Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2022

Cuadrados Mínimos

Lucía Famá, Patricio Grinberg,
Liliana Álvarez, Mauro Silberberg,
Eugenia Gomes

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Resultado y una MF y forma de expresarlo

Resultado

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

$\boldsymbol{\bar{x}}$ ***o*** $\boldsymbol{x_0}$**:** Valor más representativo

$\Delta \boldsymbol{x}$**:** Incerteza Absoluta

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boxed{\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)}} \longrightarrow \boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$

$$\vdots$$

x, y, z ... variables independientes

$$\boxed{W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)}$$

$$\boxed{\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\substack{x_0,\\ y_0,\dots}}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{\substack{x_0,\\ y_0,\dots}}\right)^2 \Delta y^2 + \ \dots}}$$

Mediciones Directas (MD)

Valor más representativo

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Incerteza Absoluta para diferentes casos

Si mido dentro del error instrumental $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\Delta x = \sigma_{ap}}$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_{ap} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{ap}$$

Expresión

$$x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right) Ud.$$

Si mido fuera del error instrumental → Error estadístico

Generalizando … Si tomo N medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones:

El error de cada medida será: $\Delta x = S \rightarrow \sigma$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S)\ Ud.$$

$S \rightarrow$ Representa el ancho de la distribución Gaussiana

Si realizamos una nueva medición, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$$(\bar{x} - S, \bar{x} + S) \longrightarrow (\mu - \sigma, \mu + \sigma)$$

Si mido fuera del error instrumental → Error estadístico

Generalizando … Si tomo N medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones:

El error de la media *(que representará el error de la MF)* será:

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{x} = S_{\bar{x}} \rightarrow \sigma_e}$$

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{x} = S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}}}$$

Expresión

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm S_{\bar{x}})\ Ud.}$$

Si realizamos una nueva serie de medidas de la MF, su resultado tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$$(\bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}}) \rightarrow (\mu - \sigma_e, \mu + \sigma_e)$$

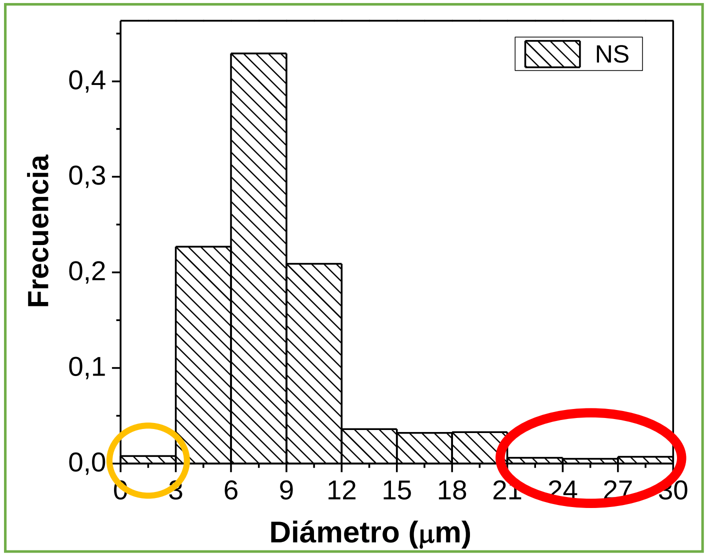
¿Varían $S, S_{\bar{x}}$ si aumenta N, cómo varía?

¿Qué representa S en un experimento, con qué se relaciona?

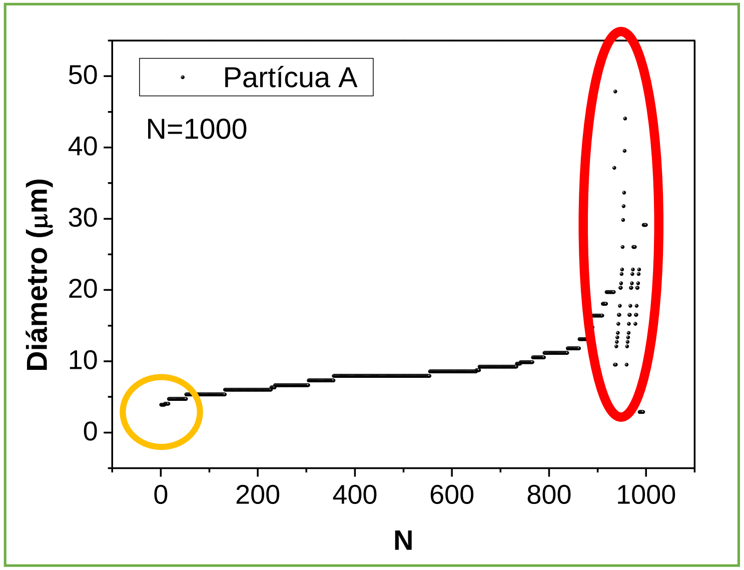
¿Cuál es la probabilidad que una nueva medición se encuentre en el intervalo de confianza $\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$?

¿Cuándo empleo como error S y cuándo el error de la media $S_{\bar{x}}$?

¿Hay datos que puedo descartar?



Datos ordenados de menor a mayor



Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

Objetivo de la práctica de hoy y …. Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo y de la longitud empleando Mediciones Indirectas y el Método de Cuadrados Mínimos

EXPERIMENTO

OBTENER EL PERÍODO DEL PÉNDULO EMPLEANDO UN FOTOSENSOR Y DETERMINARLA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD ($\boldsymbol{g}$)

ACTIVIDAD 1: MEDICIÓN INDIRECTA

- Determinar el valor de la aceleración de la gravedad ($\boldsymbol{g}$) a partir del resultado de T y de l, y mediante la Ley Física:

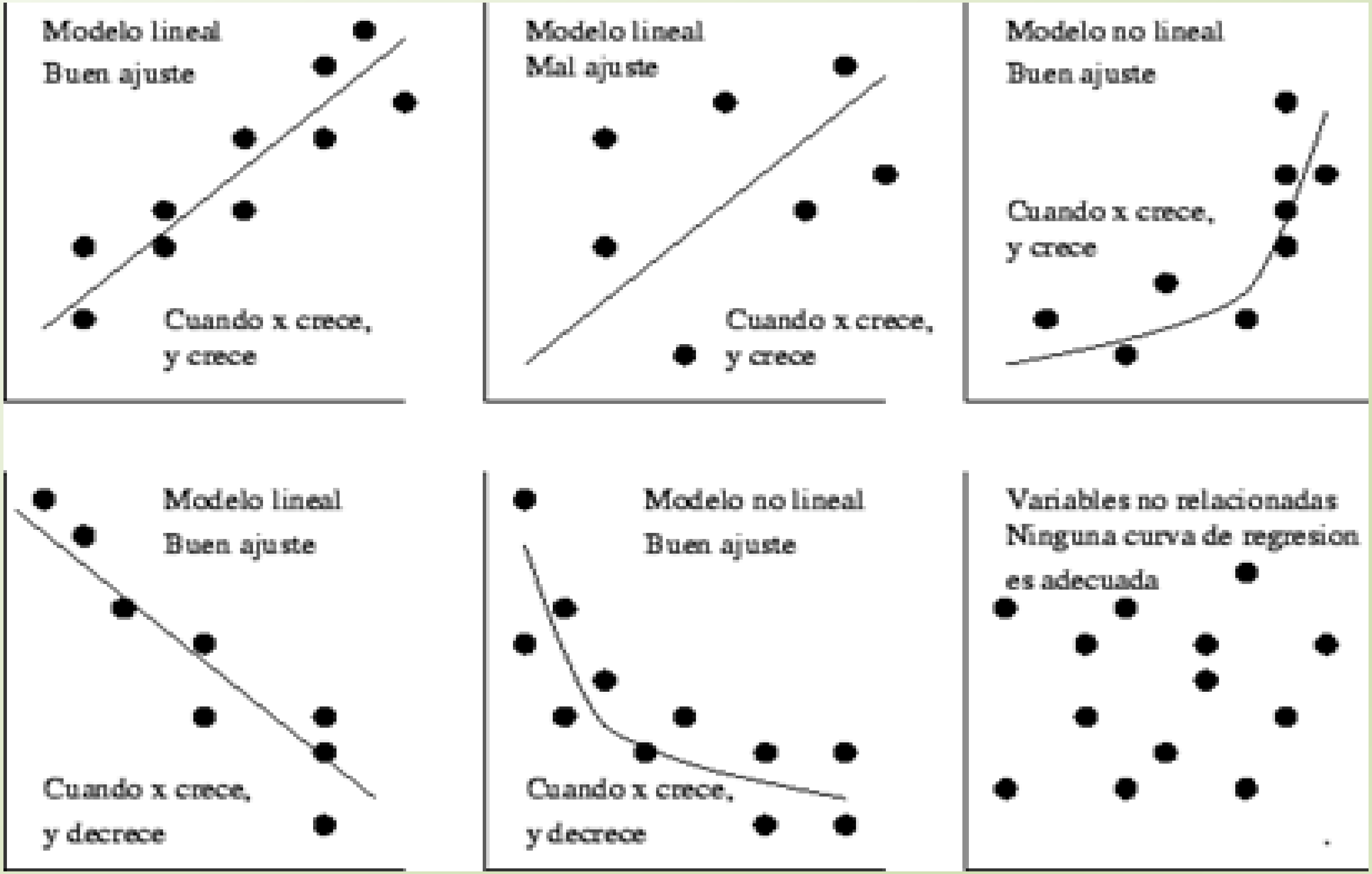
$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

- Obtener el período de un péndulo para una longitud a partir de medir N veces T (Mediciones directas), empleando un fotosensor.

$$T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ s \qquad \Delta T??$$

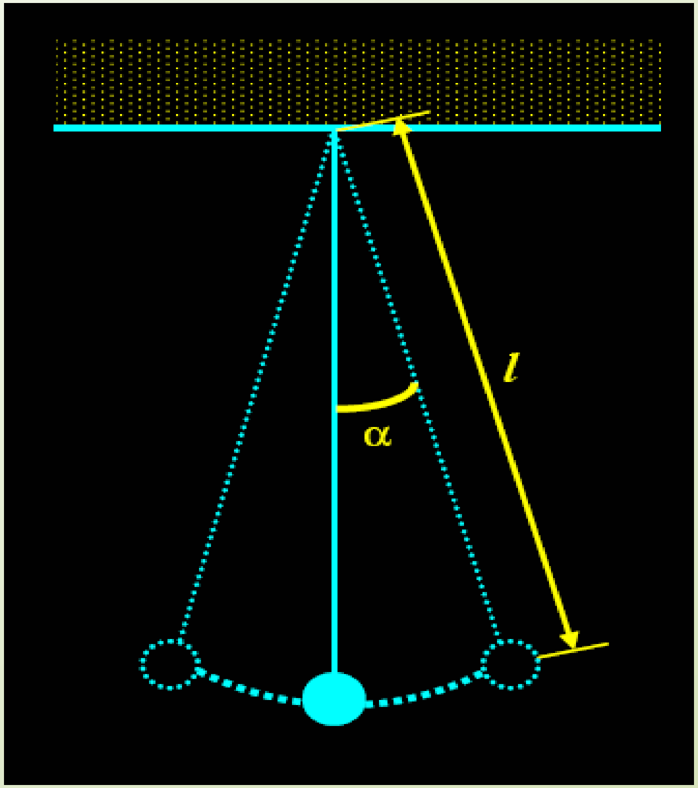
CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre dos variables usando un Modelo Matemático



¿Cómo se relacionan *T* y *l* en el modelo del péndulo simple?

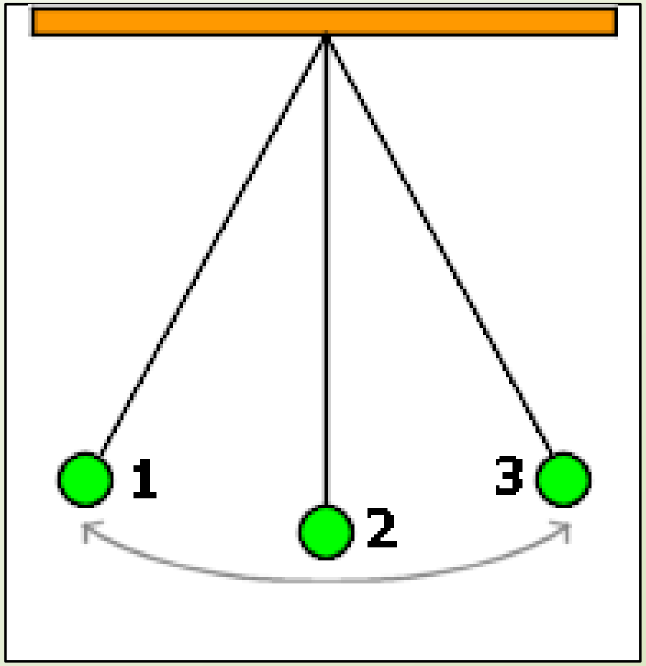
PÉNDULO SIMPLE



El **péndulo simple** (**péndulo ideal**) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa ***m*** que está suspendida mediante un **hilo inextensible y sin peso**. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

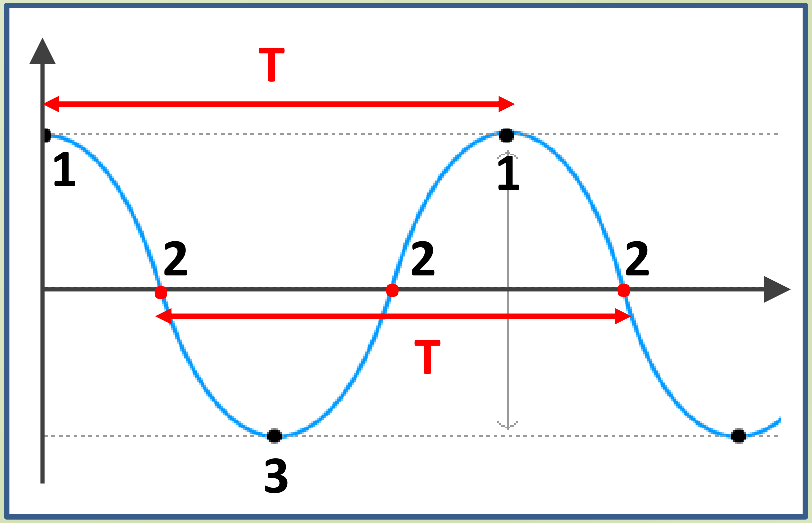
Período de un Péndulo Simple

Período del péndulo



Tiempo de una oscilación completa

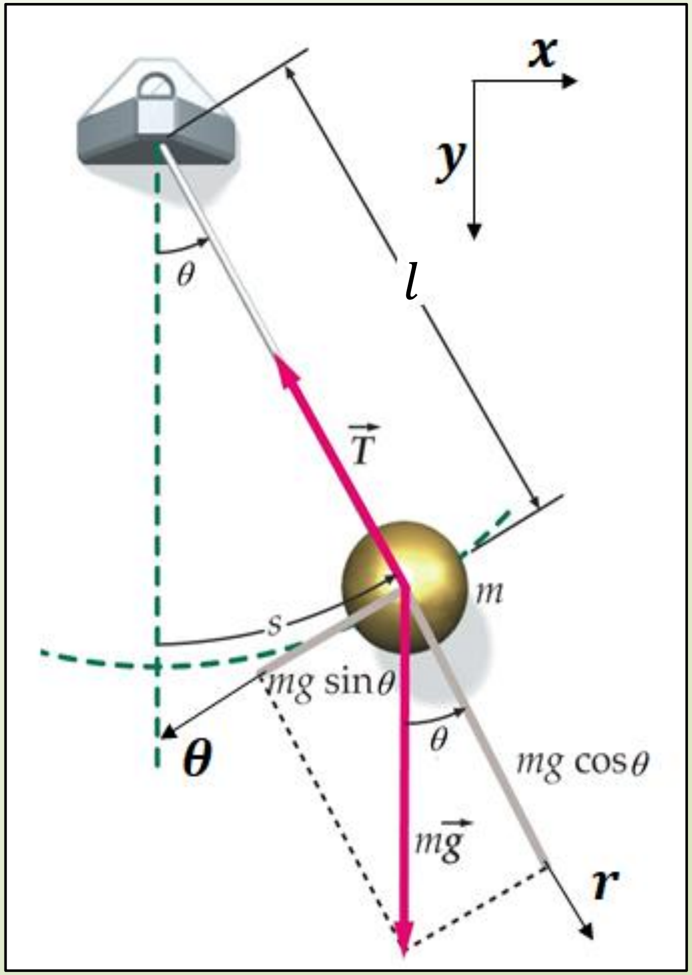
Tiempo que tarda el péndulo en partir desde uno de sus extremos de amplitud (1), pasar por el punto de equilibrio (2), llegar al otro extremo de amplitud (3) y regresar nuevamente al primer punto (1)



¿Y si comienzo a medir cuando pasa por el punto de equilibrio (2)?

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}: mgcos\theta - T = ma_r \longrightarrow a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \longrightarrow a_\theta = -gsen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

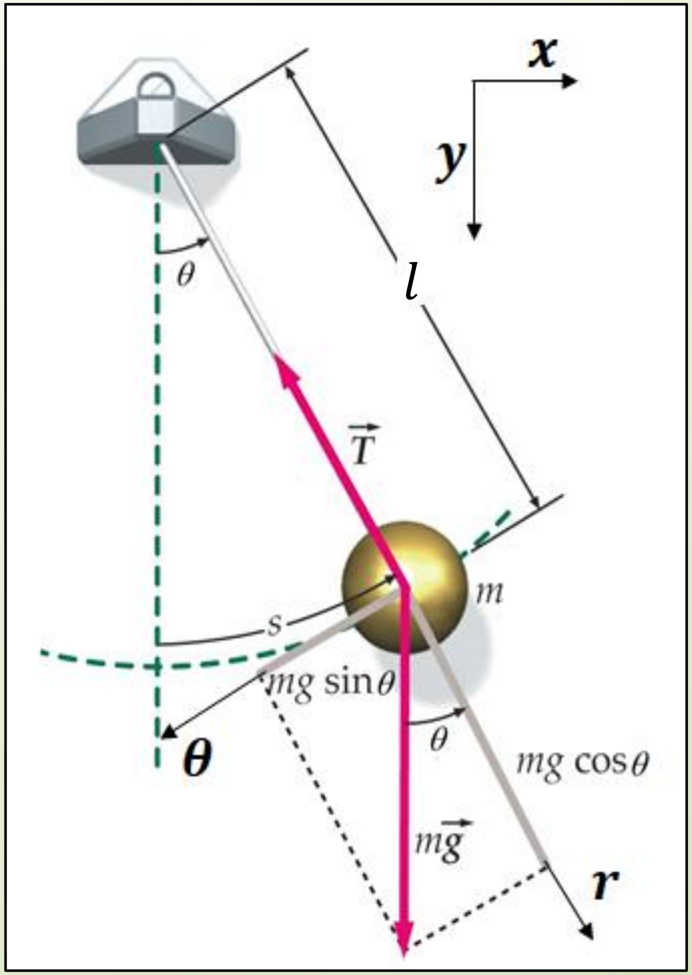
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$$\theta \ll 1 \;\Rightarrow sen\theta \approx \theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Solución: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)}$ $\quad \theta_0 \ll 1$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad f = \frac{w}{2\pi}$ $\quad T = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Período de un Péndulo Simple

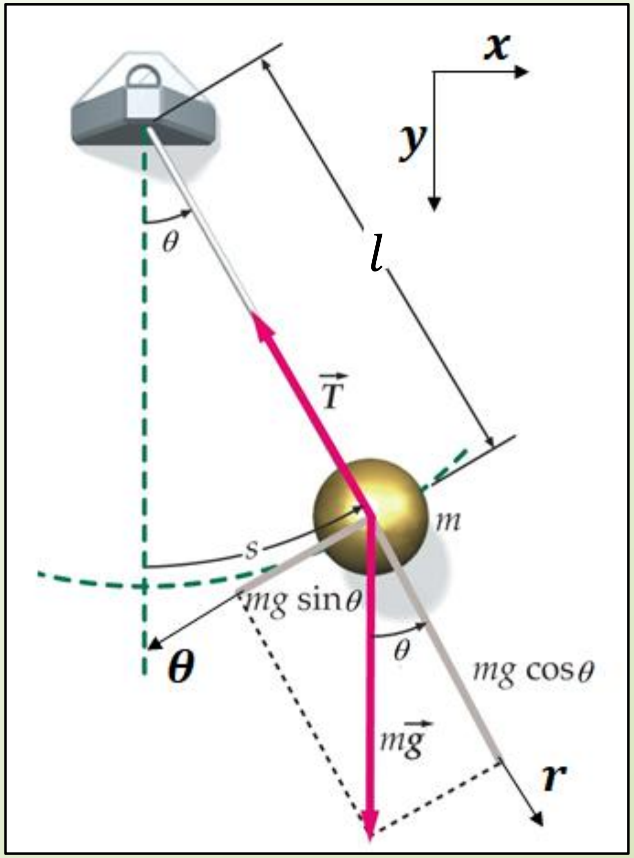
- Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2do orden

$$l\,\ddot{\theta} + g sen\theta = 0$$

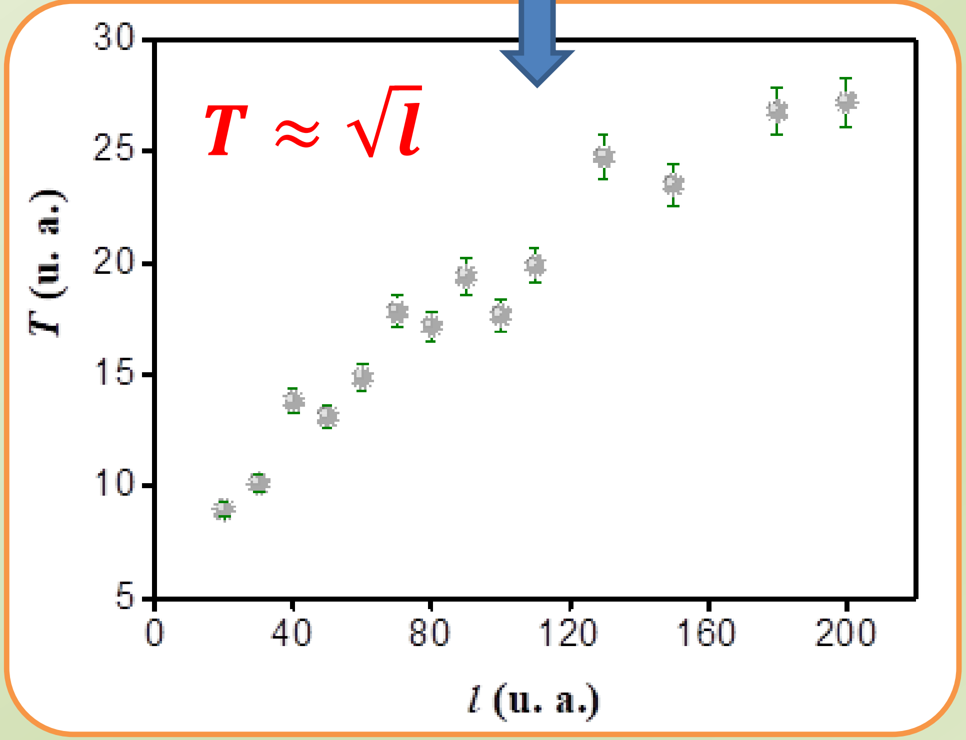
Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

¿Cómo se relacionan T y l en el modelo del péndulo simple?



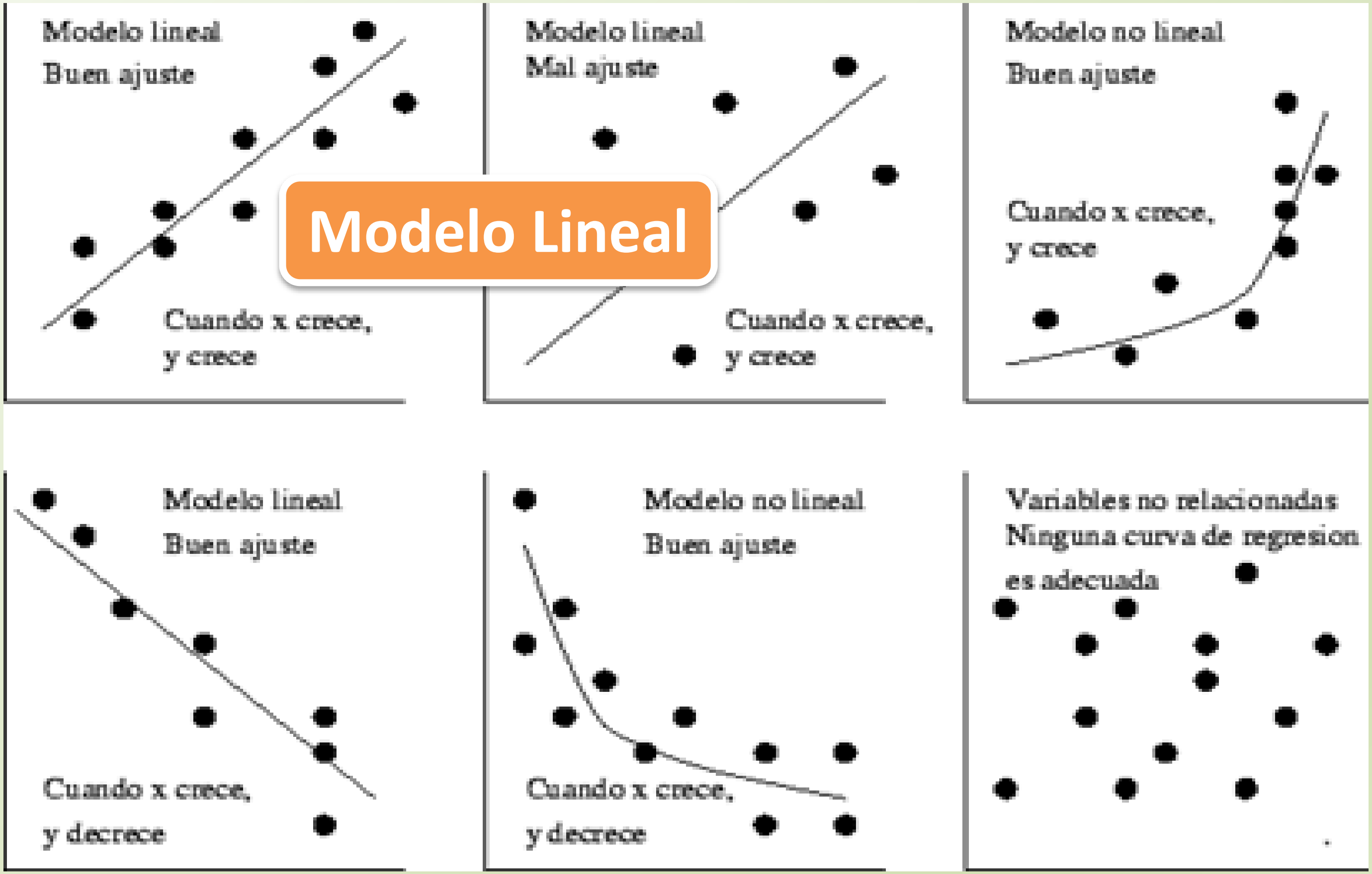
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Intentaremos obtener g a partir del gráfico de T y l



Cuadrados Mínimos

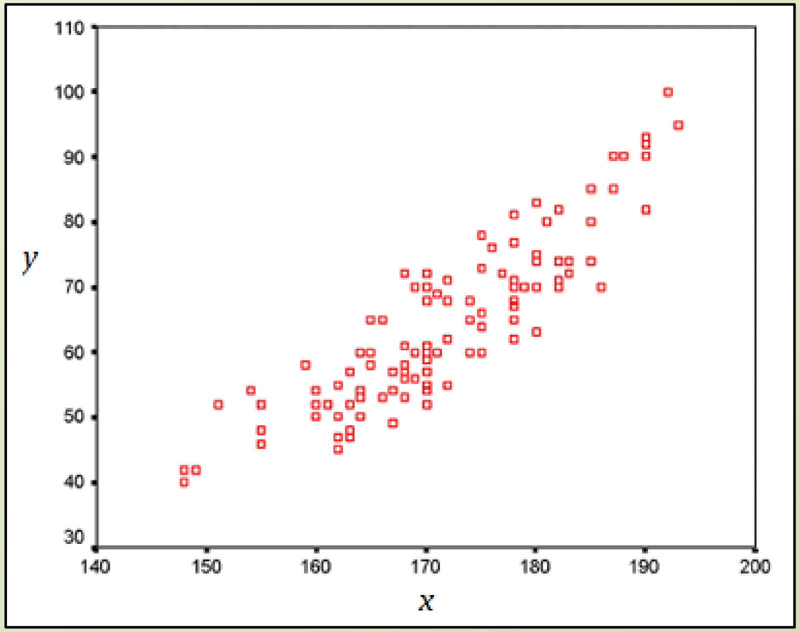
Relación entre dos medidas … caso más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

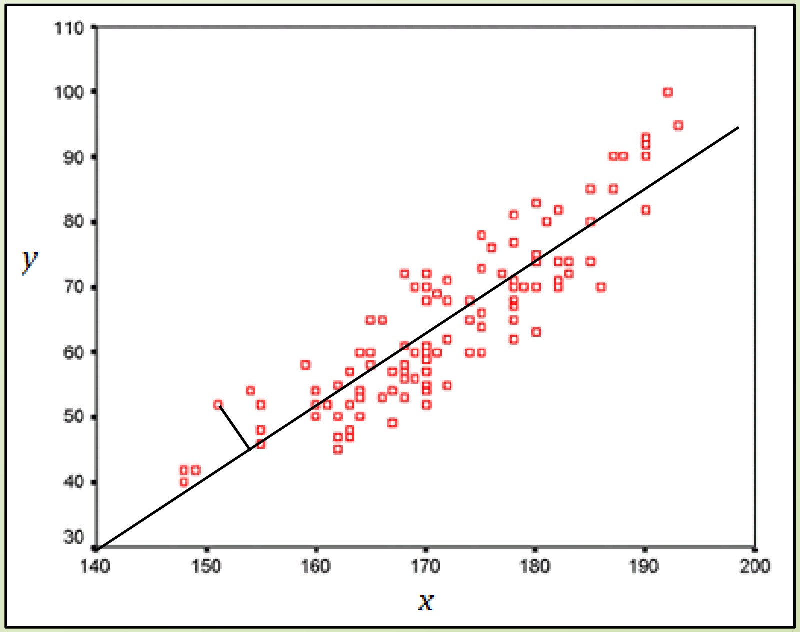
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos experimentales

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

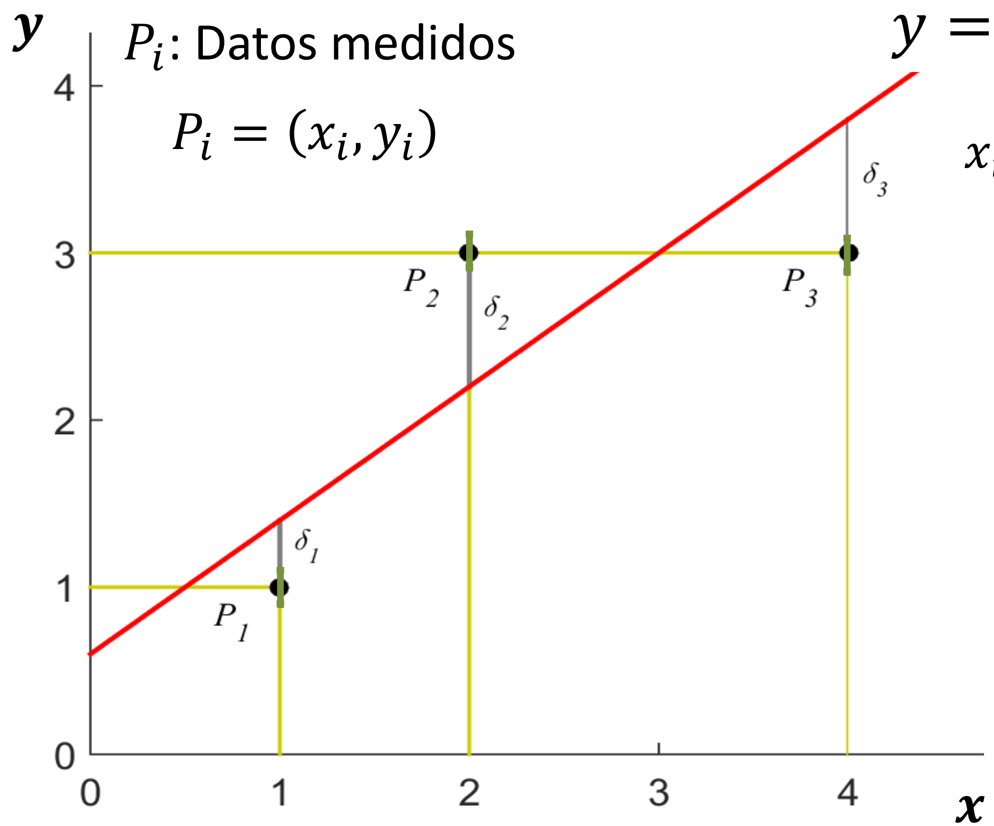
Caso aún más sencillo

P_i: Datos medidos

$$P_i = (x_i, y_i)$$

$$y = f(x) = mx + b$$

$$x_i = (\overline{x_i} \pm \Delta x_i) \quad y_i = (\overline{y_i} \pm \Delta y_i)$$



Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{\overline{y}}\right|$$

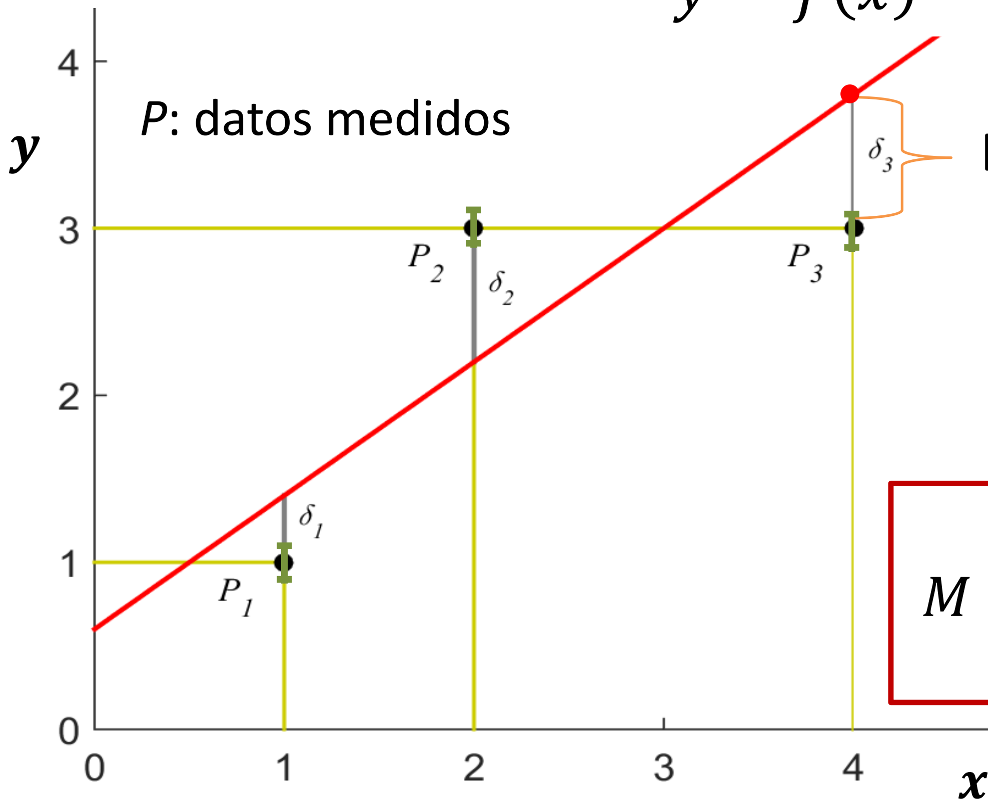
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen igual incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



Distancia ➡ Residuos (δ_i)

$$\delta_i{}^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Experimental   Recta

$$\boxed{M = \sum_1^N \delta_i{}^2 = \sum_1^N [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m,b) = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$M(m,b) = \sum_{1}^{N} {y_i}^2 + m^2 \sum_{1}^{N} {x_i}^2 + Nb^2 + 2mb \sum_{1}^{N} x_i - 2m \sum_{1}^{N} x_i y_i - 2b \sum_{1}^{N} y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \qquad 2m \sum_{1}^{N} {x_i}^2 + 2b \sum_{1}^{N} x_i - 2 \sum_{1}^{N} x_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0 \qquad 2Nb + 2m \sum_{1}^{N} x_i - 2 \sum_{1}^{N} y_i = 0$$

$$\boxed{m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Ejemplo

Encontremos la recta que mejor aproxima a los siguientes datos:

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

	x	y	x.y	x^2
	7	2	14	49
	1	9	9	1
	10	2	20	100
	5	5	25	25
	4	7	28	16
	3	11	33	9
	13	2	26	169
	10	5	50	100
	2	14	28	4
Σ	55	57	233	473

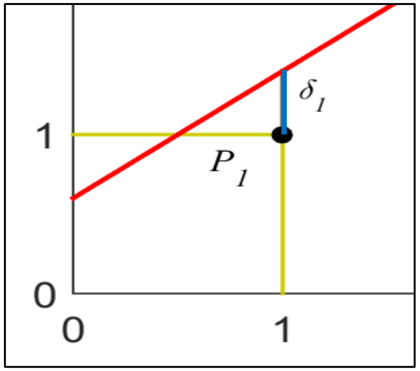
$$m = \frac{\Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma Y)}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}} = \frac{233 - \frac{55 \cdot 57}{9}}{473 - \frac{(55)^2}{9}} \approx -0{,}84$$

$$b = \overline{y} - m\overline{x} = \frac{\Sigma Y}{n} - (-0{,}84)\frac{\Sigma x}{n} = \frac{57}{9} + 0{,}84 \cdot \frac{55}{9} = 11{,}4$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \quad \dashrightarrow \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

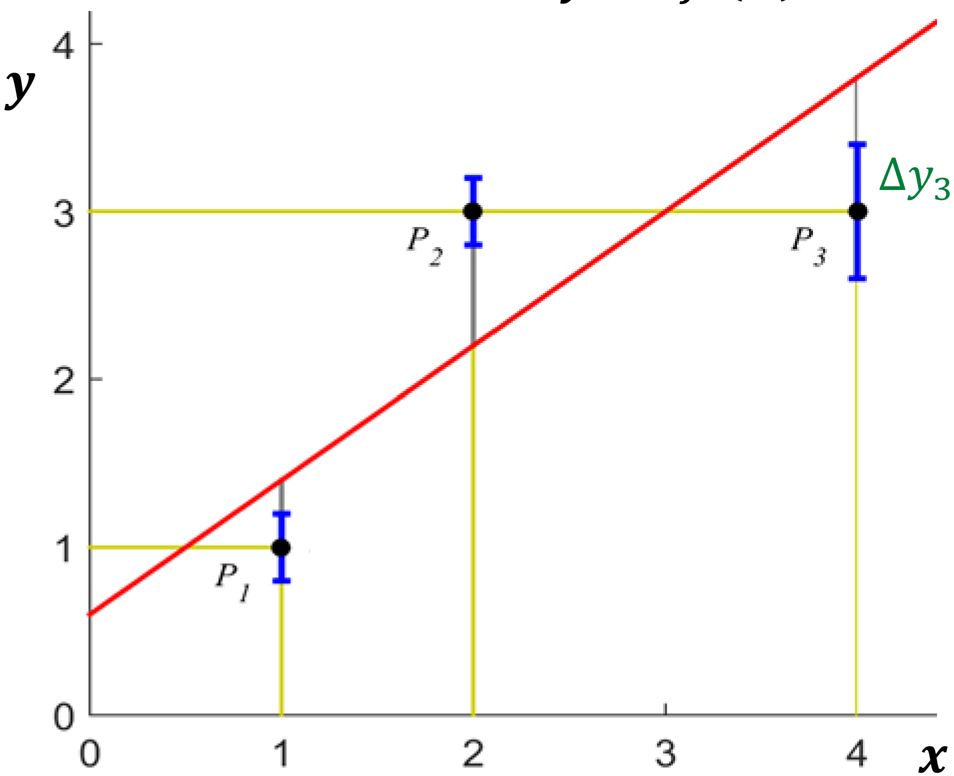
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso 2

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$

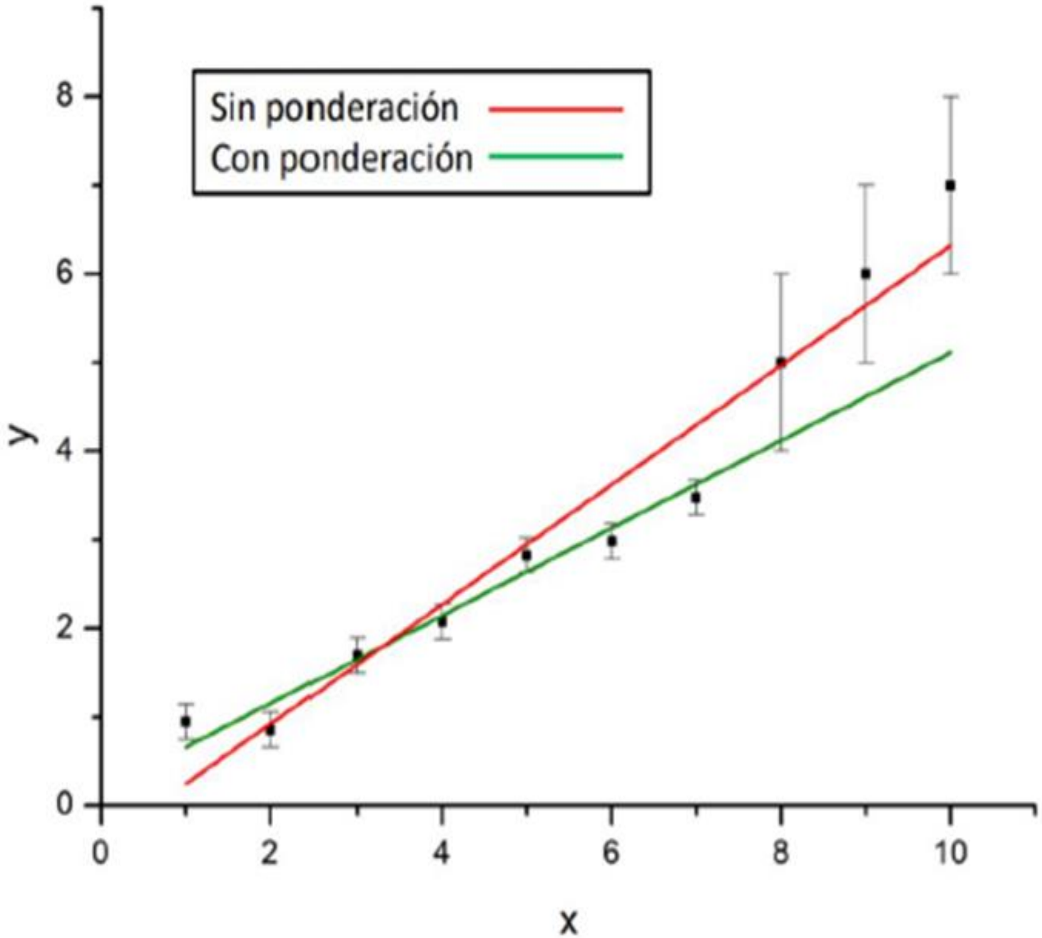


Hipótesis: **Considera a las medidas más precisas las más relevantes**

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos Normalizados

SIN Ponderación vs **CON** Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

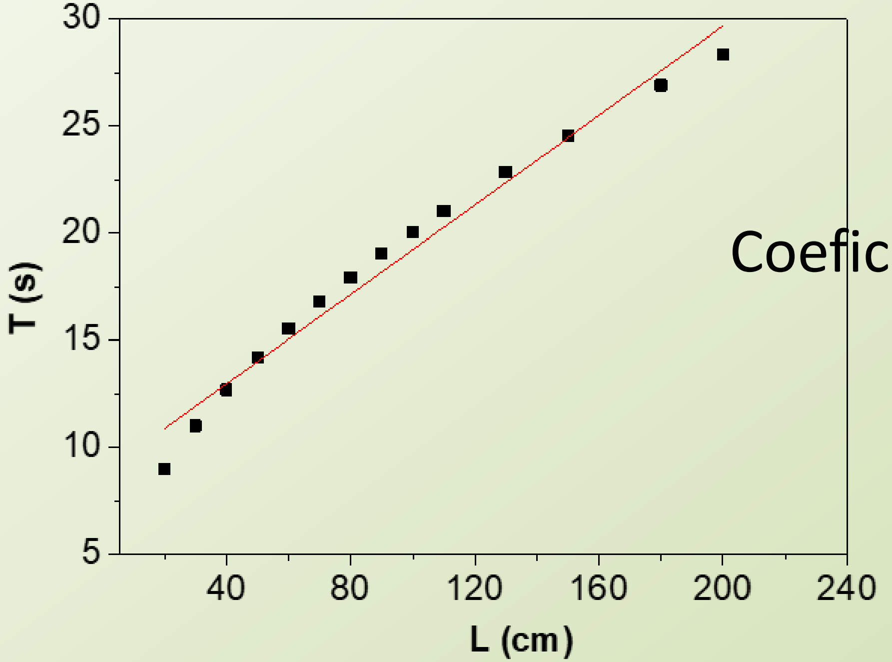
CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

¿Qué podemos discutir sobre un ajuste?

Está bien usar el modelo lineal en este caso?



Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson ($\boldsymbol{r}$)

Chi-cuadrado (χ^2)

Gráfico de Residuos

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$\boxed{r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}}$$

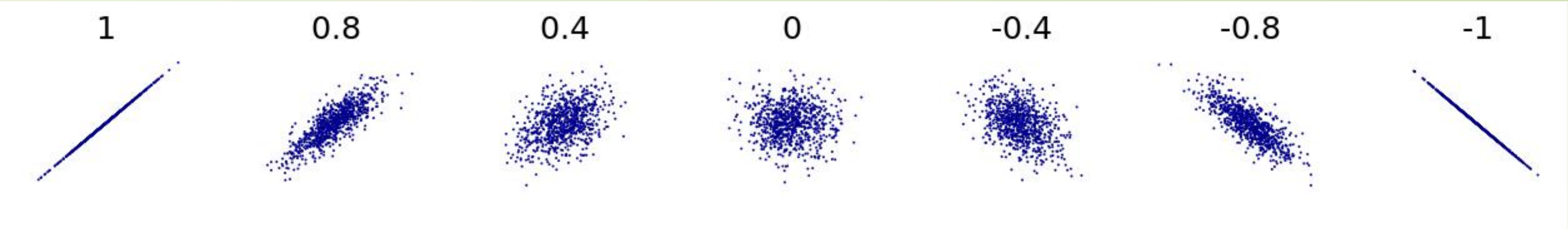
$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{-1 \leq r \leq 1}$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

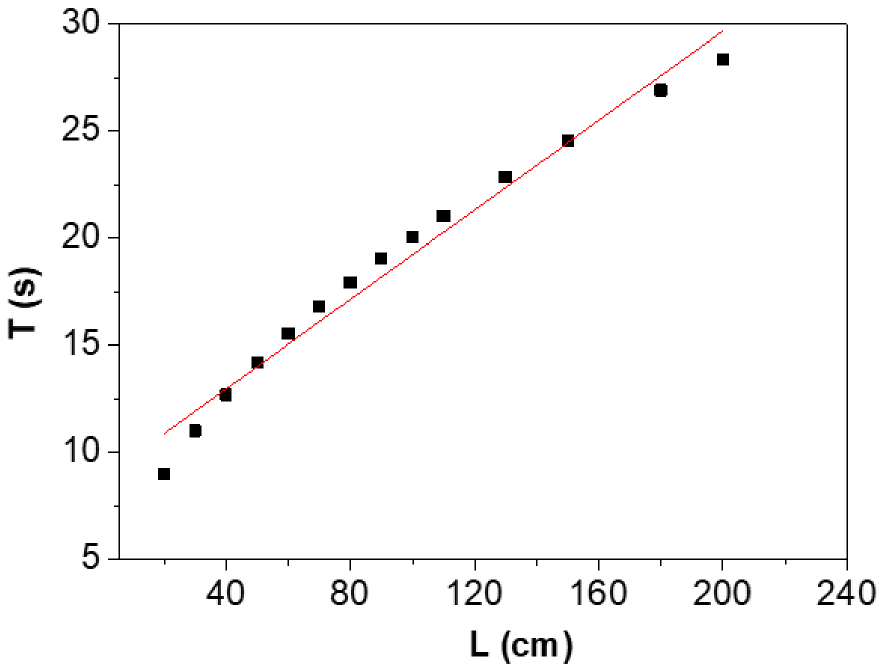
Se espera que $|r| \sim 1$



El coeficiente de correlación de Pearson se puede calcular en Python usando:

corrcoef() método de Numpy

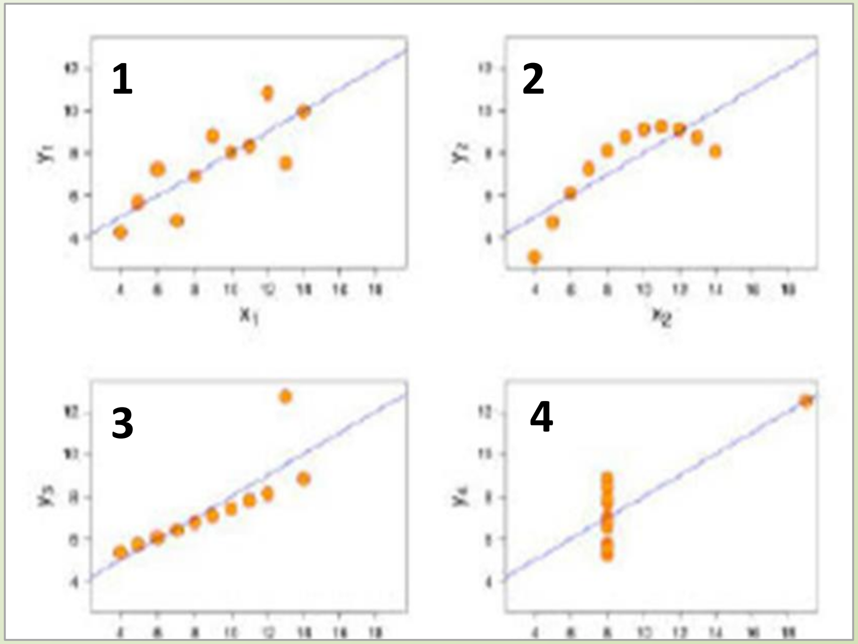
Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l!!



$$r = 0,988$$

Pero **OJO!!!!**

Estos cuatro ejemplos tienen igual valor de $|r|$

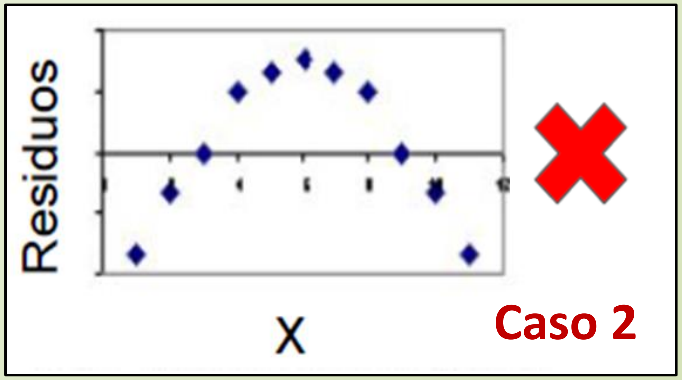


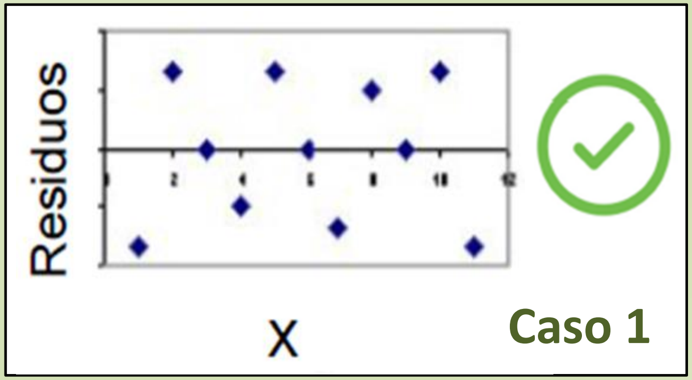
Necesito evaluar algo Más!!

Evaluar los residuos!!!

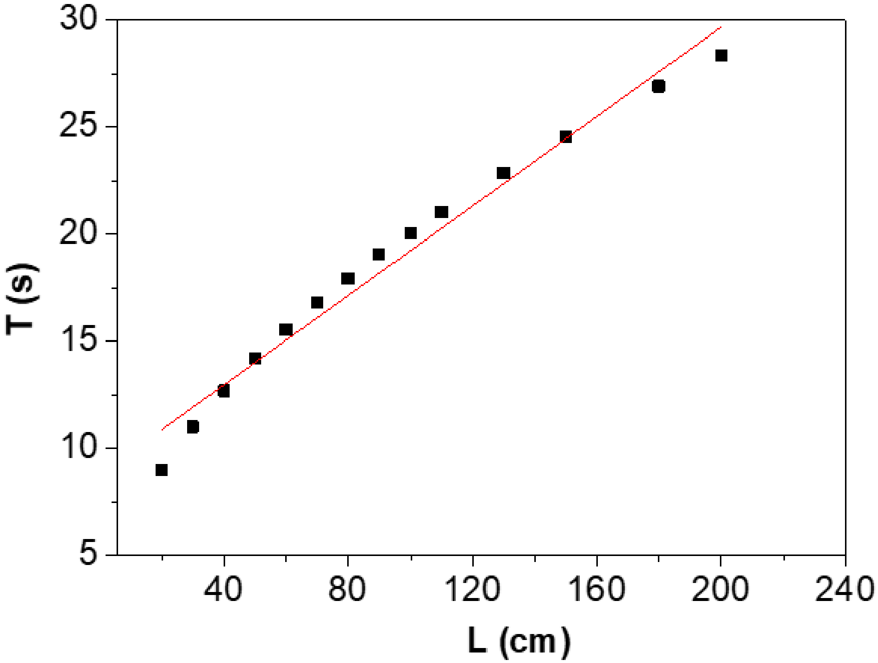
Residuos

En los casos 2, 3 y 4 sucedió que la distribución de los datos alrededor de la recta no era normal. Los residuos tenían estructura

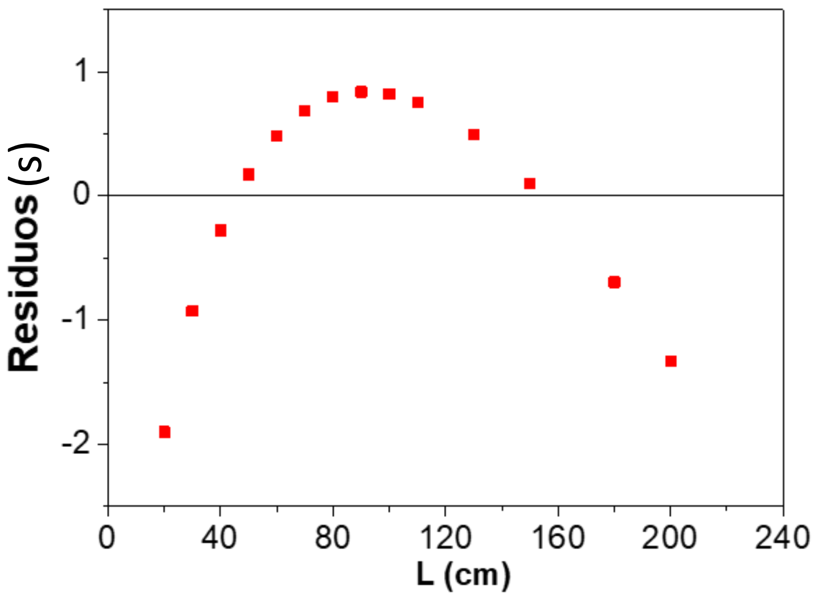




Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l!!



$$r = 0,988$$



Chi cuadrado reducido (χ_v^2)

Caso lineal:

N = número de datos

2: los grado de libertad

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Chi cuadrado reducido

$$\chi_v^2 = \frac{\chi^2}{N-2}$$

Chi-cuadrado reducido

$$\chi_v^2 \begin{cases} \boldsymbol{\chi_v^2 \sim 1} \\ \boldsymbol{\chi_v^2 \ll 1} \\ \boldsymbol{\chi_v^2 \gg 1} \end{cases}$$

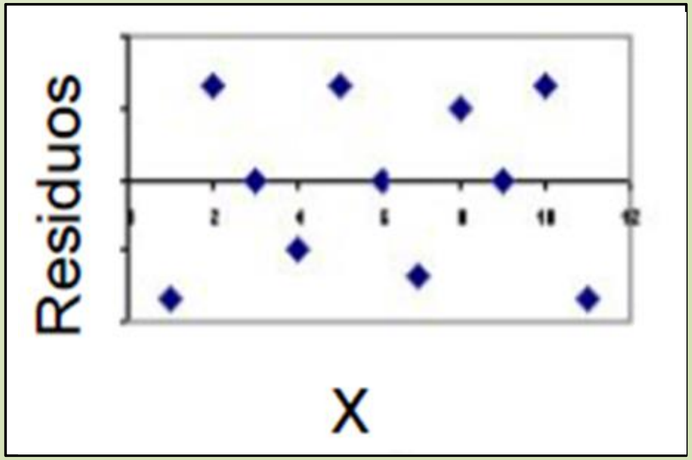
¿Qué esperamos?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson $\boldsymbol{r}$ ⇒ $|\boldsymbol{r}| \sim \mathbf{1}$

Chi-cuadrado reducido $\boldsymbol{\chi_v^2}$ ⇒ $\boldsymbol{\chi_v^2} \sim \mathbf{1}$

Residuos ⇒



EXPERIMENTO

OBTENER EL PERÍODO DEL PÉNDULO EMPLEANDO UN FOTOSENSOR Y DETERMINARLA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD $(\boldsymbol{g})$

ACTIVIDAD 2: CUADRADOS MÍNIMOS

- Determinar el período del péndulo (T) para 10 longitudes (l) diferentes en el rango 30-150 cm (o lo máximo que pueda).
- Obtener $g = (\overline{g} \pm \Delta g)\ Ud.$ a partir del uso de un modelo lineal del método de cuadrados mínimos.

¿MIDO N VECES CADA PERÍODO (T)?

EXPERIMENTO

PUEDO MEDIR 1 VEZ N PERÍODOS JUNTOS!!

N períodos juntos (T'): $T' = N.T \longrightarrow T = \frac{T'}{N}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{T} = \frac{\bar{T'}}{N}}$

Tiempo total de N períodos — 1 período

¿Y la **incerteza de T** medido así?

Propago

$\Delta T'$ es el error de T'

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 \Delta T'^2} = \frac{\Delta T'}{N}$$

La incerteza de una medida de tiempo largo $\longrightarrow$ $\Delta T' = S$

$$\boxed{\Delta T = \frac{S}{N}}$$

Calculemos S midiendo períodos de a 1, sólo para 1 longitud ya que cambiamos de diseño experimental

¿Variará si cambiamos la longitud del hilo?

EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 2: CUADRADOS MÍNIMOS

- Determinar el período del péndulo (T) para 10 longitudes (l) diferentes en el rango 30-150 cm (o lo máximo que pueda).

$$\bar{T} = \frac{\bar{T'}}{N} \qquad \Delta T_1 = \Delta T_2 = \ \dots = \Delta T_{10} = \frac{S}{N} \longrightarrow$$ **De Actividad 1!!**

- Graficar T en función de l (gráfico de puntos con incertezas).

- Discutir: *¿Qué forma parece tener la función graficada?*

ACTIVIDAD 2: CUADRADOS MÍNIMOS

EXPERIMENTO

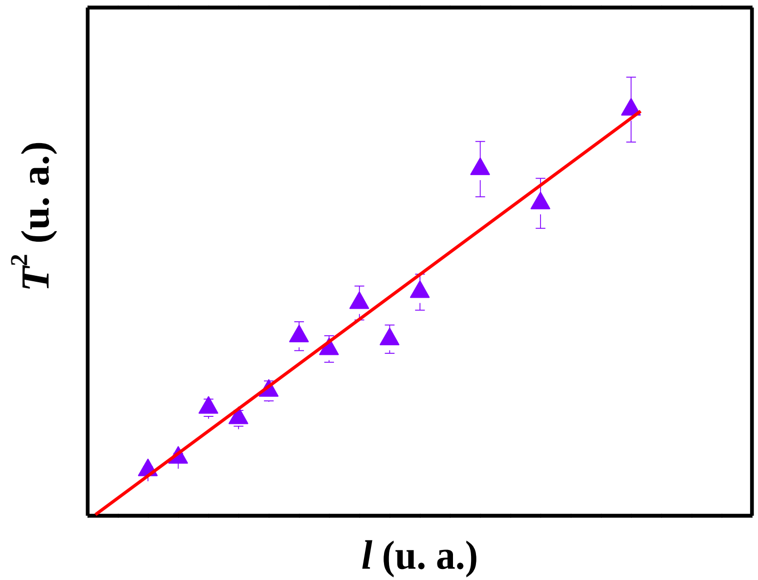
- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud.$ a partir del uso de un modelo lineal del método de cuadrados mínimos.

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{T}}_{T} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\sqrt{\boldsymbol{g}}}\underbrace{\sqrt{\boldsymbol{l}}}_{\tilde{l}}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{T^2}}_{\tilde{T}} = \underbrace{\frac{\boldsymbol{4\pi^2}}{\boldsymbol{g}}}_{\text{Pendiente}}\underbrace{\boldsymbol{l}}_{l}$$



ACTIVIDAD 2: CUADRADOS MÍNIMOS

EXPERIMENTO

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ (1) y $l = l$:

  Propago Eq. (1)!!

  1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $\tilde{T}$) y Δl

  2- Obtenga los errores relativos de $\tilde{T}$ y l ($\varepsilon_{r_{\tilde{T}}}$ y ε_{rl}) y compárelos

- Graficar $\tilde{T}$ en función de l con las incertezas (o l en función de $\tilde{T}$ dependiendo de los $\varepsilon_{r_{\tilde{T}}}$ y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje "y".

- Realizar un ajuste por dos modelos lineales:
  - ✓ $y = mx$
  - ✓ $y = mx + b$

  ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?

  ¿Tiene sentido físico $b \neq 0$? ¿A cuántos sigmas de lo esperado está? A qué podría deberse?

- Graficar los residuos de ambos ajustes y discutirlos.

- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud.$ a partir de los resultados del ajuste.

ACTIVIDAD 3: COMPARACIÓN DE RESULTADOS

- Comparación de g de las Actividades 1 y 2
  - ✓ *¿Presenta diferencias significativas entre sí?*
  - ✓ *¿Cuál resultó más preciso?*
  - ✓ *¿Cuál el más exacto?*
  - ✓ *A cuántos σ quedaron ambos resultados de g respecto del esperado: g= 9.79688239 m/s^2*

AYUDA

EXPERIMENTO

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

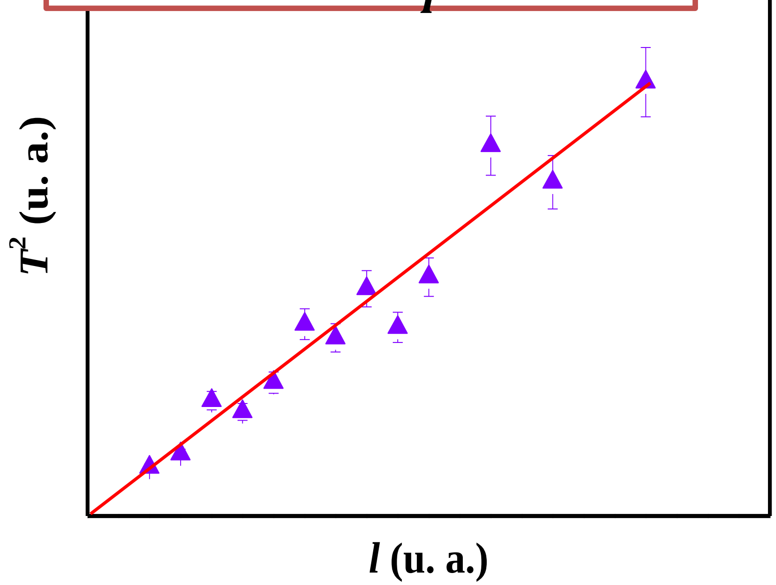
y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\boxed{\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}}$$

Ejemplo Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \gg \varepsilon_{r_l}$



¿Δg?

Propago!!

$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta\pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π?

AYUDA

EXPERIMENTO

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r\ l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \quad \Rightarrow \quad \underset{y}{l} = \frac{g}{4\pi^2} \underset{x}{T^2}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \longrightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿ Δg?

Propago!!

INFORME 2: ENTREGA 27-4 HASTA LAS 14 HS

EN GOOGLE.DOC Y EN FORMATO PDF EN EL DISCORD

¿QUÉ COSAS NO DEBEN FALTAR?

- Figura $T vs\ l$ con las incertezas. Discutir la forma de la función
- Figura $T^2 vs\ l$ o $l\ vs\ T^2$ según los ε_r. Con las incertezas en "y" Con los ajustes lineales obtenidos de los dos modelos y los gráficos de los residuos.
- Reporte el resultado de b. *¿A cuántos sigmas de 0 está?*
- Figura comparativa de g agregar línea del valor tabulado. Comparar mediante los criterios aprendidos