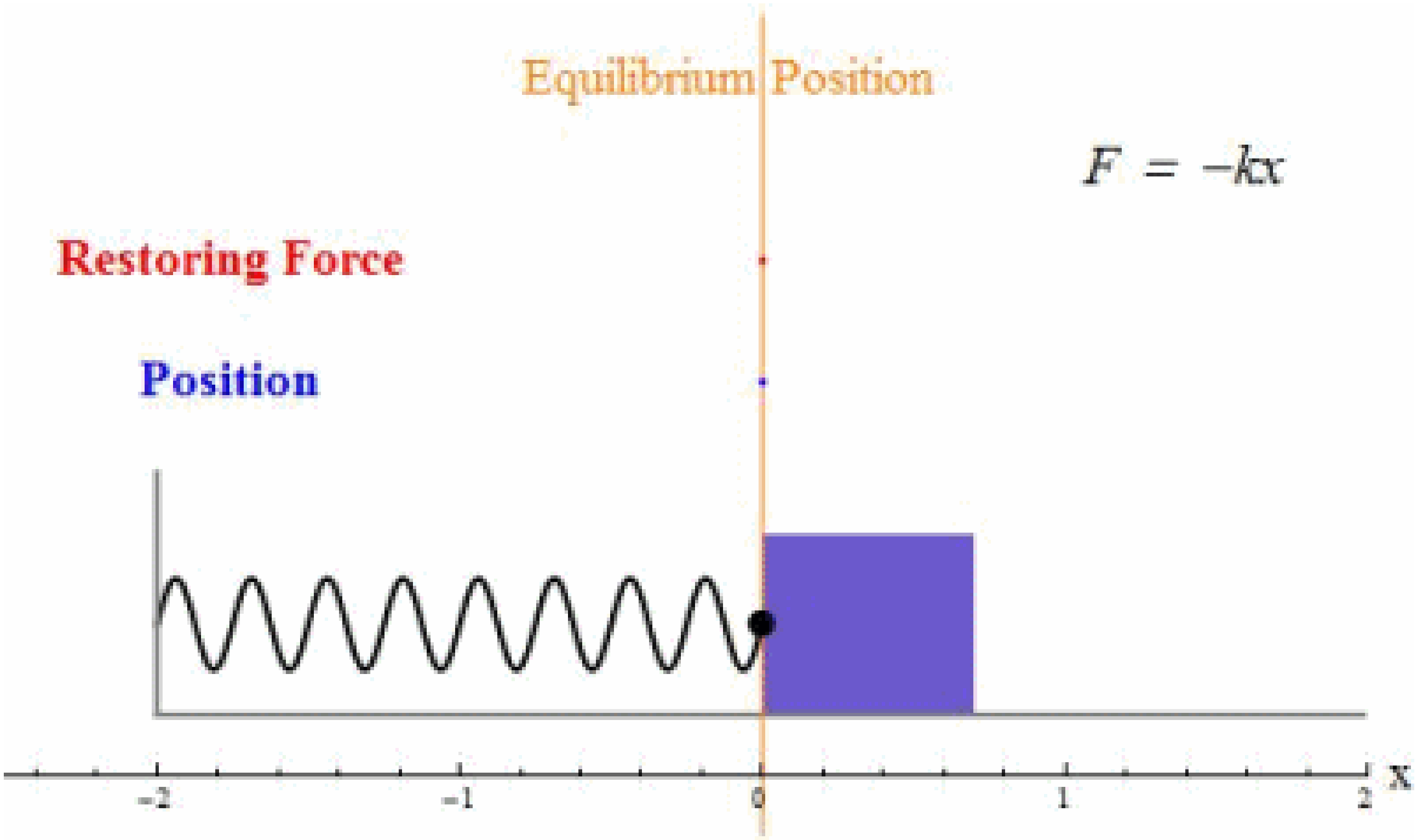
# Movimiento Oscilatorio

Alejandro Pardo Pintos - Laboratorio 1 – 2°C 2019

# Fuerza Elástica

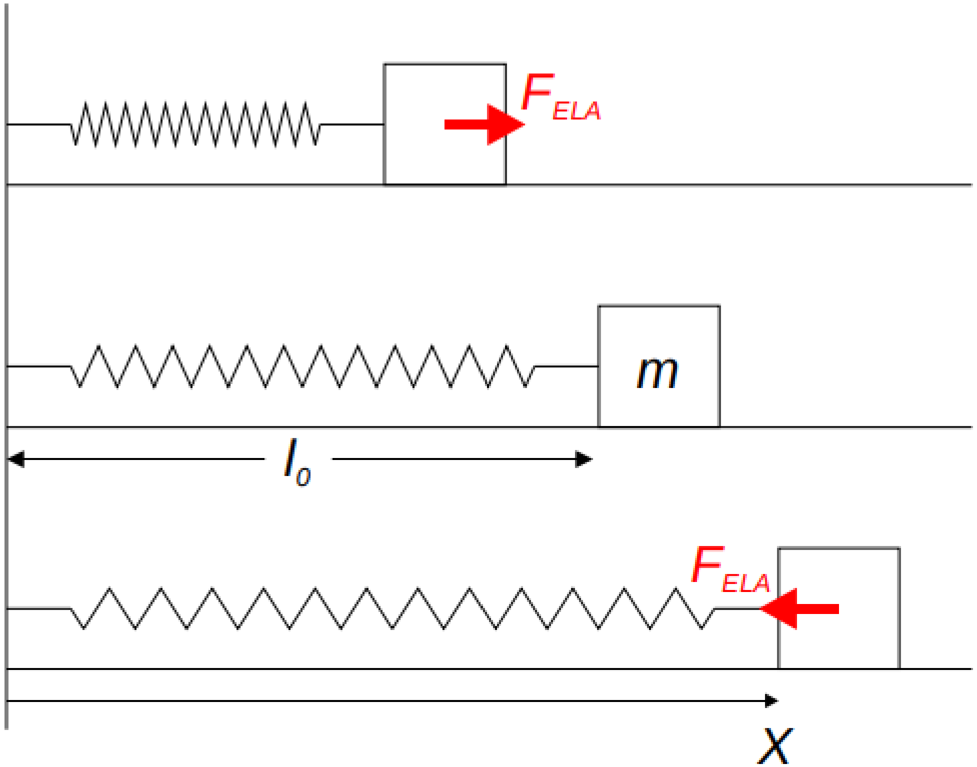
# Fuerza Elástica



# Fuerza Elástica

## Hipótesis

- Movimiento 1D.
- Sin rozamiento (por ahora).
- Resorte ideal: perfectamente elástico y sin masa.




Fuerza Elástica

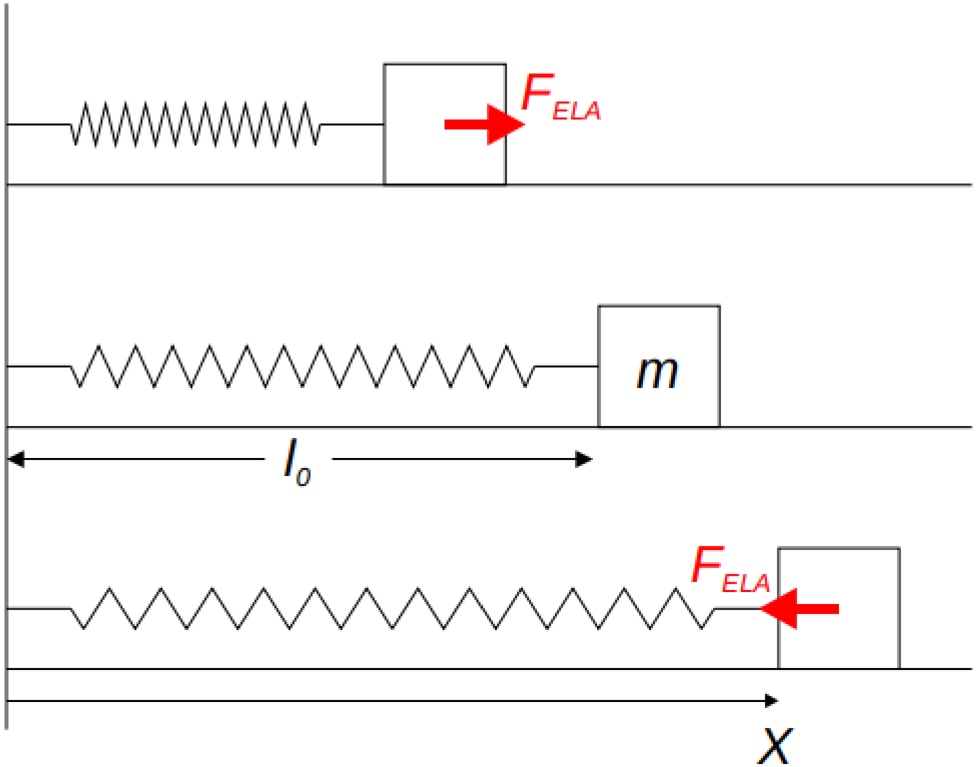
$$\overline{F}_{ELA} = -k(x - l_0)\hat{\mathbf{x}}$$

Constante Elástica → N/m

# Fuerza Elástica

Hipótesis

- Movimiento 1D.
- Sin rozamiento.
- Resorte ideal: perfectamente elástico y sin masa.




**2da Ley de Newton:**

$\hat{y})$

$$m\,\ddot{y} = N - P$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow N = P$$

$\hat{x})$

$$m\,\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

# Ecuación de movimiento

Reordenando queda: $m\,\ddot{x} + k(x - l_0) = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\,l_0}{m}$

Nos queda una ecuación diferencial

- Ordinaria
- Lineal
- Coeficientes constantes
- No homogénea
- Orden 2

A partir de Teoría que no voy a explicar como funciona (cursar Matemática 3), sabemos que:

Solución particular

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

Solución homogénea

$$\boxed{\ddot{x}_H + \frac{k}{m}x_H = 0}$$

# Solución Homogénea

$$\ddot{x}_H + \frac{k}{m} x_H = 0$$

Propongo como solución suma de Senos y Cosenos

$$x_H(t) = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$$

$$\dot{x}_H(t) = B\omega\cos(\omega t) - C\omega\sin(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}_H(t) = -B\omega^2\sin(\omega t) - C\omega^2\cos(\omega t)$$

$$\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{\frac{N}{m}}{kg} = \frac{\frac{kg\frac{m}{s^2}}{m}}{kg} = \frac{1}{s^2}$$

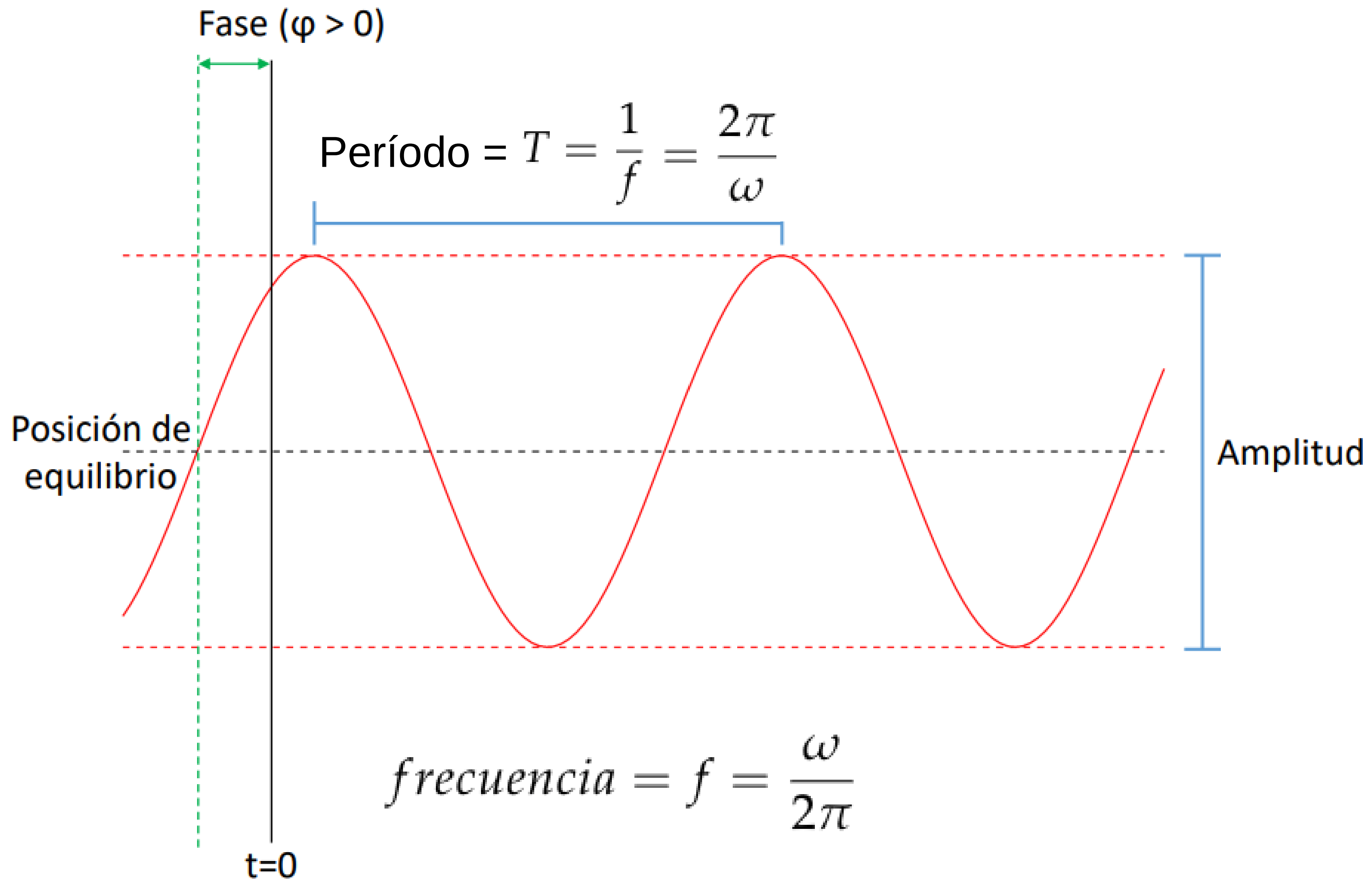
Usando identidades trigonométricas

$$x_H(t) = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Más fácil de interpretar gráficamente

# Solución Homogénea

$$x_H(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$



# Solución Particular

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k\, l_0}{m}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \Rightarrow x_H(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Para la solución particular propongo aquella en la que la masa está quieta $\Rightarrow$ $\ddot{x}_p = 0$

Reemplazando $\Rightarrow$ $x_p = l_0$

# Solución General

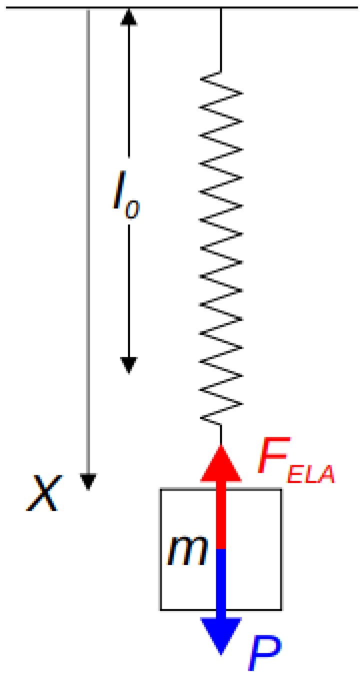
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\,l_0}{m}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

$$\boxed{x(t) = l_0 + A\sin(\omega t + \varphi)}$$

A y φ salen de las condiciones iniciales.

Si considero que el resorte cuelga de un punto fijo



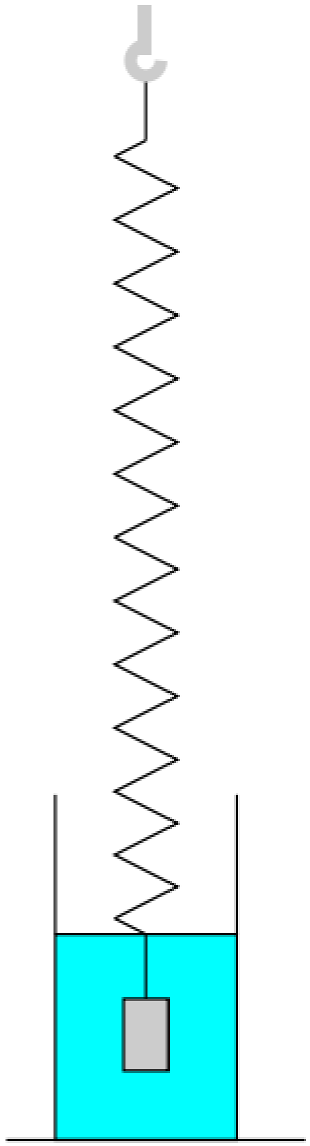

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) + mg$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kl_0}{m} + g$$

$$x_p = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\sin(\omega t + \varphi)}$$

# Movimiento Oscilatorio Amortiguado



Fuerza proporcional a la velocidad $F_R = -b\dot{x}$

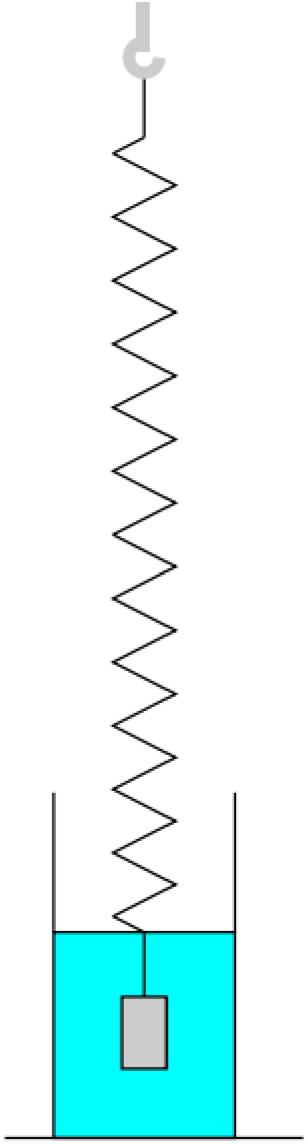
La 2da Ley de Newton queda:

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0) - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{kl_0}{m}$$

La solución particular no cambia: $x_p = l_0 + \frac{mg}{k}$

# Movimiento Oscilatorio Amortiguado



$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Para la solución homogénea, propongo $x_H(t) = Ae^{-\alpha t}$

Reemplazando, obtengo una ecuación cuadrática para alpha: $\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m}\alpha = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b/m}{2} \pm \sqrt{\frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2}$$

$$\frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2$$

Según el signo obtendremos distintos tipos de soluciones

# Movimiento Oscilatorio Amortiguado

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b/m}{2} \pm \sqrt{\frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2} \qquad \frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2$$

<u>3 casos</u>

$\frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2$ > 0. Caso sobreamortiguado

$\frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2$ = 0. Amortiguamiento crítico

Exponenciales reales de solución.

No hay oscilación.

$\frac{(b/m)^2}{4} - \omega^2$ < 0. Caso subamortiguado

Exponenciales complejas.

Hay oscilación.

$$\Omega = \omega^2 - \frac{(b/m)^2}{4} \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\frac{b/m}{2} \pm i\Omega$$

# Movimiento Oscilatorio Amortiguado

$$\alpha_{1,2} = -\frac{b/m}{2} \pm i\Omega \quad \Rightarrow \quad x_H(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

Reordenando y usando que: $e^{\pm i\phi} = \cos(\phi) \pm i\sin(\phi)$

$$\boxed{x_H(t) = A e^{\frac{-b/m}{2} t} \cos(\Omega t + \varphi)}$$

$$\Omega = \omega^2 - \frac{(b/m)^2}{4}$$

Frecuencia menor

Amplitud decreciente en el tiempo

# Movimiento Oscilatorio Amortiguado

$$x(t) = Ae^{\frac{-b/m}{2}t}\cos(\Omega t + \varphi) + \frac{mg}{k} + l_0$$

$$F = C + Be^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \varphi)$$