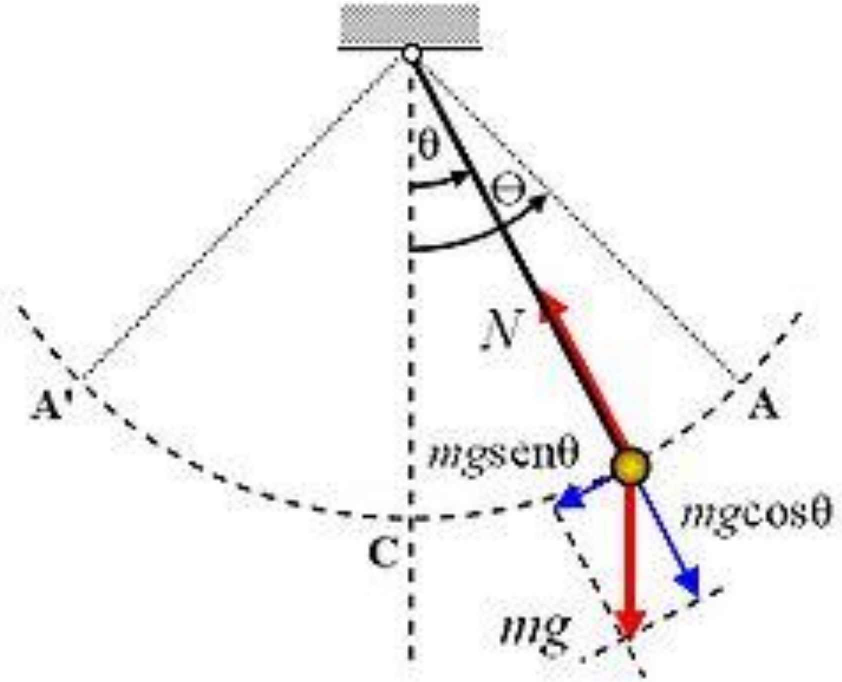
Buscando la ley:

estudio del movimiento de un péndulo



$$mg\sin\theta = m\,a_t = m\,L\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\ \sin\theta\ = 0$$

$$como\ sin\theta\ \approx \theta\ para\ \theta\ \ll 1$$

Se puede proponer la siguiente solución

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Se obtiene que:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

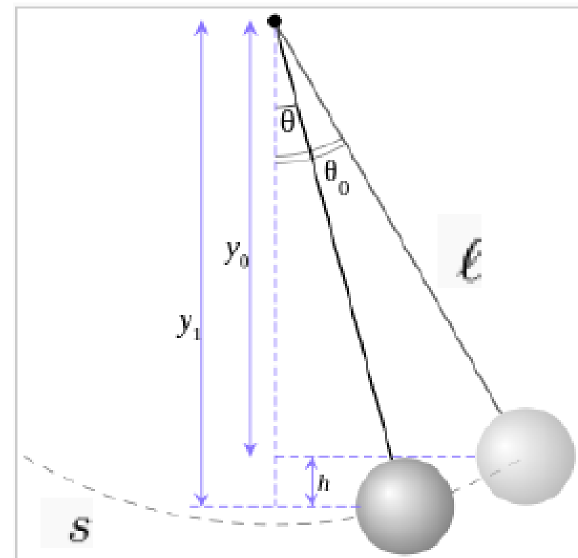
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\ (L/g)^{1/2}$$

Ecuación de movimiento del péndulo simple (consideración energética)

$\Delta U = mgh$ Energía potencial

$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$ Energía cinética

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$



La longitud del arco recorrido → $s = \ell\theta$

Velocidad a la que se recorre el arco → $v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$

Reemplazando en la ec.(1)

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ell}\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Si la amplitud inicial es θ_0 → $y_0 = \ell\cos\theta_0$

análogamente $y_1 = \ell\cos\theta$

$$h = \ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \qquad (3)$$

Reemplazando la ec. (3) en la ec.(2) →

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \qquad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \quad (3)$$

Si derivamos la ec. (3) respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Ecuación diferencial del movimiento del péndulo

$\theta \ll 1.$ $\longrightarrow$ $\sin\theta \approx \theta.$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Ecuación del oscilador armónico

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right) \qquad \theta_0 \ll 1.$$

El período To es el tiempo para realizar una oscilación

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \theta_0 \ll 1$$

Qué ocurre para ángulos “grandes”?

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Podemos integrar sobre un ciclo completo

$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0),$$

o 2 veces sobre medio ciclo

$$T = 2t\,(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0)$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

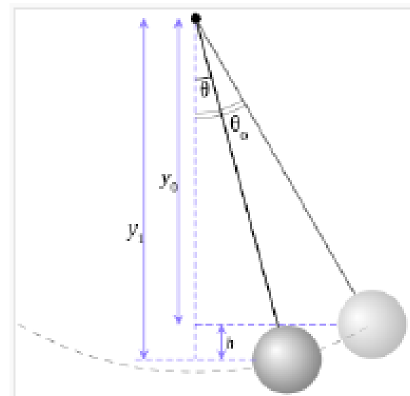
o 4 veces sobre ¼ de ciclo

$$T = 4t\,(\theta_0 \to 0)$$

$$T = \int_0^{4\theta_0} dt = \int_0^{4\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta.$$

$$\boxed{\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)}$$



Si θ_o se acerca al vertical la integral diverge

$$\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}\,du\,.$$

$$\boxed{\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}}$$

Función integral elíptica incompleta

Qué ocurre para ángulos "grandes"?

$$T(\theta_0) = T_0 \cdot \left(\int_{\phi=0}^{\theta_0} \frac{d\phi}{\sqrt{k^2 - sen^2(\phi/2)}} \right)$$

Donde $k = \text{sen}(\theta_0 / 2)$

Que admite una expansión en serie

$$T(\theta_0) = T_0 \cdot (1 + \frac{k^2}{2^2} + \frac{3^2 \cdot k^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{5^2 \cdot k^6}{2^2 \cdot 8^2} + \frac{35^2 \cdot k^8}{2^2 \cdot 64^2} \cdots)$$

Que puede aproximarse por:

$$T(\theta_0) = T_0 \cdot \left(\frac{\theta_0}{sin\theta_0} \right)^{3/8}, \quad \text{con} \qquad T_0 = T(\theta = 0^o)$$

Que puede aproximarse por:

$$T(\theta_0) \approx T_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{\theta_0}{\pi_0}\right)^2\right)^{-\frac{\pi^2}{16}} \approx T_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{\theta_0}{4}\right)^2\right]$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$