Capítulo 2

Observaciones cuantificadas – Qué es medir – Incertezas y Estadísticas – Precisión y Exactitud – Varianza y desviación estándar – La incerteza estadística – Distribuciones – Propagación de incertezas – Ajuste de curvas – Cuadrados mínimos.

El Hombre como observador del Universo

Observaciones cuantificadas:

Los físicos dedicados al estudio de la cosmología han mostrado evidencias de que todo nuestro Universo se generó a partir de una gran explosión, conocida con el nombre de Big Bang. Desde el instante inicial no solo se creó el espacio y el tiempo, sino que también se desarrollaron las diversas leyes físicas y se fueron formando las partículas elementales y posteriormente los átomos más livianos. Luego se crearon átomos más pesados, galaxias, estrellas y planetas. La vida surgió y como parte de su evolución podemos ubicar al hombre. Gracias a su inteligencia y a una desmedida curiosidad, el hombre viene observando su entorno y descubriendo que se encuentra sumergido en una realidad que transluce un orden, un Cosmos. El hombre sería algo así como la conciencia del Universo, el medio por el cual el Universo se descubre a si mismo.

Poder definir alguna magnitud mediante un número es empezar a comprenderla

Se estima la edad del Universo en unos 15.000 millones de años. Un hombre logra vivir alrededor de unos 0.0001 (=10^{-4}) millones de años. Existen unas 10^{11} galaxias con unos 10^{11} soles cada una. Digamos que hay unos 10^{23} planetas aproximadamente. Nosotros vivimos en 1 de ellos...Estos números no solo nos muestran nuestra pequeñez y lo efímero de nuestra existencia terrenal, sino que representan un conocimiento numérico sobre nuestra realidad. Haber podido poner un número, evaluar y fijar un orden de magnitud en cuanto a cantidad, duración y longitud representa un grado de entendimiento adicional que nos permite comprender mejor nuestro entorno. En muchos casos, como en la estimación de la edad del Universo, el camino recorrido para llegar a dar un número ha sido largo y ha demandado una cuidadosa observación y análisis basados en modelos físicos que describen a nuestro Cosmos.

Pero, qué es medir?

Medir es evaluar una magnitud en función de alguna unidad y mediante un instrumento.

En éste proceso de observación el hombre descubrió la necesidad de numerar, de cuantificar. Definir algo como “grande” o “chico”, mucho o poco, lejano o cercano, no alcanzó para dar una clara imagen del objeto, y mostró que estos términos demasiado subjetivos necesitaban algo más de imparcialidad. Era necesario encontrar una manera para poder expresar y comparar los atributos que caracterizan a los objetos y los fenómenos que nos rodean. Originalmente se utilizaron partes del cuerpo o elementos naturales como instrumentos de medición, pero resultaron un poco subjetivos y poco prácticos a la hora de medir una mesa con, por ejemplo, el pie de Carlo Magno!. Luego la ciencia se desprendió de unidades tan cercanas y ligadas al mundo cotidiano de los hombres y pudo así intentar describir un entorno más amplio y crecer en la comprensión de lo muy pequeño y de lo muy grande (micro y macrocosmos).

Este proceso de comparación implica relacionarnos con alguna magnitud física, que representa una cualidad de algo que queremos estudiar. Cuando tomamos un objeto en nuestras manos, notamos que posee una cualidad que tiene que ver con cuanto nos cuesta levantarlo y que podemos llamar “peso”.
Medir o evaluar esta magnitud es el proceso de querer acotar o enmarcar el valor de esta cualidad, estimándola mediante un instrumento y comparándola en función de alguna unidad de medida. De hecho, usualmente se emplea una unidad de medida patrón (el kg para el caso del peso) y un instrumento orientado a tal fin (la balanza). No entraremos aquí en el detalle de cómo se fijan los patrones de medida, ni en los procedimientos precisos, y cuidados que deben seguirse para la realización de una medición que cuente con el aval de los organismos fiscalizadores en cuanto al seguimiento de normas previamente estipuladas. Más información podrá encontrarse en

http://physics.nist.gov/

Hay medidas directas e indirectas

Muchas veces medimos ***directamente*** aquello que deseamos evaluar, como el peso, la longitud, la corriente eléctrica, etc. Pero muchas otras veces deseamos evaluar algo que no medimos directamente, lo hacemos ***indirectamente***. Este es el caso, por ejemplo, de una estimación del volumen de un tanque de agua o de una esfera de metal. En estos casos, nos basamos en un modelo matemático que suponemos describe bien a nuestro objeto y que relaciona la magnitud que queremos evaluar (el volumen) con magnitudes que podemos medir (longitudes relacionadas con las distintas dimensiones del cuerpo geométrico que representan, como un lado para un tanque cúbico o el diámetro para el caso de la esfera).
Medir implica efectivamente establecer un nexo entre el objeto y el instrumento de medición. Esta interacción puede resultar invasiva, y por lo tanto perjudicial, por el hecho de que podemos perturbar la propiedad que queremos medir y modificarla substancialmente. Por ejemplo, si ponemos en contacto un termómetro convencional de mercurio para medir la temperatura de una pequeña gota de líquido de mayor o menor temperatura que el propio termómetro, no haremos más que alterar su temperatura. De igual modo, si utilizamos una corriente elevada para poder medir la resistencia eléctrica de un fino hilo metálico a una determinada temperatura, provocaremos su calentamiento y, consecuentemente, un indeseado aumento de su resistencia.

En muchos otros casos, los resultados de una medición o de un experimento representan la prueba de la existencia de un atributo o de una partícula. Este es por ejemplo el caso de la partícula Z cuya existencia fue puesta en evidencia mediante la realización de experimentos donde se produjeron choques de electrones y positrones acelerados a velocidades cercanas a las de la luz.
Podrá encontrarse más información sobre estos experimentos en

https://exactas.uba.ar/mas-cerca-del-boson-de-higgs/

Incertezas y Estadísticas:

Cómo expresar el resultado de una medición

Probablemente, salvo que ya hayamos realizado algún curso dedicado a la experimentación, nuestro acercamiento a las mediciones se reduce, por lo general, a haber medido nuestro peso, nuestra altura o la longitud de un estante u otro objeto. Como hicimos esta medición? Mostramos en su momento una clara preocupación por tener que enfrentarnos con un número real y desconocido?
No! Solo nos limitamos a evaluar el peso mediante una balanza, o medimos el estante con una cinta métrica y punto...Y para que más? El estante tenía 32 cm, esa fue nuestra respuesta. Pero tratemos de profundizar un poco más en esto.
Para empezar, resulta difícil creer que el estante tenga exactamente 32.000...000 cm. El largo del estante corresponde a un número real de infinitas cifras. Cuantas cifras después del punto podemos asegurar? O es que en realidad lo único que podemos asegurar con la cinta métrica con la que realizamos la medición es que la longitud del estante está entre 31.9 cm y 32.1 cm? O quizás entre 32.0 cm y 32.1 cm? O entre 32.05 cm y 32.07 cm? Obviamente dependerá de la sensibilidad del instrumento que empleemos, pero también de nuestra observación, del grado de paralelismo de la zona donde realizamos la medición, de la variación de temperatura y humedad ambiente que modifican a la madera del estante, de la resolución del borde que tengamos, etc. Podríamos llegar quizás hasta una escala atómica, pero hay múltiples factores que afectan la propiedad que queremos medir y que limitan el número de cifras que podemos dar con un cierto grado de confianza de que el resultado que estamos dando sea lo más cercano a lo correcto.
Digamos que el "verdadero" valor del largo del estante en las condiciones que realizamos la medición es un número que para nosotros permanece desconocido y todo lo que podemos hacer es acotar dicho número. Acotar es definir un intervalo dentro del cual aseguramos que se encuentra la respuesta correcta sobre, por ejemplo, el largo del estante. Podríamos entonces decir que su longitud X se encuentra comprendida en el intervalo que podemos expresar como:

$$31.9 \text{ cm} < X < 32.1 \text{ cm}$$

lo que es equivalente a decir que

$$X \in [31.9, 32.1]$$

lo que gráficamente podemos visualizar como en el esquema que se muestra en la **Figura 2**

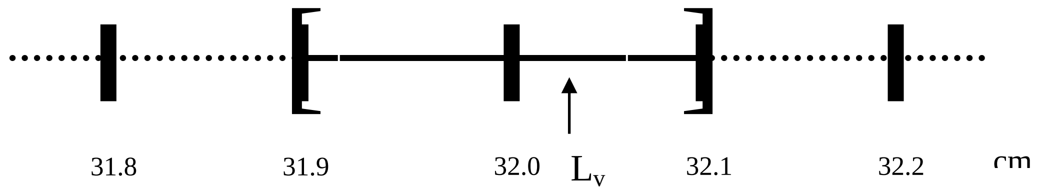

Figura 2.1: Tratando de medir el valor de X más que un número damos un intervalo que lo acota. Lo único que sabemos sobre el "verdadero" valor de X_v que desconocemos (como ejemplo indicado por la flecha) es que se halla en el interior de éste intervalo. Las rayas verticales corresponden a las graduaciones en mm de una cinta métrica.

Los extremos de éste intervalo pueden indicarse como un valor central (X) al que por un lado le restamos el semiancho del intervalo (ΔX) y por otro se lo sumamos. De esta manera, el resultado puede escribirse como:

$$X \pm \Delta X$$

Definimos la incerteza

Por lo tanto, el resultado de una medición no corresponde a un único valor sino a un conjunto de números representados por un valor central (X) y un apartamiento del mismo (ΔX) que se conoce como ***incerteza absoluta***. Una parte importante del arte de medir una magnitud pasa por la correcta evaluación de las incertezas.

También se define la ***incerteza relativa*** y la ***incerteza porcentual relativa*** como:

$$\frac{\Delta X}{X} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta X}{X}.100$$

respectivamente, que nos dan una idea numérica más clara de cuán importante es la incerteza de la medición respecto del valor medido. En efecto, tener una incerteza absoluta de unos 0.1 cm no nos dice de por si nada, salvo que aclaremos cuanto era el valor de lo que medíamos -a)1cm o –b)1m?. En cambio decir que medimos una longitud (por ejemplo) con un 1% de incerteza, define claramente la situación.

> Calcular cuál es la incerteza porcentual relativa para los casos –a) y –b) citados.

Las Cifras Significativas

La incerteza nos fija el número de cifras que tiene sentido dar cuando se escribe el valor de una magnitud. Qué valor tiene decir que X=32.000002 cm cuando en realidad sólo se sabe que se encuentra comprendido entre 31.9 cm y 32.1 cm (lo que corresponde a ΔX=0.1cm)? En éste caso, solo tiene sentido decir que X=32.0 cm ± 0.1 cm y para ello hemos empleado 3 cifras: el 3, el 2 y el 0. Incluimos sólo hasta un número después del "." ya que la incerteza ΔX corresponde a ese orden de magnitud. La cantidad de cifras que realmente tienen sentido es lo que se conoce como ***cifras significativas***. Muchas veces, tentados por la cantidad abrumadora de cifras que logra dar nuestra calculadora luego de una operación matemática (como por ejemplo $\pi \times 1.2 = 3.769911184$), y convencidos de que cuantas más cifras escribamos, mayor será la calidad de nuestro trabajo, solemos escribir el resultado final con la totalidad de las cifras que vemos...Alto! tomemos como regla que el número de cifras que hay que escribir lo fija la incerteza, y nada más!. Para expresar la incerteza sólo lo haremos mediante una cifra significativa ya que no se la suele evaluar con mayor precisión y corresponde por lo general a una estimación con una incerteza relativamente grande.

Si tuviéramos 2 cifras significativas en 1.2 entonces el resultado de $\pi \times 1.2$ debería escribirse como 3.8, ya que tomamos como regla que si el primer dígito a eliminar es < 5 , simplemente lo eliminamos junto con todos los que lo siguen. En cambio si fuera >5, se eliminan todos los dígitos y se aumenta en una unidad el primero que se conserva. Así, con 2 cifras significativas 2.227 se escribe como 2.2 y 17.7 como 18. El número de cifras significativas no aumenta o disminuye al cambiar la unidad en la que está expresado. Si medimos una longitud de 1.21m esto se expresará como 1.210.000. μm. Esto podría interpretarse como que medimos con una incerteza del orden de 1 μm y no es así. Para evitar confusiones se emplea la notación científica, $1.21\ 10^6$ μm, entendiéndose que todas las cifras expresadas son significativas. En un número sin punto decimal y que termina en uno o varios ceros no resulta inmediato saber si los ceros son significativos o no. Por ejemplo, con 2 cifras significativas 5784 se escribiría como 5800. Si vemos escrito éste número como el resultado de una medición, necesitaremos contar con más información para saber si los 2 últimos ceros son significativos o el resultado de un redondeo.

Redondear los siguientes números según sus cifras significativas (cs):

21.18 con 3 cs = con 2 cs =
566.68 con 2 cs = con 4 cs =

Cuantas cs hay en:

1.235 0.00052 0.12002 10.000

Así que para saber donde estamos parados resulta esencial saber cuál es la incerteza de lo que hemos medido o de lo que queremos evaluar...pero cómo lo hacemos?.
Hay numerosos factores que intervienen en el proceso de medición y que determinan la magnitud de una incerteza. En el caso de la medición del largo del estante pueden participar factores ligados a la correcta definición de lo que queremos medir y en qué condiciones lo haremos, la calidad del instrumento que se emplea y sus posibles defectos o errores en su escala, errores que cometemos al observar o al anotar los números o en la manera que lo empleamos, etc. La suma de todos estos elementos contribuye a la incerteza total de nuestra medición y habrá que intentar evaluarla!
Coraje! Vamos a clasificar un poco mejor las distintas fuentes de incerteza. Se suele hablar de "error" cuando se tratan de artificios que modifican una medición y que podemos tratar de evaluar y corregir. Mientras que el término de "incerteza" se reserva para cuando solo podemos dar un intervalo dentro del cual suponemos que se encuentra el valor real de lo que estamos evaluando. Tradicionalmente se utilizó el término error para ambos significados, por lo cual muchas veces emplearemos esta palabra, aún cuando se trate formalmente de una incerteza.
Veamos entonces la siguiente clasificación:

- ***incerteza casual o estadística*** **(**ΔX_{Est})
  Son aquellos que provienen de numerosos factores imprevisibles y cuya determinación individual no resulta factible. Para el caso de la medición del estante con una pequeña regla, podrían corresponder a los pequeños errores al trasladar la regla, a veces de más y otras de menos. Cuando se acumula un cierto número (N) de mediciones realizadas en idénticas condiciones es posible disminuir este error, ya que se observan fluctuaciones del resultado alrededor de un cierto valor, siguiendo ciertas leyes matemáticas que veremos más adelante.
- ***error sistemático*** **(**ΔX_{Sist})
  En oposición con el caso anterior son errores que no son producidos por causas azarosas y que suelen estar relacionados con un defecto en el instrumento, con

un método inadecuado para realizar la medición o con una causa externa que modifica nuestro resultado siempre en el mismo sentido. Por ejemplo, éste sería el caso de un experimentador que, al medir el tiempo que transcurre entre dos eventos, tiende a presionar el cronómetro antes de que finalice la acción. O de una regla graduada cuya escala es incorrecta, de un reloj que atrasa o adelanta, etc.

- ***error de equivocación!*** **(**ΔX_{Equ})
  Es el que se comete accidentalmente al anotar equivocadamente un número o al evaluar mal una expresión matemática. Los métodos estadísticos permiten en algunos casos minimizar la incidencia de éste tipo de errores.
- ***errores aportados por el instrumento***
  -a) error de apreciación **(**ΔX_{Apr})
  Es aquél asociado a la mínima división del instrumento que se emplea para la medición. Cuando se emplea una regla con una escala milimétrica el observador puede determinar subjetivamente una lectura correspondiente a una fracción de esta mínima división, digamos 0.5 mm, pero no mucho menos que esto!. Al medir en varias oportunidades un objeto menor que el largo total de la regla por lo general obtenemos la misma lectura. Esto solo ocurre cuando los errores estadísticos son pequeños frente al error de apreciación.
  -b) error de interacción **(**ΔX_{Int})
  Corresponde a la modificación de la magnitud que queremos evaluar al pertubar con nuestro instrumento la propiedad que estamos midiendo. Por ejemplo al medir la velocidad de un móvil al que se le adosó un sistema de medición que presenta una resistencia aerodinámica no despreciable, o al medir la temperatura de una gota de agua con un termómetro de dimensiones (y masa térmica) apreciables.
  -c) error de exactitud **(**ΔX_{Exa})
  Es un caso particular de un error sistemático y esta relacionado con la descalibración o corrimiento absoluto respecto de un patrón que pueda presentar el instrumento que empleamos. Podrá reducirse o evaluarse al realizar calibraciones periódicas del instrumento en cuestión.

Todos estos errores se suman y determinan la incerteza total sobre una medición, que se define como:

$$(\Delta X_{\text{Total}})^2 = (\Delta X_{\text{Est}})^2 + (\Delta X_{\text{Apr}})^2 + \ldots + \quad \text{----------------} \quad (1)$$

De ésta manera cada error contribuye a la incerteza total, y dado que se suman términos cuadráticos, nunca se cancelarán unos con otros.
Los errores del tipo estadístico podrán reducirse apreciablemente según se describe más adelante en ***el extraño caso de las M series de N mediciones***. Así, la idea será tratar de reducir cada contribución a la incerteza total todo lo que se pueda, aunque siempre quedaremos limitados por las incertezas que provengan de los instrumentos, de la apreciación de los mismos, de su exactitud, etc. y que no podremos disminuir mediante el estudio estadístico.
Cuanto más pequeña sea la incerteza total diremos que la medición es más ***precisa***. En otras situaciones se podrá hablar de mediciones ***exactas***...

Qué entendemos por precisión y qué por exactitud?

Imaginemos por unos instantes que los instrumentos de medición que utilizamos corresponden a distintos jugadores de golf y que el hoyo donde intentan embocar la pelotita representa el valor real de lo que queremos medir.
Si observamos una fotografía aérea de donde quedan ubicados, respecto del hoyo, 10 tiros sucesivos de cada jugador, se puede observar lo que mostramos en la **Figura 2.2**:

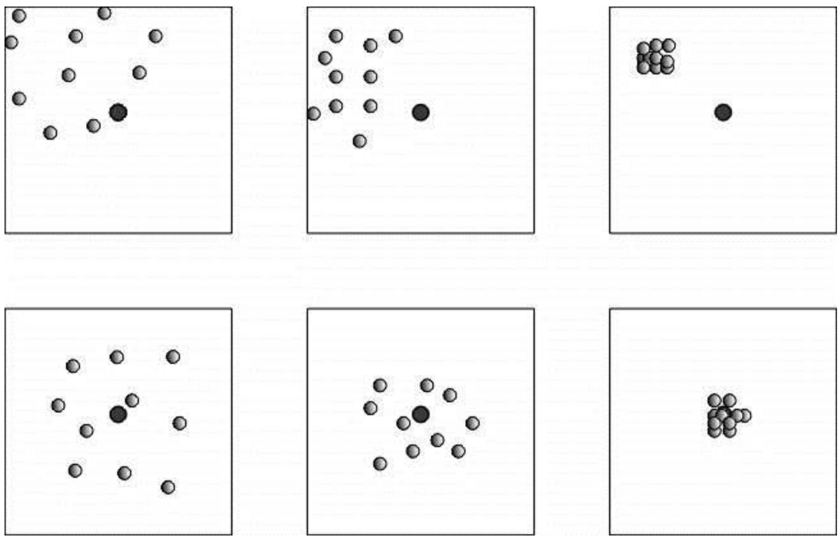

Figura 2.2: En el centro de cada cuadrado vemos el hoyo y se pueden apreciar también las 10 pelotitas tiradas por cada jugador. De izquierda a derecha se incrementa la precisión mientras que de arriba hacia abajo se mejora la exactitud.

Precisión y Exactitud

Observando de izquierda a derecha vemos que la separación entre pelotitas va disminuyendo, mientras que de arriba a abajo se distribuyen mas cercanas al hoyo central. Podemos imaginar que se encuentran dentro de un círculo cuyo radio disminuye y cuyo centro se acerca al hoyo. Cuanto menor sea el radio, mayor será la ***precisión*** y cuanto más cerca del hoyo esté su centro, mayor será la ***exactitud***.

El jugador del cuadro superior derecho logra embocar las pelotitas casi en el mismo lugar, pero comete repetidamente un error en sus tiros que hace que todas queden alejadas del hoyo central. Quizás el palo de golf que emplea está torcido o tiene un defecto, o bien el jugador comete el mismo error al observar la posición del hoyo (***error sistemático***). En los instrumentos de medición usuales ésto puede estar dado por una escala deformada para el caso de una regla, o por un corrimiento del cero para el caso de un voltímetro. También interviene en éste error el experimentador que tiende a oprimir el cronómetro antes (o después) de que el suceso ocurra, etc. Por otra parte, su movimiento depende de pequeños factores casuales que hacen que no siempre le pegue igual a la pelotita (***error estadístico***), generándose así fluctuaciones alrededor de una cierta posición central.
Veamos ahora como puede llegar a reducirse la incidencia de esta incerteza en el resultado final mediante el uso de un método estadístico.

las primeras N mediciones

El extraño caso de las M series de N mediciones...

Supongamos ahora que tenemos a un valiente experimentador que desea medir el largo de una mesa, es decir, el valor de una cierta magnitud correspondiente, en éste caso, a la longitud de un objeto. Para ello, empleará una regla de unos 20 cm, cuya mínima división corresponde a 1 mm. Como la mesa mide unos 80 cm deberá medir, marcar y trasladar la regla en varias oportunidades. Mide una primera vez y a ese resultado lo llama originalmente X_1. Aplicando una cierta desconfianza científica decide medir en una segunda oportunidad, y obtiene un valor que llama X_2. Oh! Qué sorpresa! X_2 no es necesariamente igual a X_1!. Por qué? Porque en cada medición intervienen factores casuales de naturaleza azarosa, que provocaran distintas lecturas de nuestro resultado final. Entonces realiza varias mediciones (N en total) de la misma magnitud a las que llama X_3, X_4,..., X_N. Habrá obtenido por lo tanto el conjunto $\{X_1,...., X_N\}$ de resultados de medir una misma magnitud.

Qué puede hacer con todos estos números?. Cuál es finalmente el valor de la magnitud que desea evaluar?. Sabemos que estará comprendido en un intervalo, pero cómo hacer para evaluar el valor central y el semiancho del mismo??.

Una posibilidad es considerar que entre todos los resultados que tuvo, existe uno que podría considerarse como el valor más probable. A ese número lo llama $<X>$ para diferenciarlo de todos los otros. Cada valor X_i que él midió (i=1,2,....,N) se encuentra a una "distancia" $d_i = X_i - <X>$ de $<X>$. Algunos d_i son positivos (>0) ya que esos X_i son mayores que $<X>$, y otros son negativos, ya que ocurre lo contrario. Eventualmente alguno será nulo si el valor de Xj medido coincide con $<X>$. Los d_i nos dan una idea de cuán desviados están nuestros datos del valor de $<X>$. Si sumáramos el conjunto de las desviaciones d_i no obtendríamos un número significativo de cuan bien estamos midiendo ya que como algunos d_i son positivos y otros negativos podrían eventualmente cancelarse unos con otros y obtenerse un valor nulo para la suma. Si consideramos ahora los valores de d_i^2 (las desviaciones cuadráticas) tendríamos todos números positivos, cuya magnitud nos daría una idea de cuan lejos estamos del valor de $<X>$, independientemente de que algunos sean mayores o menores que $<X>$. Lo que nuestro experimentador se da cuenta (y nosotros también!) es que si cada valor que midió, X_i, se encuentra muy desviado del valor $<X>$, la suma

$$d_1^2 + d_2^2 + ...+d_N^2 = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i - <X>)^2 \quad \text{-------------------} \ (2)$$

será un buen indicador de lo juntos o poco dispersos que se encuentran sus datos, y lo que más nos gustaría es que ésta suma sea lo más cercana a 0. Pero la suma depende fuertemente del valor que elijamos para $<X>$...Cuál es el $<X>$ que hace mínima a la expresión (2)? Matemáticamente se muestra (sabrían hacerlo?) que el valor de $<X>$ que resuelve esto es

$$<X> = (X_1+X_2+....+X_N)/N = \tfrac{1}{N}\sum X_i \quad \text{---------------------} \ (3)$$

que corresponde al promedio de las mediciones X_i realizadas!. De igual modo

$$\tfrac{1}{N}\sum d_i^2 = V$$

La varianza y la desviación estándar

corresponde al promedio de las desviaciones cuadráticas y es lo que se llama la *varianza* V. Pero qué nos daría una idea clara de cuanto se ha desviado el conjunto de nuestros datos?. Si la magnitud que medimos se expresa en cm, deberíamos encontrar un número en la misma unidad y que represente efectivamente el grado de desviación promedio de nuestras mediciones. Estas condiciones se cumplen para el número que se define como la *desviación estándar* $\sigma = \sqrt{V}$ que tendrá efectivamente la misma unidad que los X_i que medimos. Así, σ representa una posible evaluación de la incerteza de éste conjunto de mediciones, ligada a variaciones azarosas o fortuitas en la manera de medir. Por ello da cuenta de la incerteza estadística y nos permite lograr una **primera escritura** del resultado X de nuestras N mediciones como

$$X = \langle X \rangle \pm \sigma \quad \text{--------------------------} \quad (4)$$

La obsesión de las M series de N mediciones

Pero nuestro experimentador no se conforma con esto (es una persona sumamente inquieta!) y decide realizar una nueva serie de N mediciones, y otra más, y otra, hasta completar M series de N mediciones. Para cada una de ellas calcula el promedio $\langle X \rangle^{(J)}$ con J=1,...,M. Con estos nuevos M datos podemos hacer lo mismo que hicimos con los N primeros, y evaluar cuál es el promedio de los promedios y la desviación estándar de los promedios que presentan (que llamaremos ξ). Esto se escribe como

$$\langle\langle X \rangle\rangle = (\langle X^{(1)} \rangle + \langle X^{(2)} \rangle + ... + \langle X^{(M)} \rangle)/M = \frac{1}{M}\sum_{J}^{M} \langle X^{J} \rangle$$

$$\xi^2 = \sum_{J=1}^{M} (\langle X^{(J)} \rangle - \langle\langle X \rangle\rangle)^2 / M$$

El resultado de nuestras M series de N mediciones (supongamos M=10 y N=20, MxN=200 mediciones del largo de la mesa!) podría entonces expresarse en una **segunda escritura** como

el resultado final para las M series de N mediciones

$$X = \langle\langle X \rangle\rangle \pm \xi$$

Por suerte existe una manera de evitarnos realizar tantas mediciones para llegar a un resultado confiable sobre la totalidad de nuestras mediciones, y que se basa solo en la primera serie de N mediciones.
Se logra mostrar que para un número N suficientemente grande, ξ se puede aproximar como

$$\xi \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

No olvidemos que ξ representa la desviación del conjunto M de promedios y nos dará una clara idea de alrededor de qué valores fluctuará el valor del promedio que calculamos como $\langle X \rangle$.
Fantástico! Con solo N mediciones sabremos como fluctuarán los promedios de M series de N mediciones! Aprovechando esto podremos escribir que

El resultado final

$$X = \langle X \rangle \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{------------------------} \quad (5)$$

- Nótese que en la expresión (5) solo hemos tenido en cuenta la incerteza estadística. Para la escritura de la incerteza total de X hay que considerar también, como dijimos anteriormente, la suma de todos los errores involucrados (instrumentales y otros).
- Cuanto más grande sea N, menor será el valor de la incerteza estadística $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.
- Esto quiere decir que si bien la incerteza propia de la medición (σ) puede ser grande, tomando un número N suficientemente grande de mediciones podré reducirla hasta un valor conveniente!. Esto en cierto modo sugiere el número N de mediciones que se deben tomar en un experimento, ya que en función del valor de $\boldsymbol{\sigma}$ se buscará que $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ sea menor que el valor que provenga del error de apreciación.

Esta situación puede ilustrarse retomando la imagen de los jugadores de golf. Podemos considerar el caso de un jugador bastante bueno cuyo conjunto de N=10 pelotitas caen dentro de un radio pequeño respecto del hoyo. Su dispersión ($\boldsymbol{\sigma}$) resulta pequeña comparándola con la del jugador “malo” cuya dispersión ($\boldsymbol{\sigma}'$) es sensiblemente mayor (por ej. el doble!). Sin embargo, el jugador malo, al tirar por ejemplo N´=100 tiros mejorará la dispersión final según la expresión estadística $\frac{\sigma'}{\sqrt{N'}}$, obteniendo quizás un resultado final más preciso que el del jugador bueno, solo porque su valor de N´ es suficientemente grande...

Calcular cuanto tiene que valer N´ para que la dispersión estadística del jugador “malo” sea mejor que la del “bueno” si es que $\sigma' = 2\sigma$ y N=10.

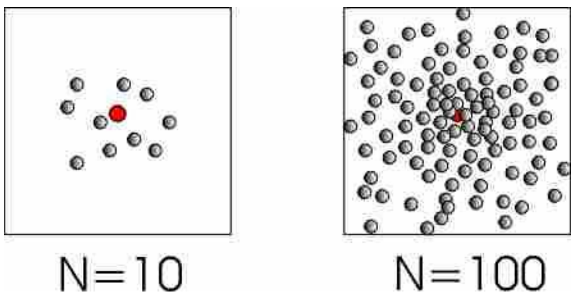

Figura 2.3: Comparamos una medición con baja dispersión pero poca estadística con otra de mayor dispersión y mucha estadística. Estadísticamente hablando, la peor puede resultar la mejor!.