Medición, incertidumbre y estadística
(una breve introducción)

Luciano A. Masullo

Laboratorio 1 (1er Cuatrimestre 2018)
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidad

- Variable aleatoria: es una cantidad cuyo valor no es fijo sino que puede tomar diferentes valores como resultados de un experimento aleatorio.

  - La variable aleatoria toma una serie de valores asociados a un conjunto de eventos posibles
  - No se puede predecir el próximo resultado (o valor de la variable aleatoria) pero sí se puede, en principio, conocer su ***probabilidad***.

- Probabilidad: es una función que va de un conjunto (de eventos posibles) y les asigna un valor entre 0 (imposible) y 1 (seguro).

  - La suma de las probabilidades de todos los elementos del conjunto de eventos debe ser igual a 1.
  - El conjunto de eventos posibles puede ser discreto (ej: “resultados de tirar un dado”) o continuo (ej: “resultados de la medición del lado de una mesa”).

Resultados de un experimento

Tirar un dado N = 100 veces

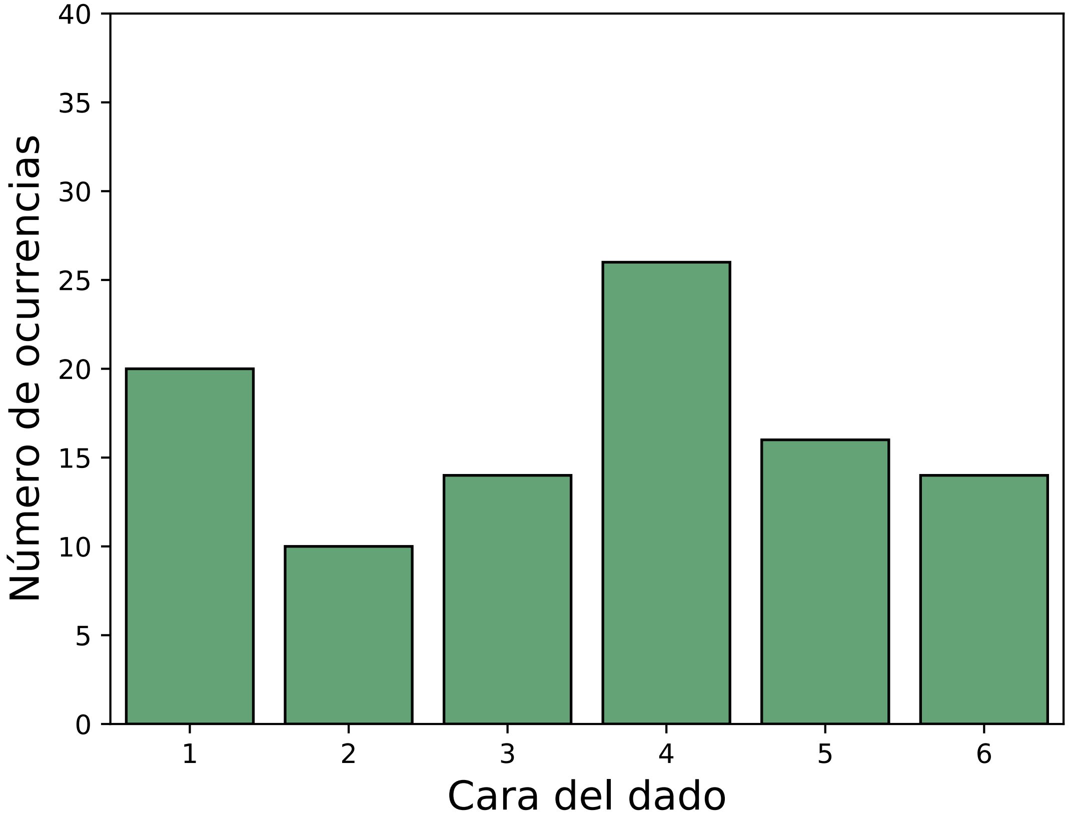
Medición #	Cara del dado
1	2
2	6
3	1
…	…
99	4
100	1

Medir el período de un faro N = 100 veces

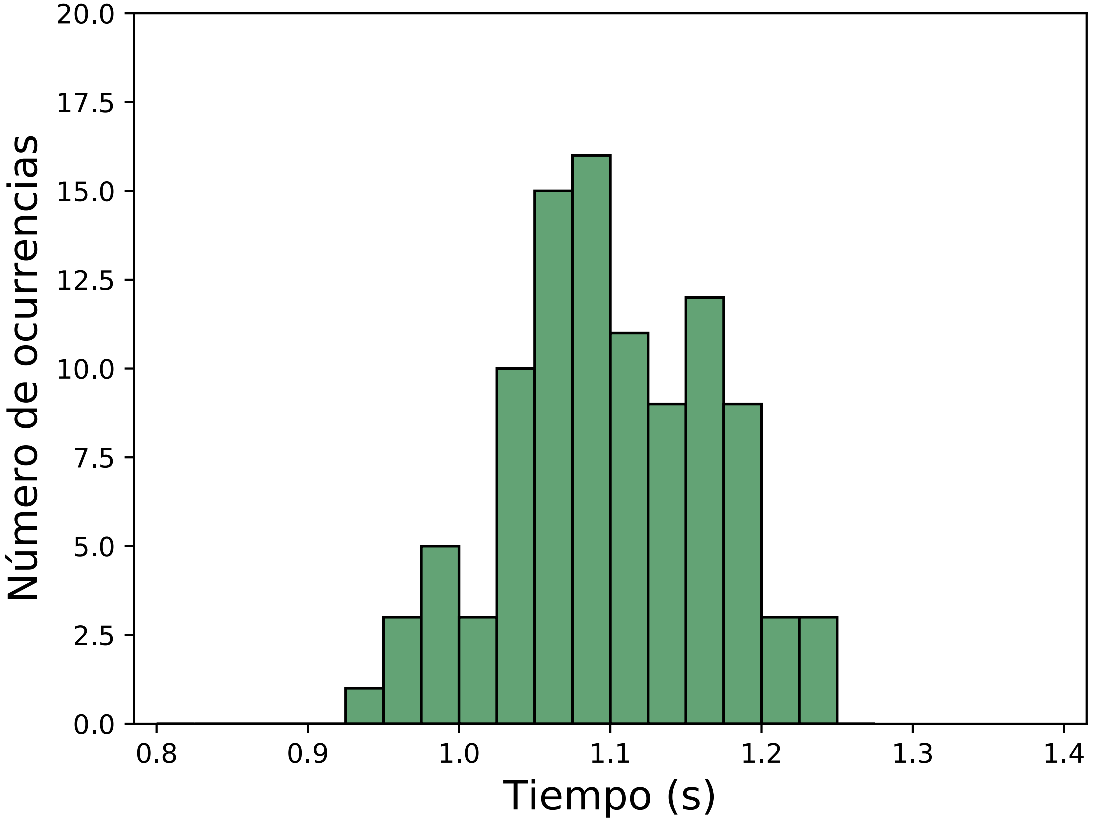
Medición #	Tiempo (s)
1	1,02
2	0,98
3	1,07
…	…
99	1,22
100	1,10

Resultados de un experimento: histograma

Tirar un dado N = 100 veces



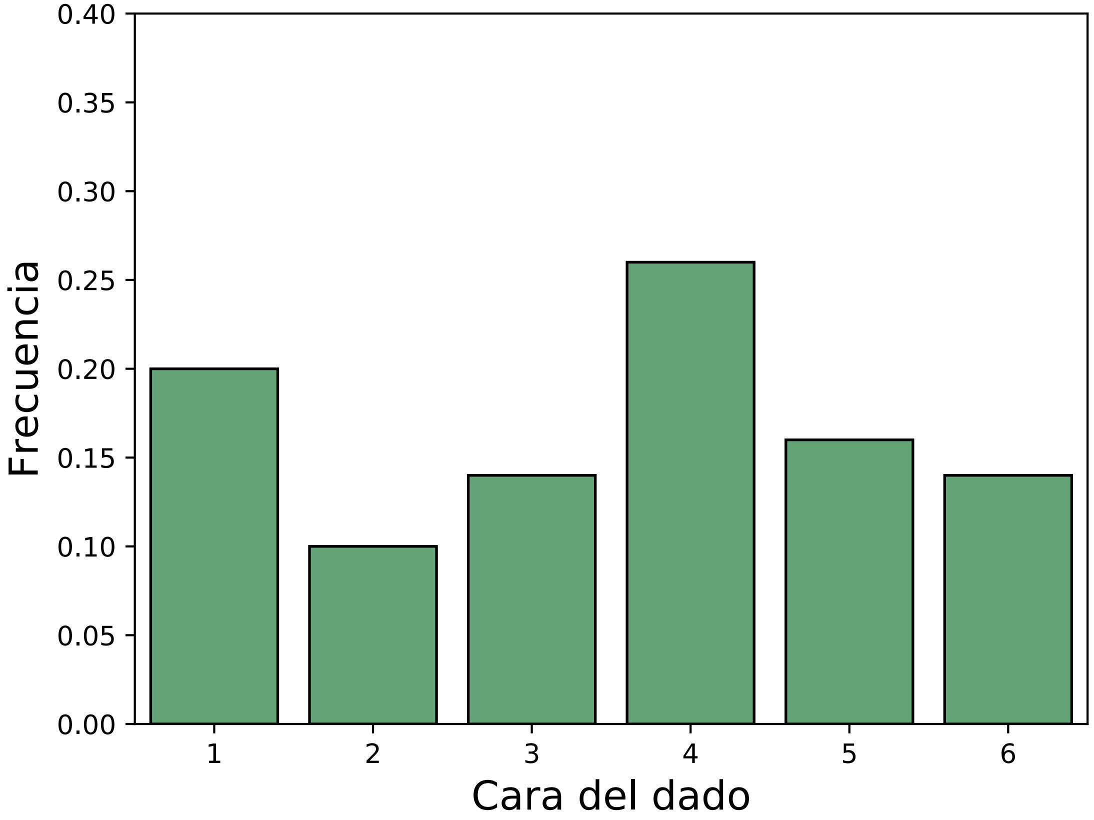
Medir el período de un faro N = 100 veces



Histograma normalizado

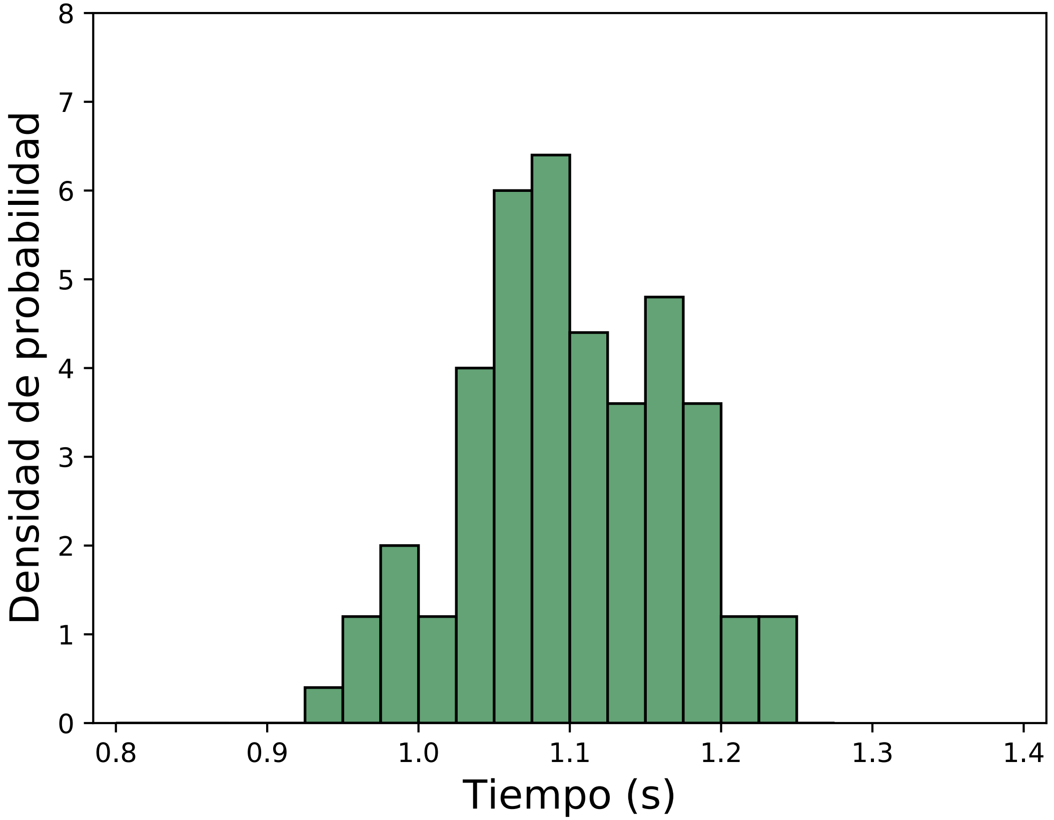
F_k = frecuencia del resultado k-ésimo
n_k = número de resultados en el bin k-ésimo
d_k = densidad de probabilidad del bin k-ésimo
a = tamaño del bin (bin size)
N = número total de eventos

Tirar un dado N = 100 veces



$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

Medir el período de un faro N = 100 veces

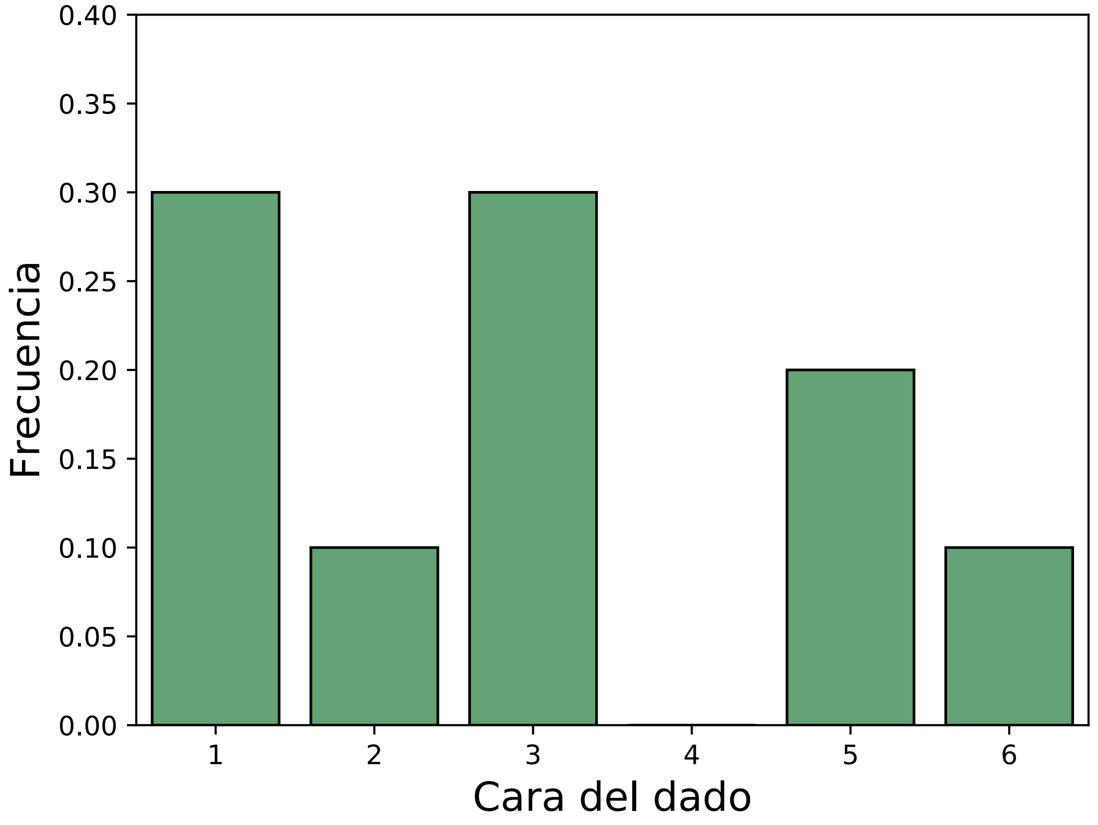


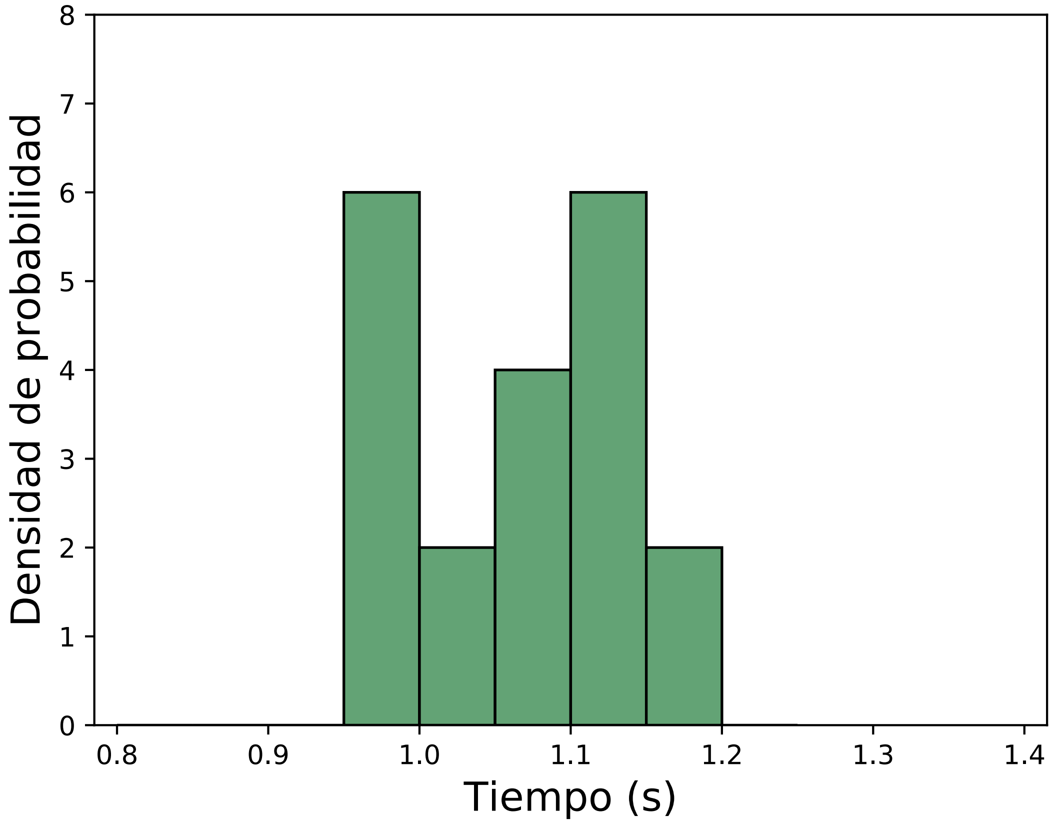
Normalización: $\sum_k F_k = 1$

$$F_k = d_k\, a \quad \text{con} \quad d_k = \frac{n_k}{a\, N}$$

Distribución de probabilidad

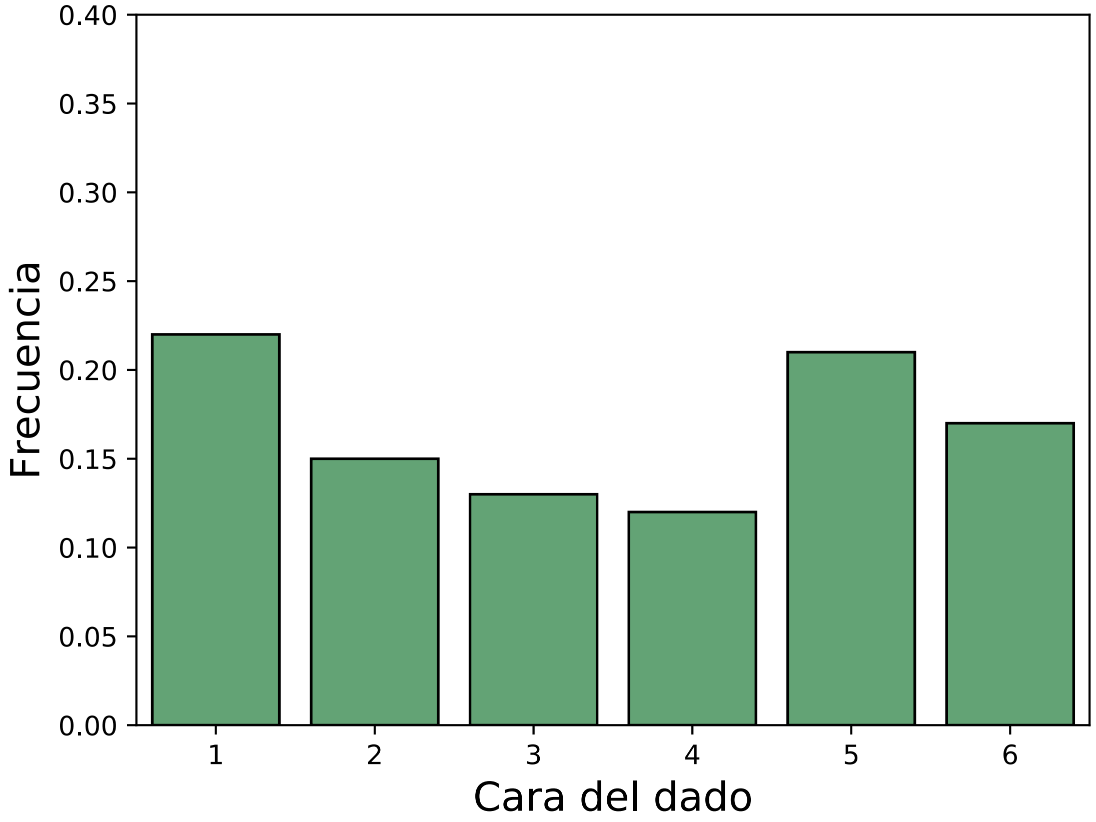
N = 10

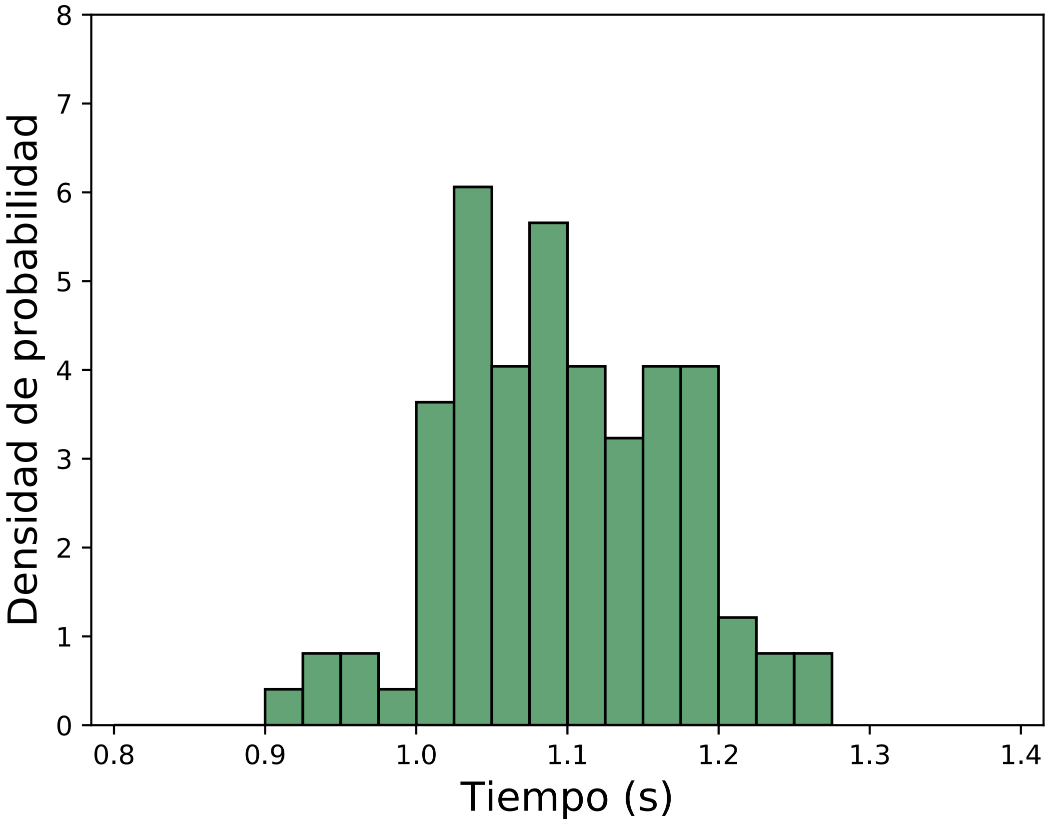




Distribución de probabilidad

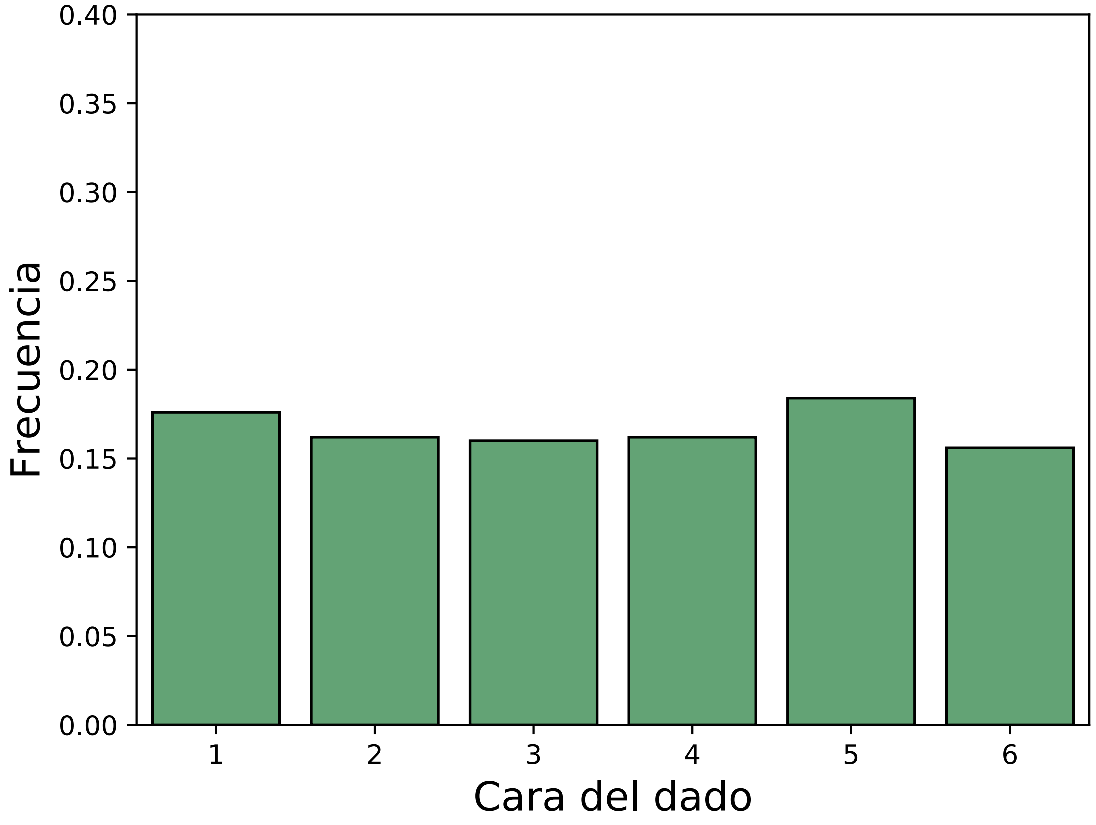
N = 100

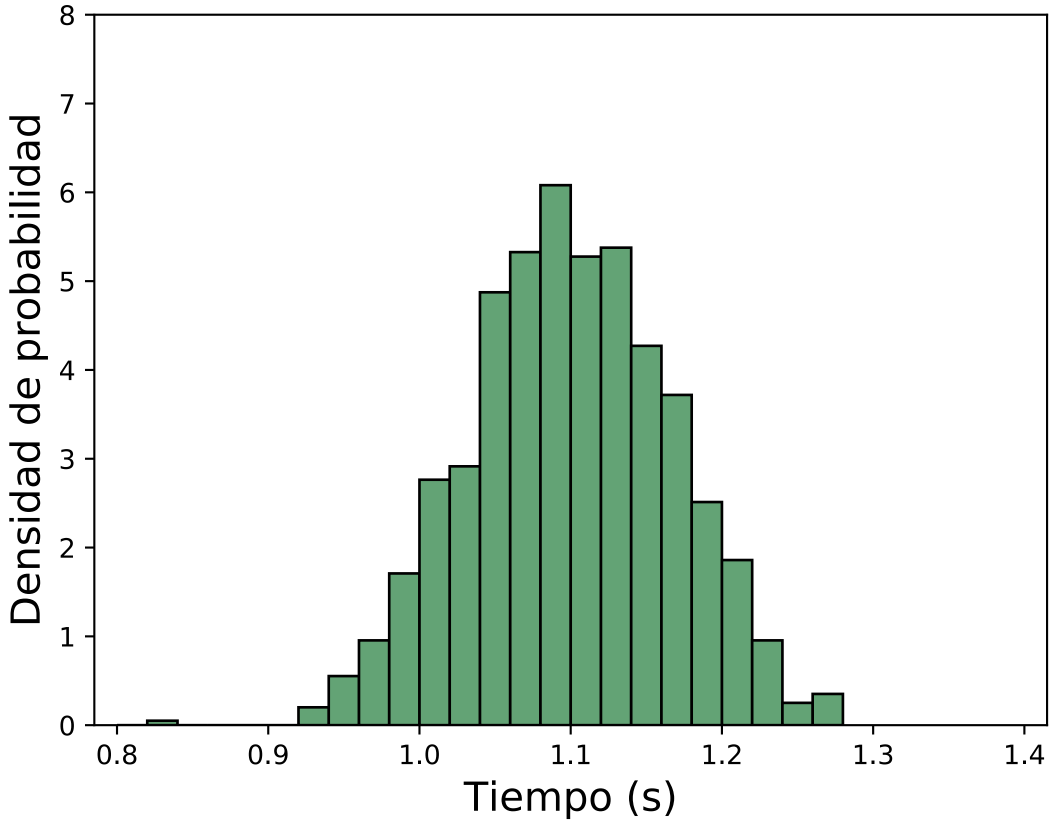




Distribución de probabilidad

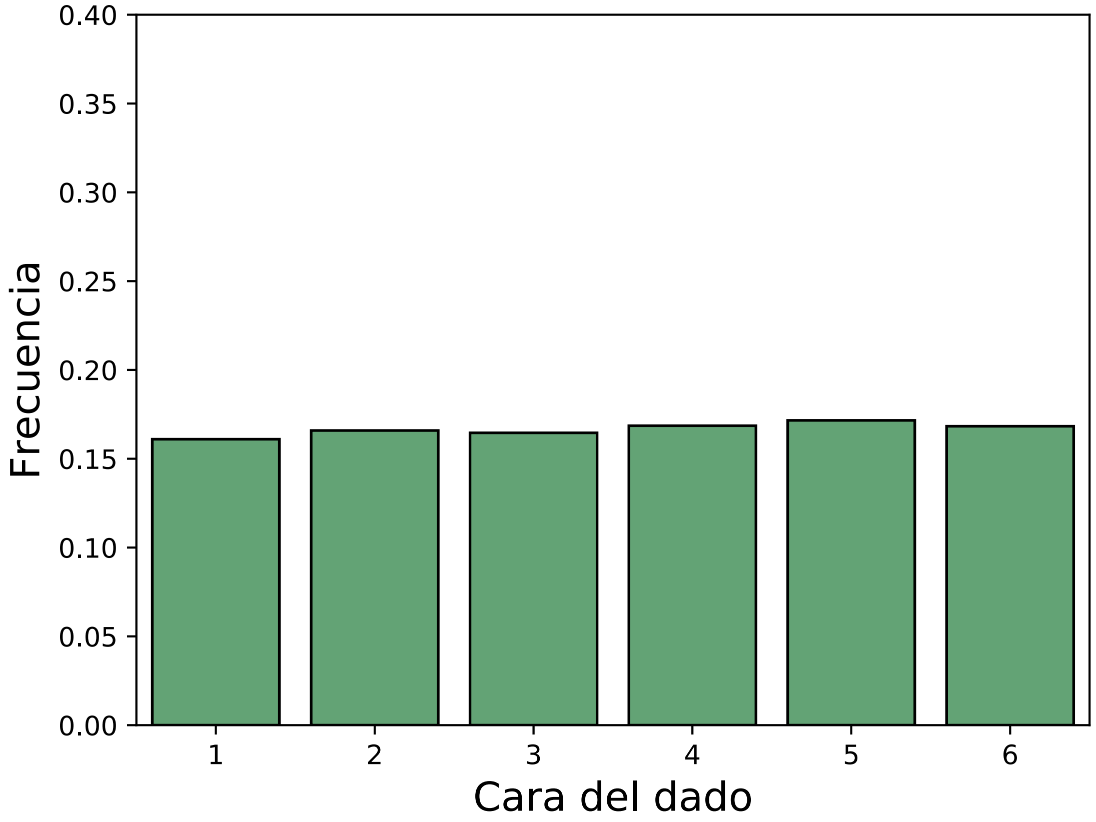
N = 1000

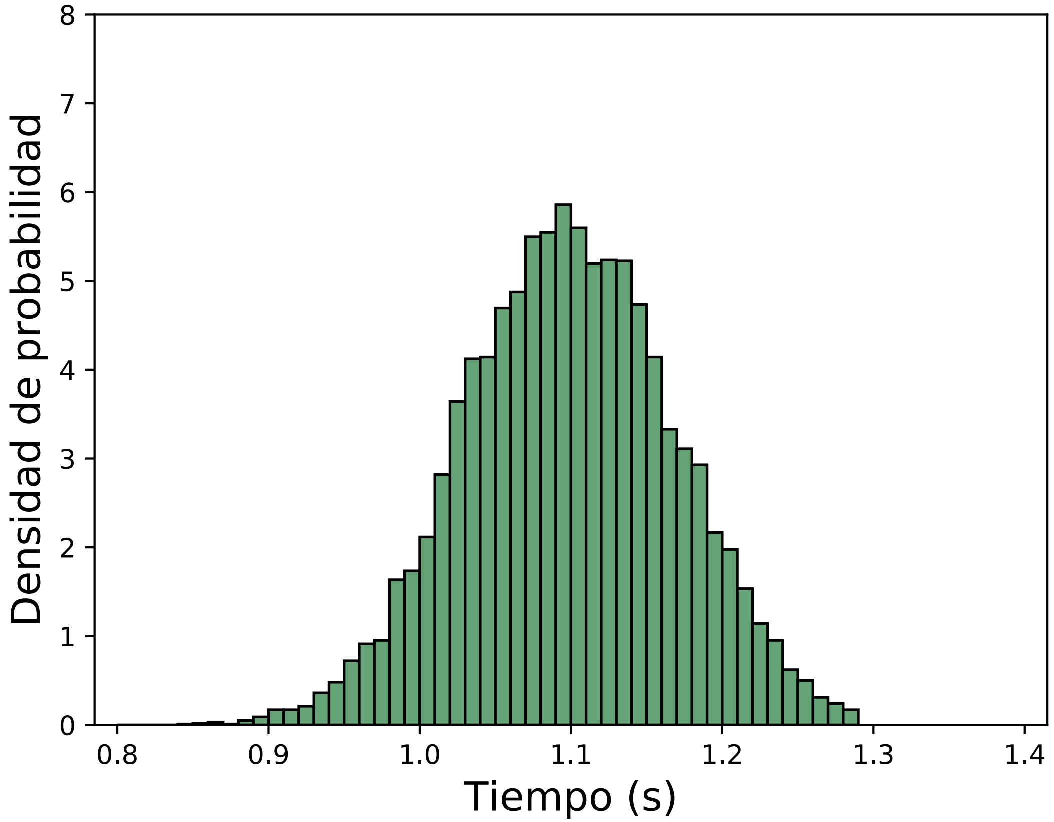




Distribución de probabilidad

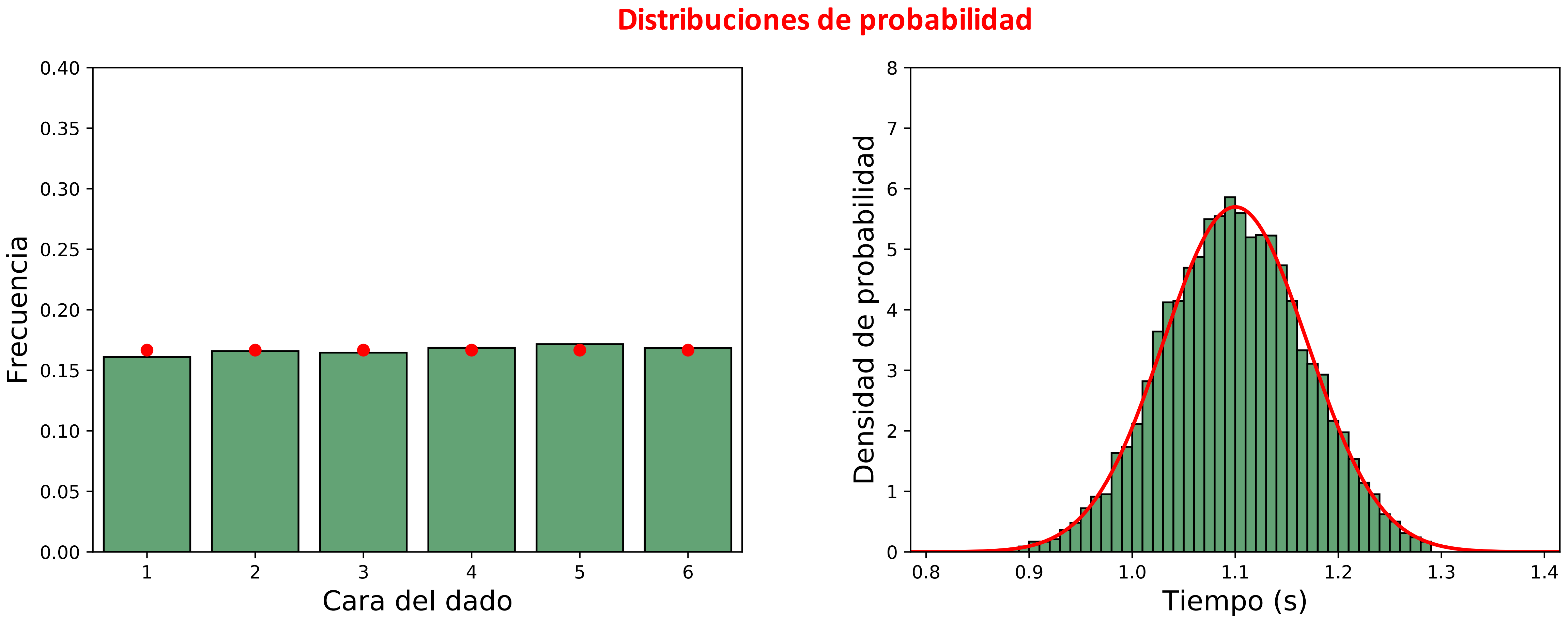
N = 10000





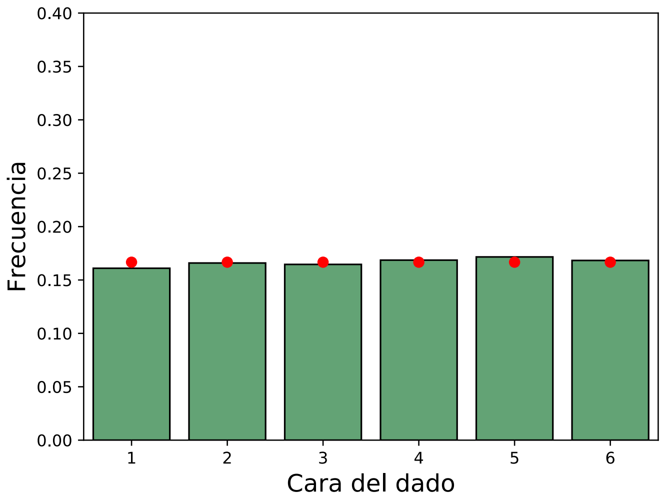
Distribución de probabilidad

N = 10000



Distribuciones de probabilidad discreta y continua

Discreto

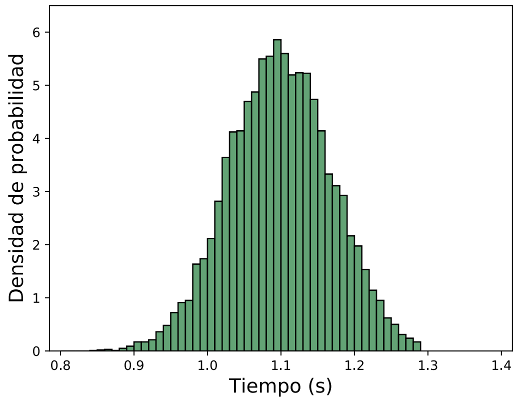


$$F_k \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} P_k$$

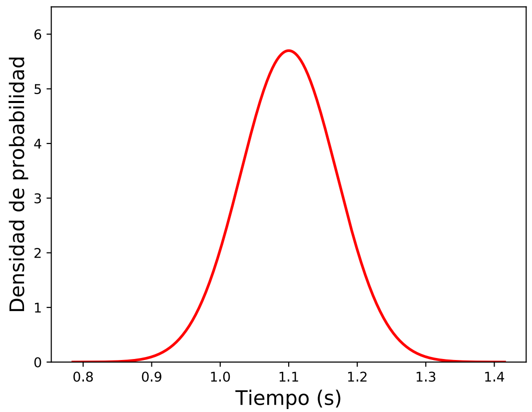
$$\sum_k P_k = 1$$

$$\boxed{F_k = \frac{n_k}{N}}$$

Continuo



$$N \to \infty$$
$$a \to 0$$



$$F_k \to f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Condición de normalización

a: bin size

$$\boxed{F_k = d_k\, a \quad \text{con} \quad d_k = \frac{n_k}{a\, N}}$$

Valor medio, varianza y desviación estándar

Caso discreto

Valor medio $$E(X) = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k = \sum_k x_k F_k$$

Varianza $$VAR(X) = \frac{1}{N}\sum_k n_k (x_k - \bar{X})^2 = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$$

Caso continuo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx$$

Desviación estándar $$SD(X) = \sqrt{VAR(X)}$$

Notaciones

$$E(X) \equiv \langle X \rangle \equiv \bar{X}$$

$$VAR(X) \equiv \sigma^2$$

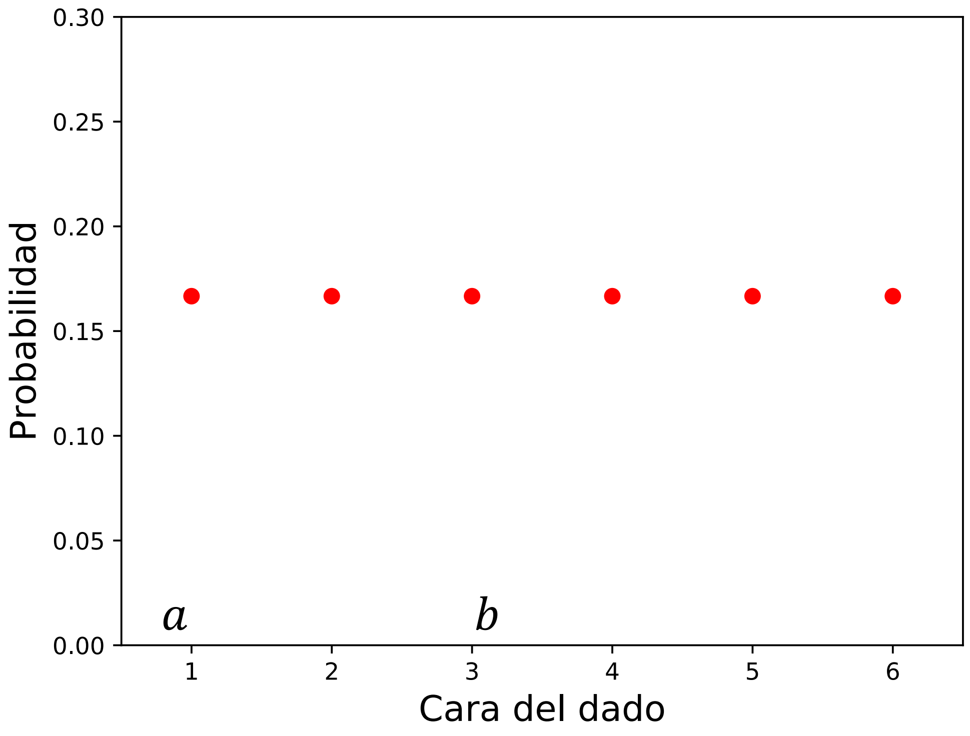
$$SD(X) \equiv \sigma$$

X: variable aleatoria (ej: resultado de una medición)
x_k: resultado k-ésimo
x: resultado continuo
x es análogo a x_k
F_k: frecuencia del resultado x_k
f(x)dx es análogo a F_k
f(x): densidad de probabilidad del resultado x
N: número total de resultados (ej: mediciones)
n_k: número de veces que se obtuvo x_k

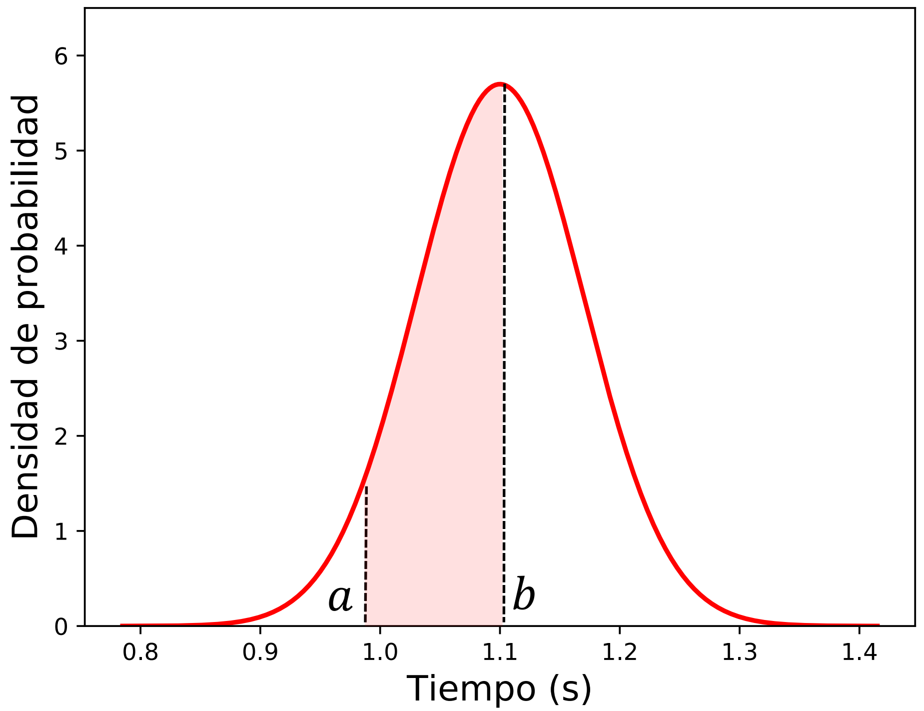
Cálculo de probabilidad en un cierto intervalo

¿Cuál es la probabilidad de que una medición esté comprendida entre a y b?

¿Tiene sentido preguntarse cuál es la probabilidad de medir un cierto *número real*?



$$Prob\,(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} P_k$$



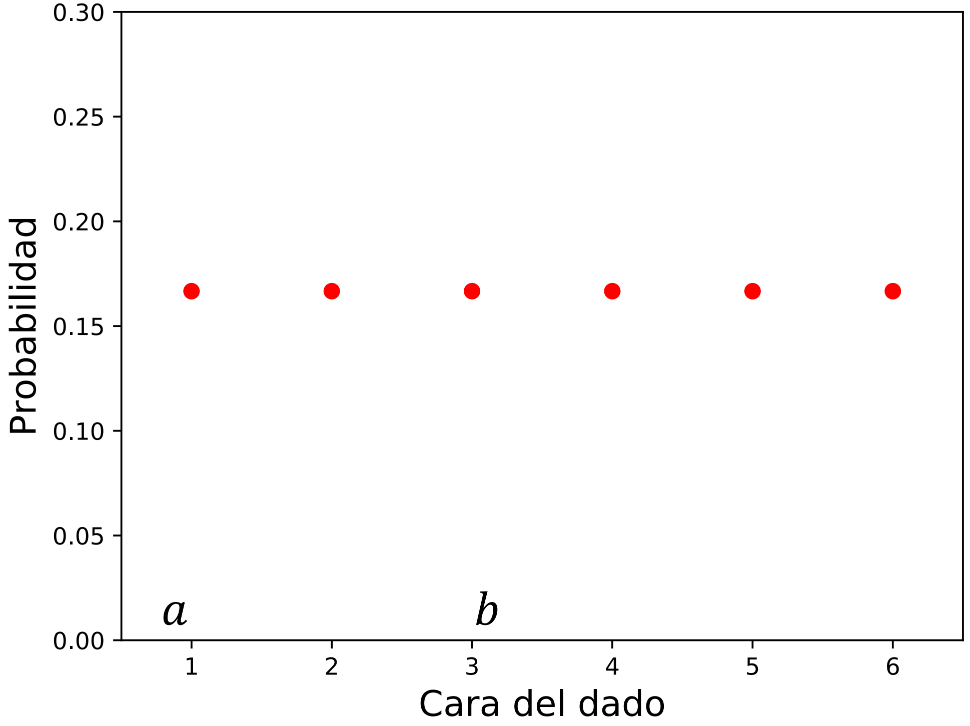
$$Prob\,(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Cálculo de probabilidad en un cierto intervalo

¿Cuál es la probabilidad de que una medición esté comprendida entre a y b?

¿Tiene sentido preguntarse cuál es la probabilidad de medir un cierto *número real*?

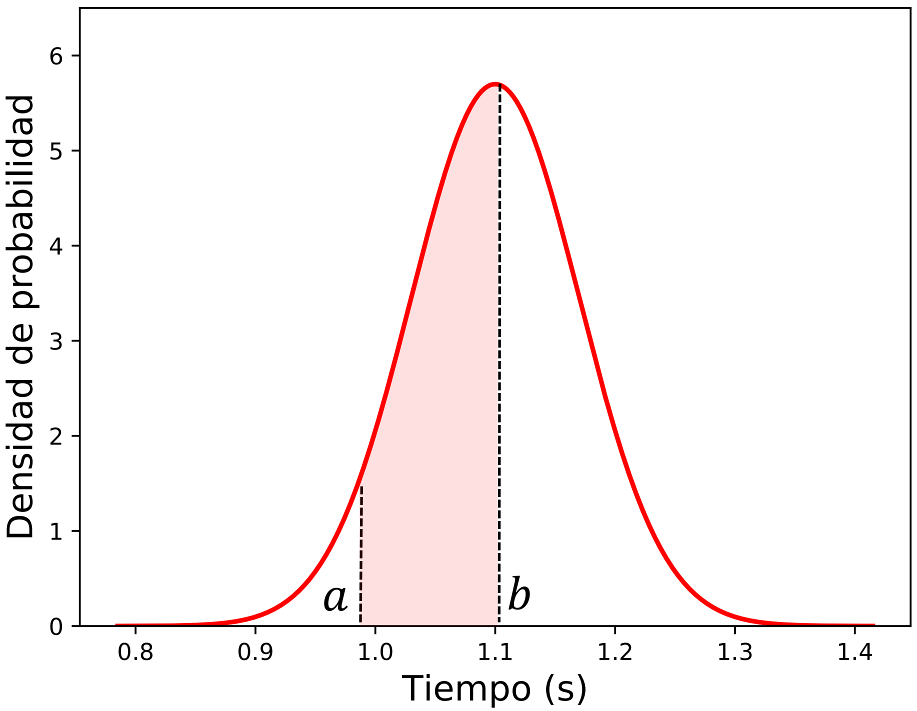
Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad que al tirar el dado salga 3 o menor que 3?



$$\boxed{Prob\,(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} P_k}$$

ej: $Prob\,(1 \leq X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} P_k = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 0,50$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad que al medir el período del faro el cronómetro indique entre 1,0 y 1,1 s?

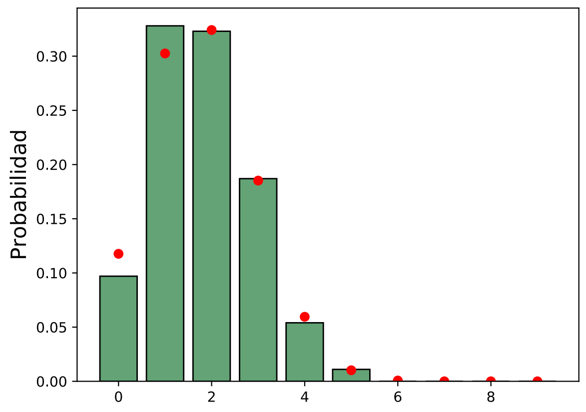


$$\boxed{Prob\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$

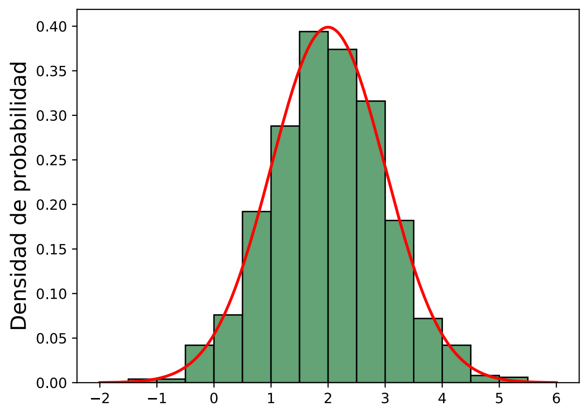
ej: $Prob\,(1,0 \leq X \leq 1,1) = \int_{1,0}^{1,1} f(x)dx \approx 0,46$

Ejemplos de distribuciones de probabilidad

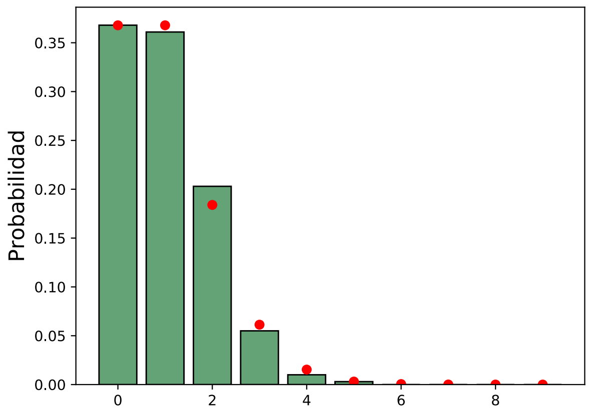
Binomial



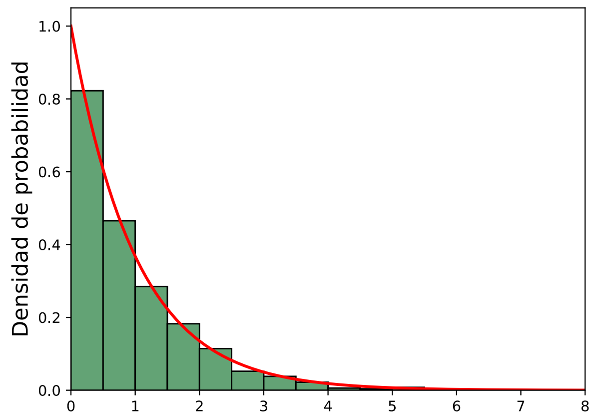
Gauss



Poisson

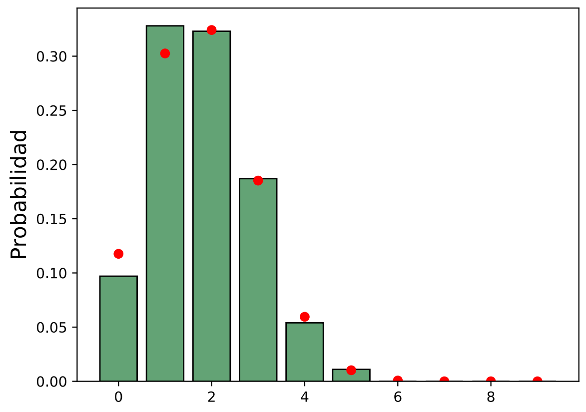


Exponencial

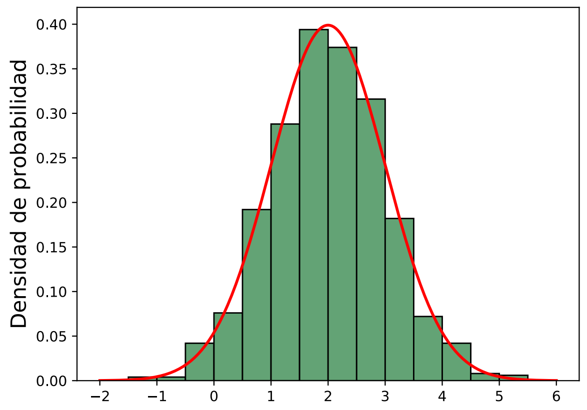


Ejemplos de distribuciones de probabilidad

Binomial

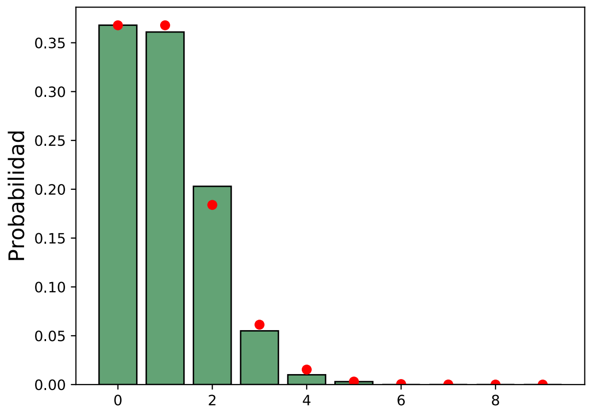


Gauss

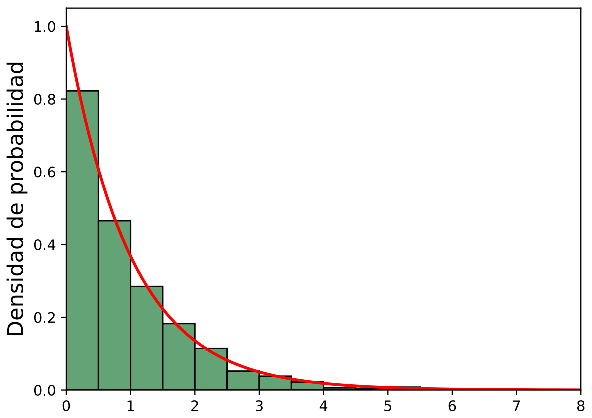


¡La de Gauss <u>no es la única</u> distribución de probabilidad!

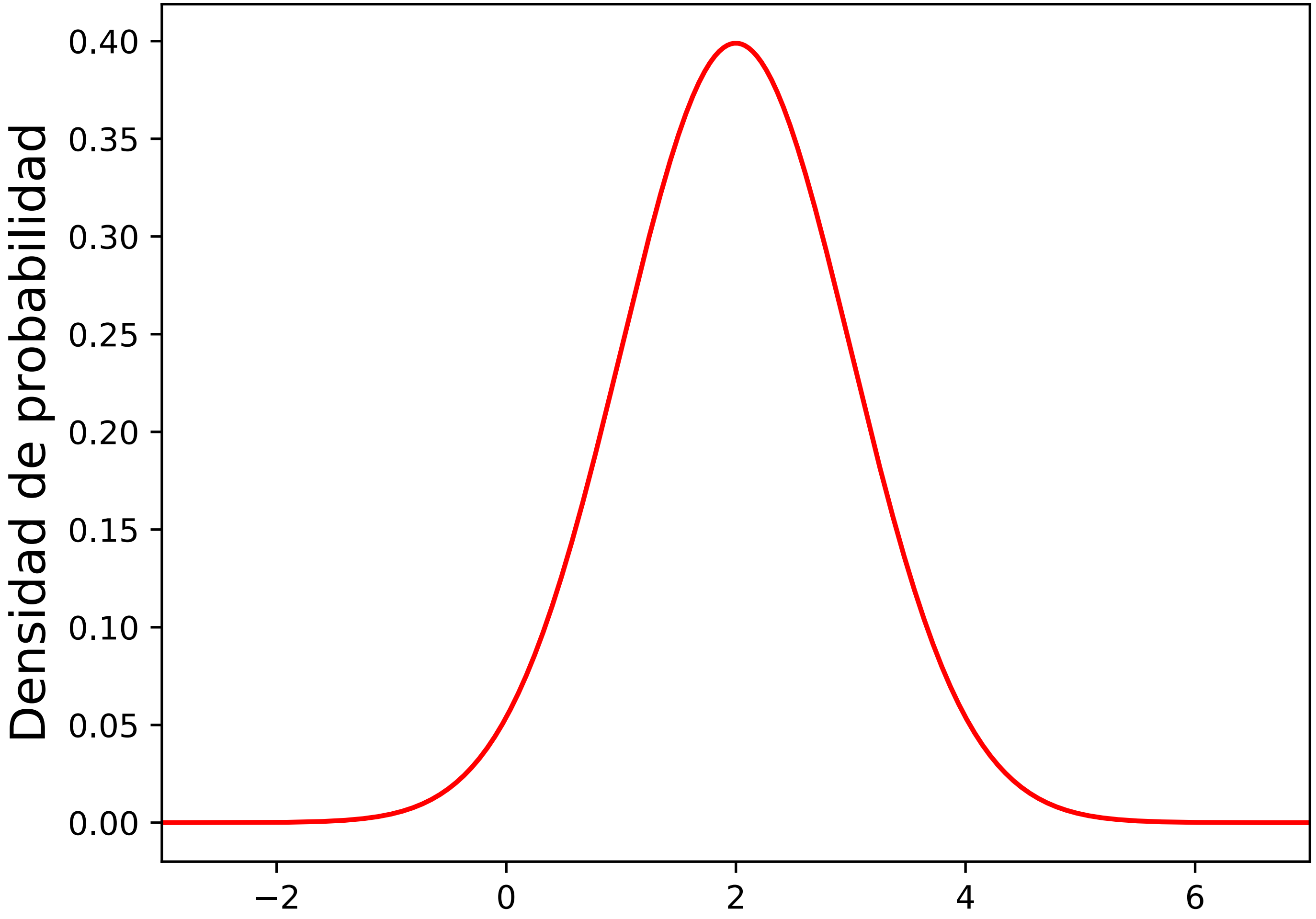
Poisson



Exponencial



Distribución de Gauss

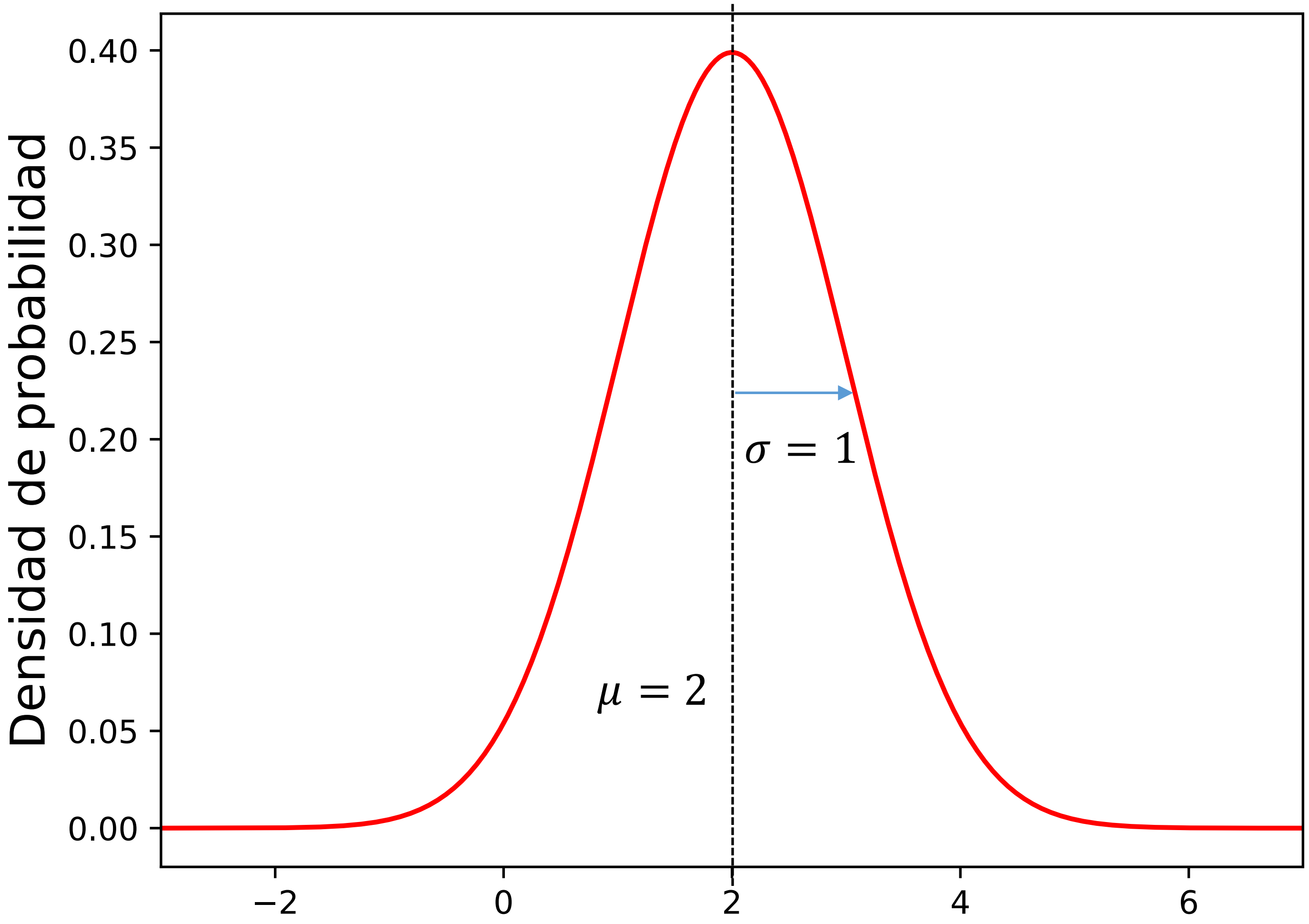


La distribución de Gauss es una buena *aproximación* para muchísimos casos*

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

* Ver *Teorema central del límite*

Distribución de Gauss

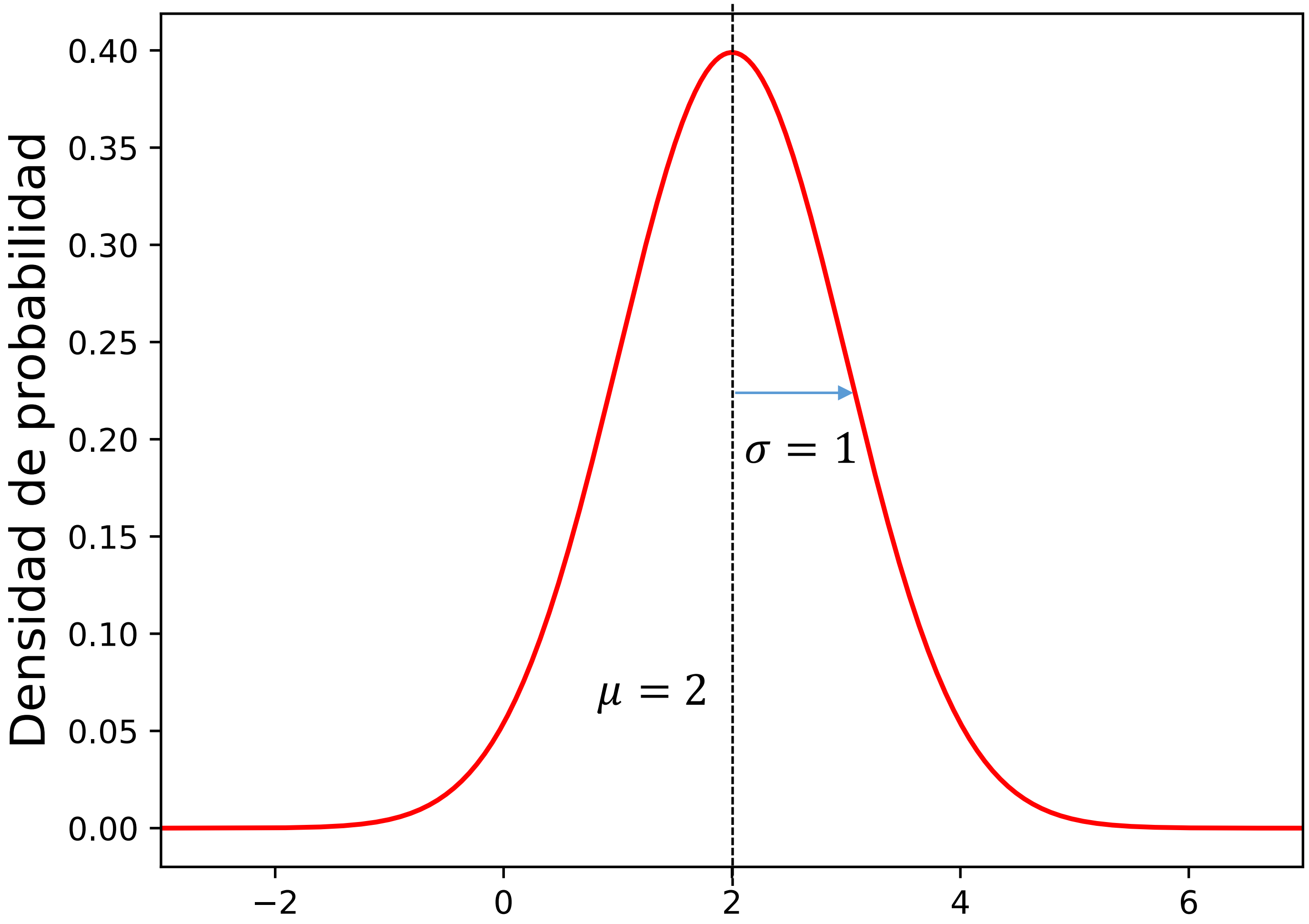


La distribución de Gauss es una buena *aproximación* para muchísimos casos*

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

* Ver *Teorema central del límite*

Distribución de Gauss



La distribución de Gauss es una buena *aproximación* para muchísimos casos*

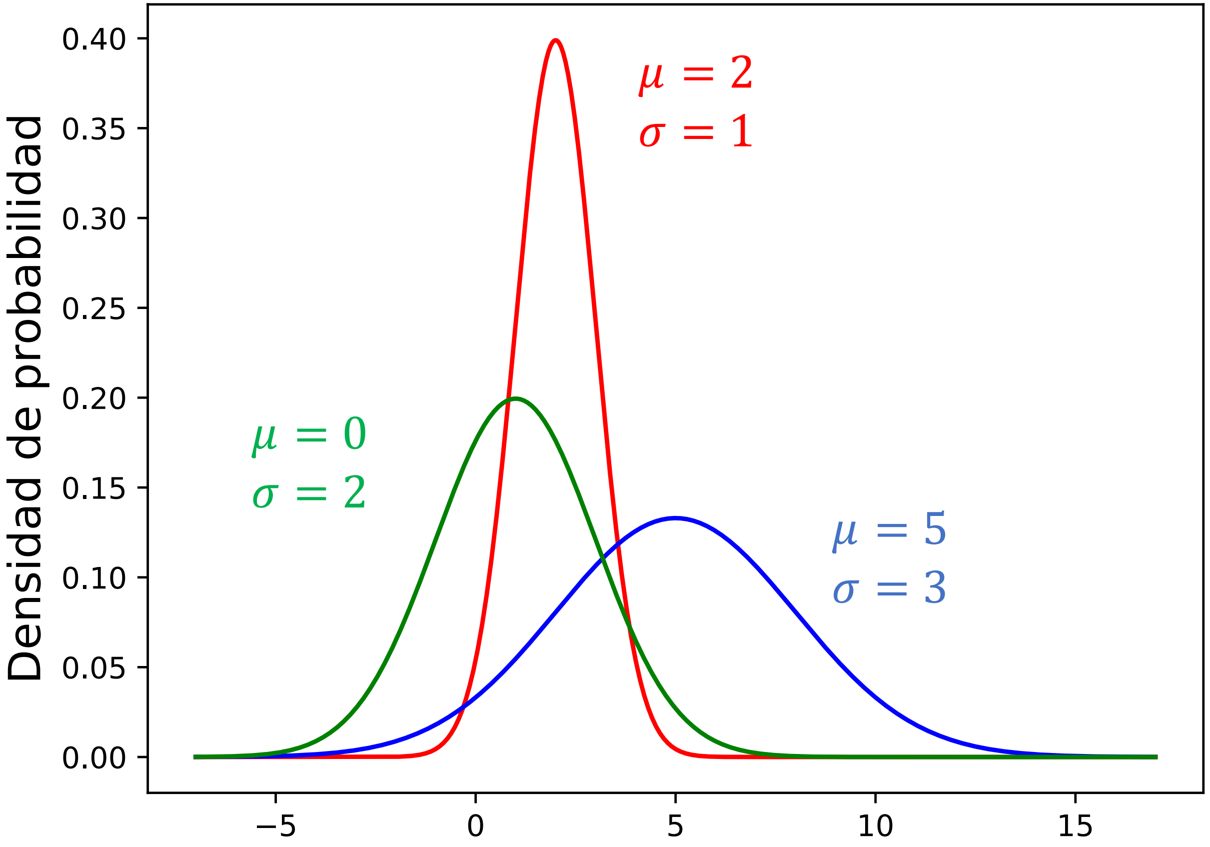
$$\boxed{G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu,\sigma}(x)dx = 1$$

* Ver *Teorema central del límite*

Distribución de Gauss: algunas propiedades

- Está centrada en $x = \mu$
- Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$
- El parámetro σ da una medida de su ancho



$$\boxed{G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

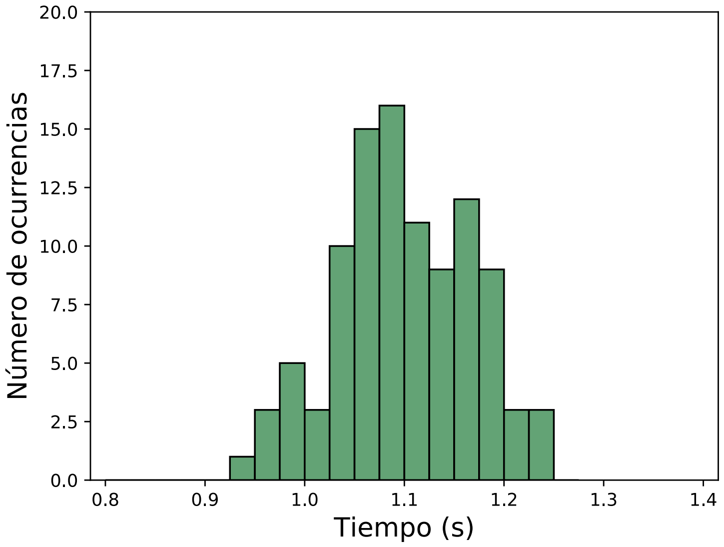
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu,\sigma}(x)dx = 1$$

Estadística

por ejemplo μ y σ de la gaussiana

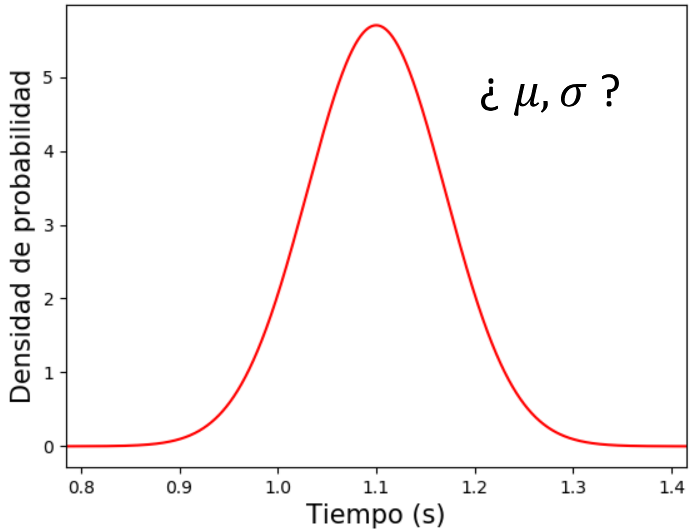
Objetivo: *estimar* los parámetros de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria a partir de los datos.

Datos obtenidos



¿De qué distribución de probabilidad provienen mis datos?

¿



?

Estimación de los parámetros de la distribución de Gauss

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i \longrightarrow E(X) = \mu$$

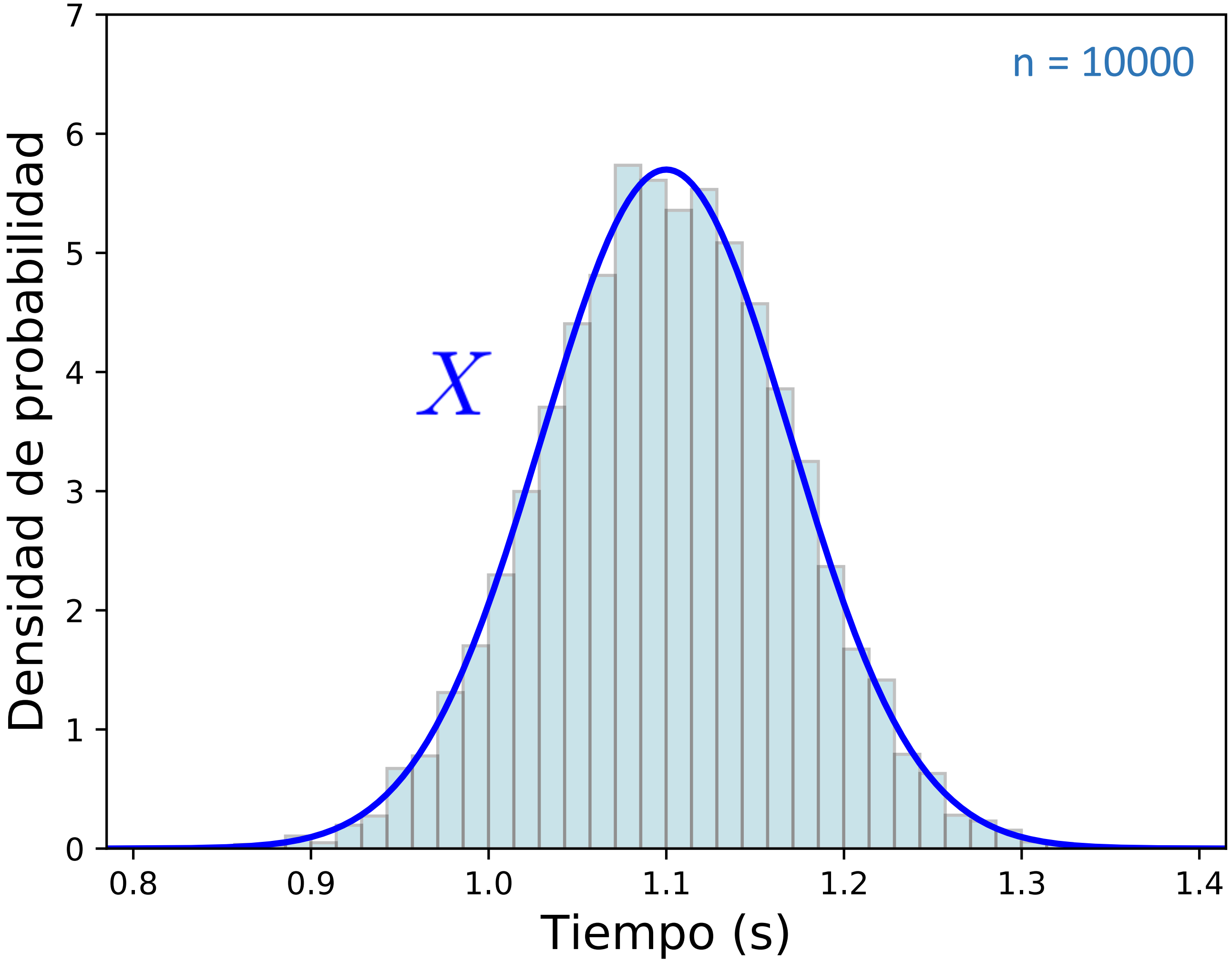
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}(x_i - \bar{X}_n)^2 \longrightarrow VAR(X) = \sigma^2$$

Son *estimadores*: funciones de los datos medidos x_i

Parámetros desconocidos de la distribución de Gauss

n: cantidad de mediciones de la variable aleatoria X realizadas

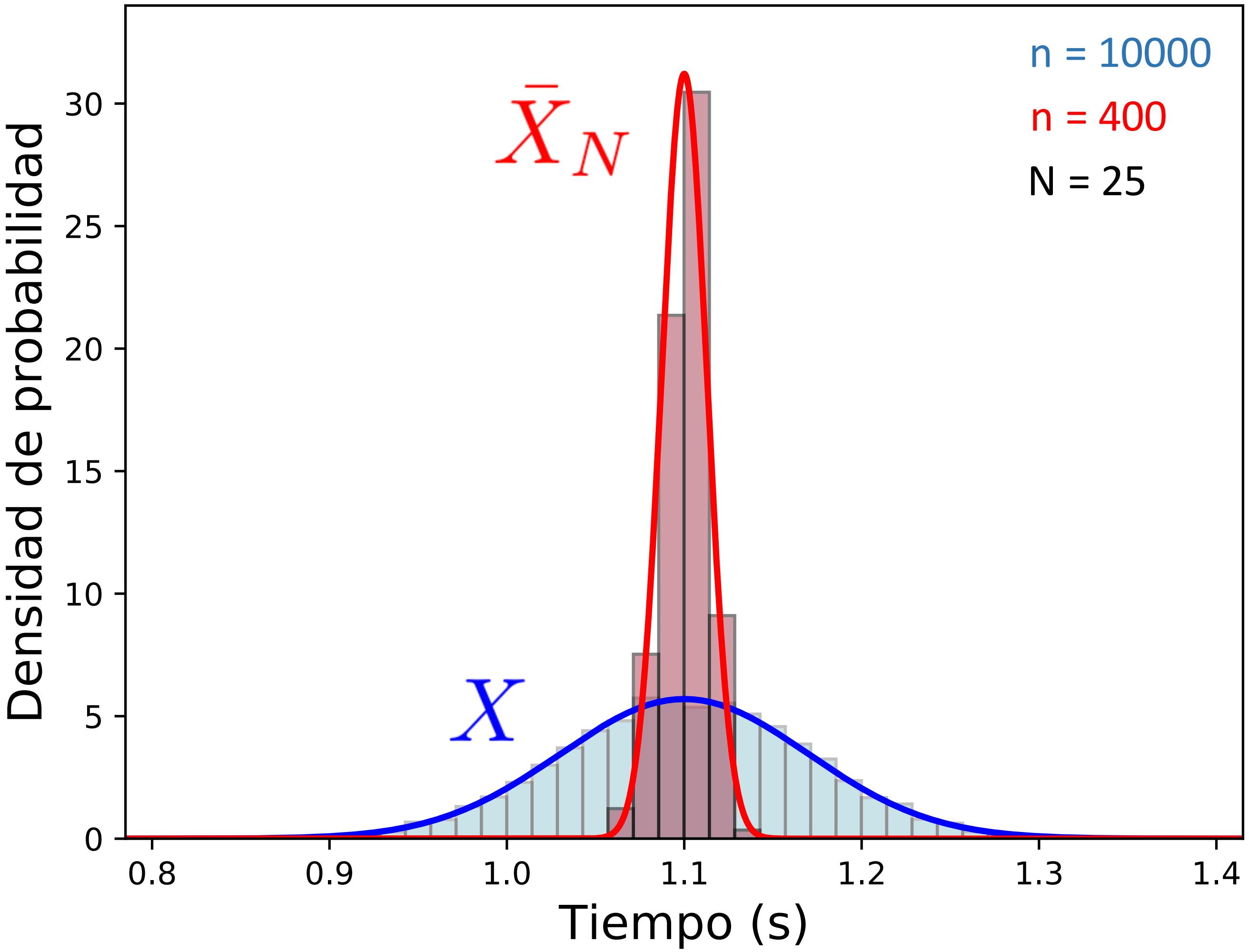
Distribución de la variable aleatoria “una medición”



$$\langle X \rangle = 1,100\ s$$

$$\sigma_X = 0,070\ s$$

Distribución de la variable aleatoria "promedio de N mediciones"



$$\langle X \rangle = 1,100 \ s$$ promedio de X

$$\sigma_X = 0,070 \ s$$ desv. estándar de X

$$\langle \bar{X}_N \rangle = 1,100 \ s$$ promedio de $\bar{X}_N$

$$\sigma_{\bar{X}_N} = 0,014 \ s$$ desv. estándar de $\bar{X}_N$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}_N} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}} \ ^*$$

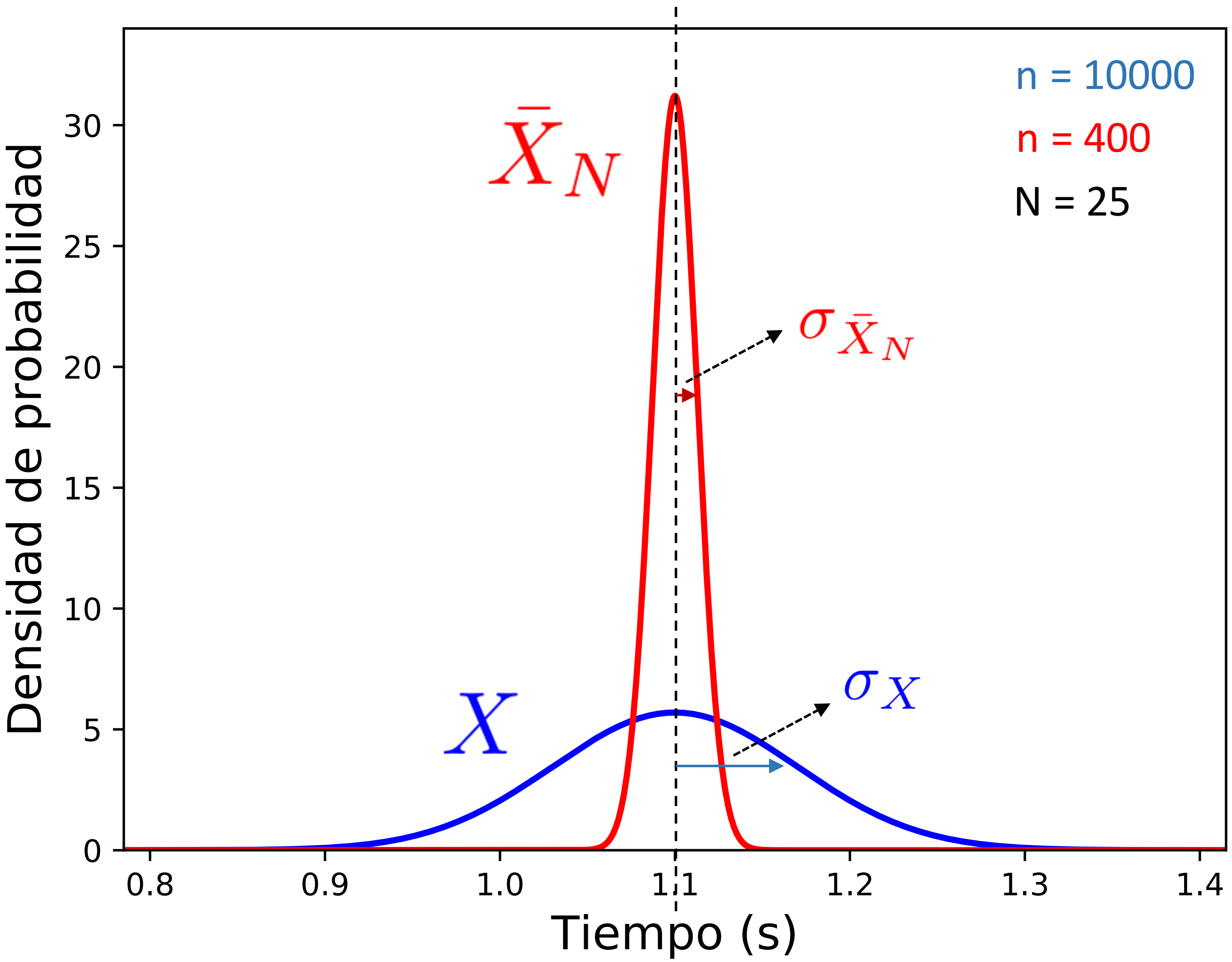
X : variable aleatoria "una medición"

$\bar{X}_N$: variable aleatoria "promedio de N mediciones"

n: número de cuentas en el histograma

* La demostración de este resultado general está en el apéndice

Distribución de la variable aleatoria "promedio de N mediciones"



$$\langle X \rangle = 1,100 \ s$$ promedio de X

$$\sigma_X = 0,070 \ s$$ desv. estándar de X

$$\langle \bar{X}_N \rangle = 1,100 \ s$$ promedio de $\bar{X}_N$

$$\sigma_{\bar{X}_N} = 0,014 \ s$$ desv. estándar de $\bar{X}_N$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}_N} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}}$$ *

X : variable aleatoria "una medición"

$\bar{X}_N$: variable aleatoria "promedio de N mediciones"

n: número de cuentas en el histograma

* La demostración de este resultado general está en el apéndice

Error estadístico y error instrumental

Llamaremos *error estadístico* a la desviación estándar de la media de N mediciones

$e_{stat} \equiv \sigma_{\bar{X}_N}$

- El error estadístico disminuye a medida que se realizan más mediciones con dependencia $\propto \frac{1}{\sqrt{N}}$
- El error instrumental *no depende* de la cantidad de mediciones realizadas

El error total de una medición es la suma en cuadratura* de todas las contribuciones de error *independientes*.
Si volvemos al ejemplo de la medición del período del faro considerando por ahora solamente el error instrumental (por ej. la precisión para medir tiempo del cronómetro) y el error estadístico (la variabilidad en la medición por parte del experimentador)

$$e_{tot}^2 = e_{stat}^2 + e_{inst}^2$$

¿Cuántas veces es necesario medir para que e_{stat}^2 sea despreciable respecto a e_{inst}^2?

* Este resultado es un resultado de la estadística y proviene de suponer que las contribuciones son independientes entre sí. Ver por ejemplo Baird D C, *Experimentación,* Prentice-Hall Hispanoamérica (1991), pp 46-50

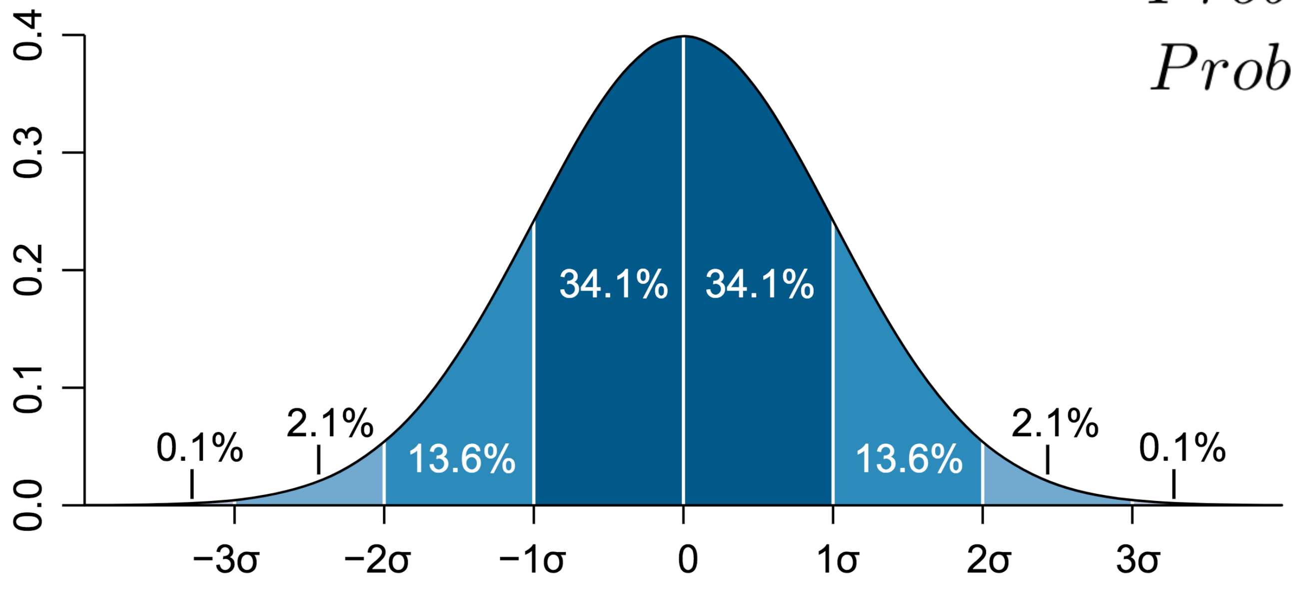
Resultado de una medición e intervalo de confianza

¿Cuál es la probabilidad de que una medición (o un promedio de N mediciones) esté entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$?

¿Y entre $\mu - t\sigma$ y $\mu + t\sigma$?

$$Prob\,(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \boxed{0,6827}$$
$$Prob\,(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \boxed{0,9545}$$
$$Prob\,(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx \boxed{0,9974}$$

Nivel de confianza



La notación

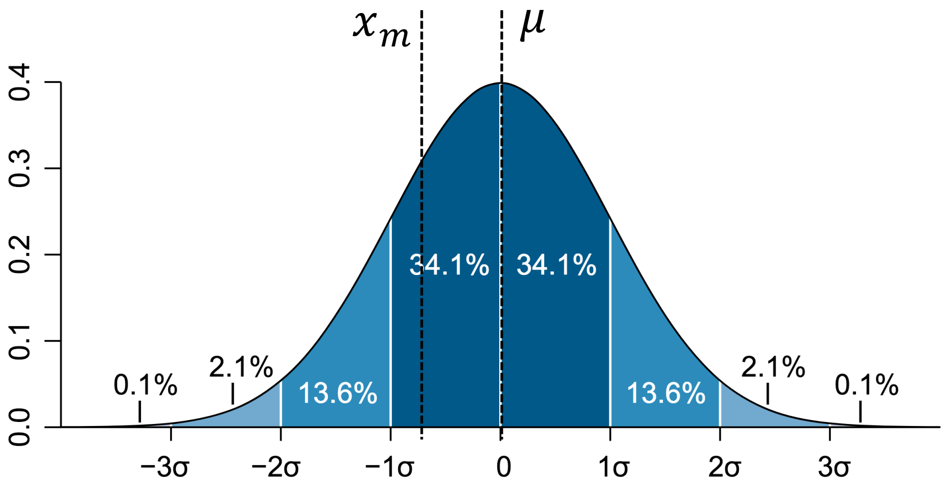
resultado = valor $\pm$ *error*

Significa *error =* σ
(nivel de confianza del **68,3%**)

Resultado de una medición e intervalo de confianza

resultado = valor ± error

ej: T = (1,10 ± 0,07) s



Dos interpretaciones:

$$Prob\,(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,6827 \longrightarrow$$

La probabilidad de que la *próxima medición* se encuentre entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es del 68,3%

=

$$Prob\,(X - \sigma \leq \mu \leq X + \sigma) \approx 0,6827 \longrightarrow$$

La probabilidad de que el *valor real* μ se encuentre entre $x_m - \sigma$ y $x_m + \sigma$ es del 68,3%

x_m: valor medido

Apéndice

Demostración de la fórmula de la desviación estándar del promedio:

$$\left.\begin{aligned} &VAR(X) \equiv \sigma_X^2 && (1) \\ &VAR(X_1 + X_2) = VAR(X_1) + VAR(X_2) && (2) \\ &VAR(cX) = c^2 VAR(X) && (3) \end{aligned}\right\} \text{Propiedades de la Varianza}$$

$$VAR(\bar{X}) = VAR(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i) \overset{(3)}{=} \frac{1}{N^2} VAR(\sum_{i=1}^{N} X_i) =$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} VAR(X_i) = \frac{N}{N^2} VAR(X) = \frac{1}{N} VAR(X)$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \sigma_{\bar{X}_N} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$