizando un modelo lineal

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

T no está relacionada de forma lineal con la longitud l

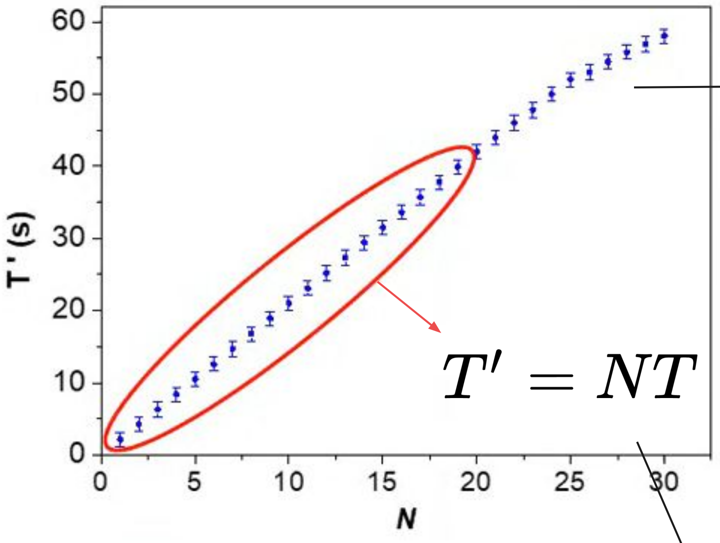
Hago un cambio de variables

$$\underbrace{T}_{y} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\underbrace{\sqrt{l}}_{x} \longrightarrow m = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

$$\underbrace{T^2}_{y} = \frac{4\pi^2}{g}\underbrace{l}_{x} \longrightarrow m = \frac{4\pi^2}{g}$$

¿Vamos a volver a medir 100 veces el periodo del péndulo para cada longitud?

Veamos qué ocurre si mido varios periodos seguidos:



$$T' = NT$$

Para una dada longitud l fija

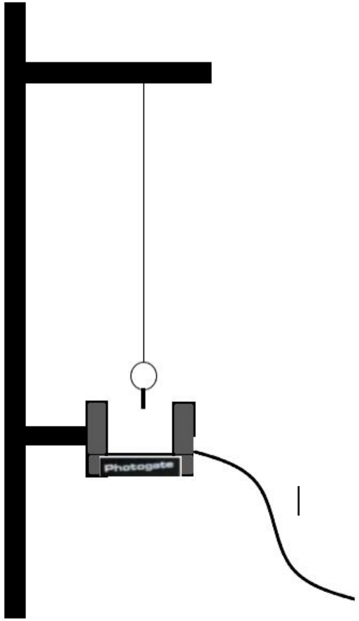
Se va frenando

Hasta un determinado N, la respuesta es lineal

Se puede concluir que podría medir 1 sola vez N periodos juntos en lugar de medir N veces cada periodo.

Prueben!

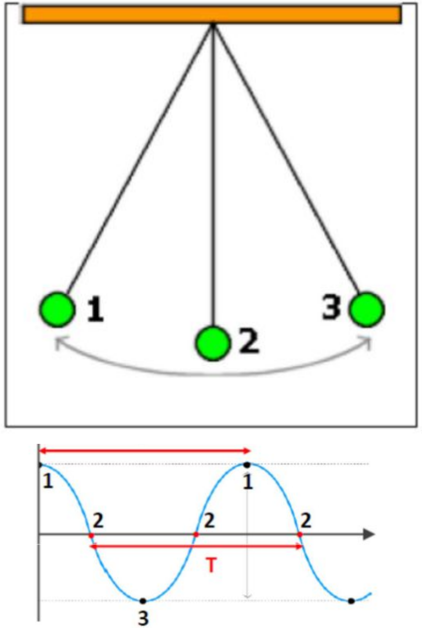
Actividad: Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del periodo de un péndulo para distintas longitudes utilizando un modelo lineal



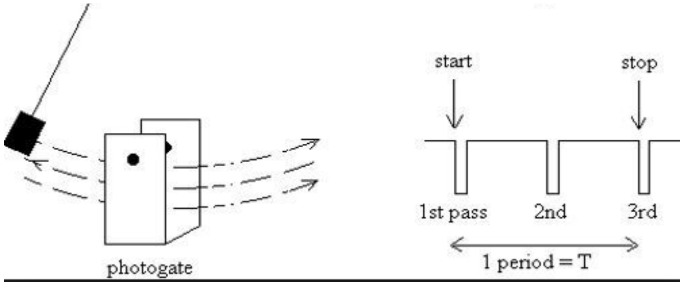
1. Preparar el experimento según el esquema. Agregar un transportador para medir ángulos.
2. Tener en cuenta todas las suposiciones anteriores del péndulo simple.
3. Medir el periodo del péndulo. Elegir una frecuencia de muestreo adecuada.
4. Variar al menos 10 veces las longitudes del péndulo.
5. Calcular los errores absolutos de T^2 y l.
6. Calcular los errores relativos de T^2 y l compararlos. ¿Porqué?
7. Graficar T^2 vs l colocando las incertezas en la variable del eje y.
8. Realizar un ajuste lineal mediante el método de cuadrados mínimos (ponderado o no ponderados?)
9. Evaluar la calidad del ajuste.
10. Obtener $\bar{g} \pm \Delta g$ $\longrightarrow$ Se puede estudiar la precisión y la exactitud de su resultado?

¿Cómo medimos el periodo?

Cada periodo lo contamos como,

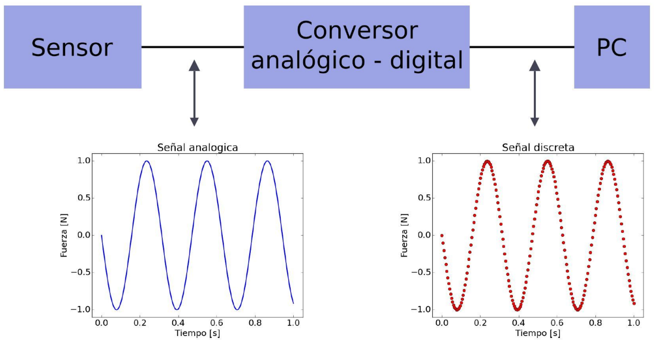


En nuestro dispositivo



Desde el Motion Daq

Repaso clase adquisición de datos



Sensor DAQ

→ 3 Canales analógicos y 1 Canal Digital

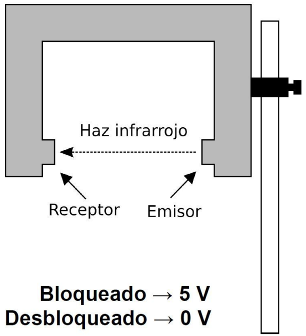
→ Resolución tensión: 13 bits
(2^13 = 8192 niveles)

→ Frecuencia de muestreo máxima:
48 000 Hz = (21 ms)$^{-1}$

→ Precision temporal:
41.67 ns (24 MHz)

Elegir bien la frecuencia de muestreo.

Photogate o foto-interruptor (sensor de barrera)



Bloqueado → **5 V**
Desbloqueado → **0 V**

Especificaciones:
Detector rise time < 500ns
Detector fall time < 50ns

Coeficiente de correlación lineal de Pearson: Repaso

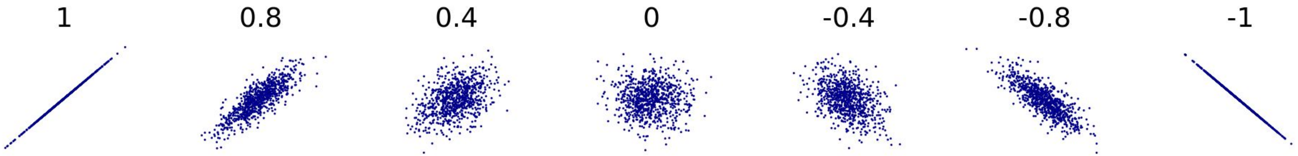
Sean dos variables **x** e **y** de las cuales queremos ver la existencia de una correlación,

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y};\quad \begin{cases} Cov(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\[2ex] \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})}{N}} \\[2ex] \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})}{N}} \end{cases}$$

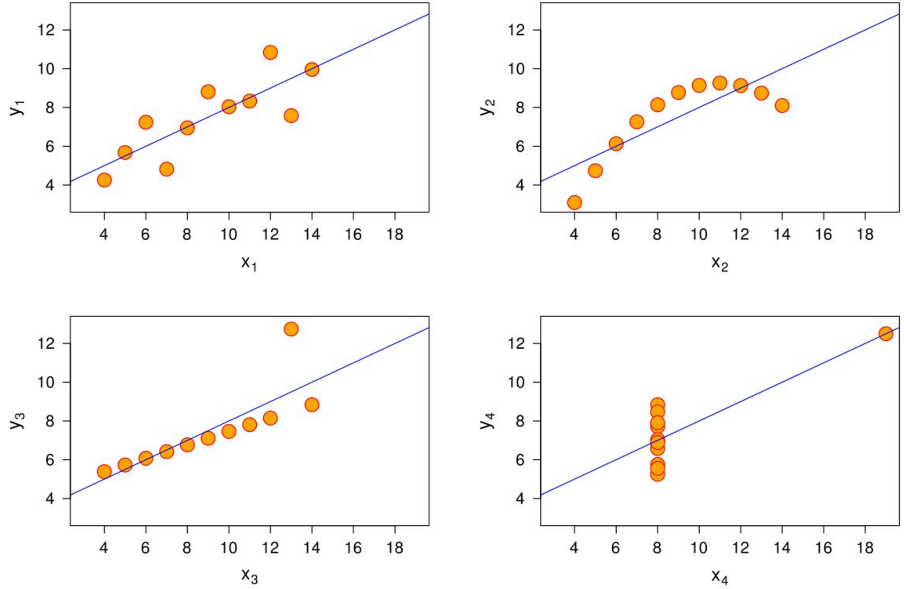
Si **x** e **y** están correlacionados linealmente:

$$|r| = 1$$

Su signo va a depender de la pendiente de la recta



Limitaciones del método: El cuarteto de Anscombe



Estos cuatro gráficos poseen las mismas propiedades estadísticas,

- Mismo valor medio y varianza de **x** y de **y**.
- Mismo R^2
- Estos datos ajustan exactamente igual de bien a una misma función lineal $y = 3 + 0{,}5x$

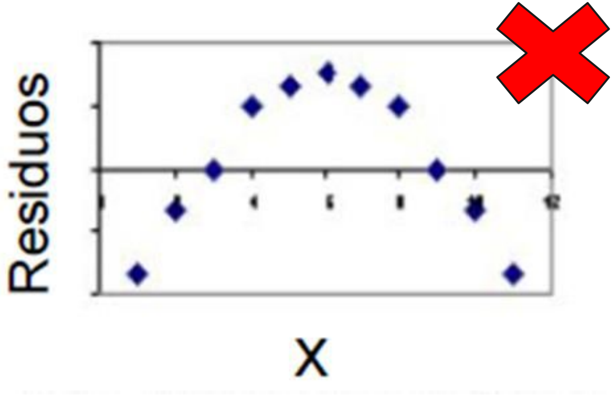
Propiedad	Valor
Media de cada una de las variables x	9.0
Varianza de cada una de las variables x	11.0
Media de cada una de las variables y	7.5
Varianza de cada una de las variables y	4.12
Correlación entre cada una de las variables x e y	0.816
Recta de regresión	$y = 3 + 0.5x$

Necesito usar un criterio extra!

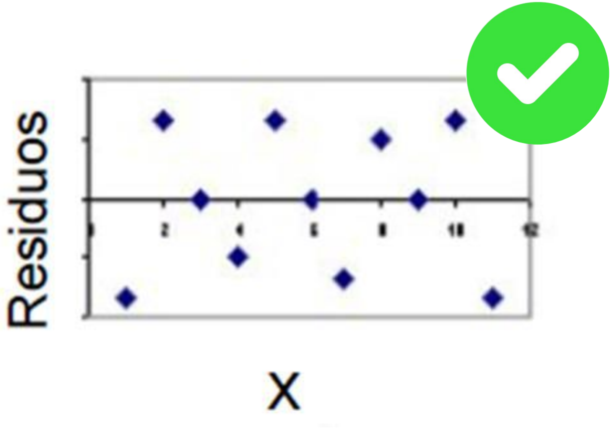
Adaptado de F.J. Anscombe, "Graphs in Statistical Analysis," American Statistician, 27 (1973), 17-21

Hay que mirar el gráfico: Residuos

Analizando el gráfico de los residuos en función de x:



Caso 2



Caso 1

En los casos 2,3 y 4, la distribución de los datos alrededor de la recta **no** era normal (gaussiana). Tenían estructura (no son aleatorios los puntos).

Resultados a obtener

- ✓ Gráfico de T^2 vs ℓ junto con un ajuste lineal mediante cuadrados mínimos.
- ✓ Determinar a y b con sus errores.
- ✓ Determinar g y su error a partir de a y b.
- ✓ Checkear si la ordenada al origen obtenida en el ajuste es compatible con 0.
- ✓ Informar el valor del coeficiente de correlación de Pearson.
- ✓ Checkear hipótesis:
- Sigma (y) = Sigma(T^2) comparables entre distintas longitudes
- Incertezas en y son dominantes (frente a las en x)

¿Empezamos a medir?

¿Preguntas?