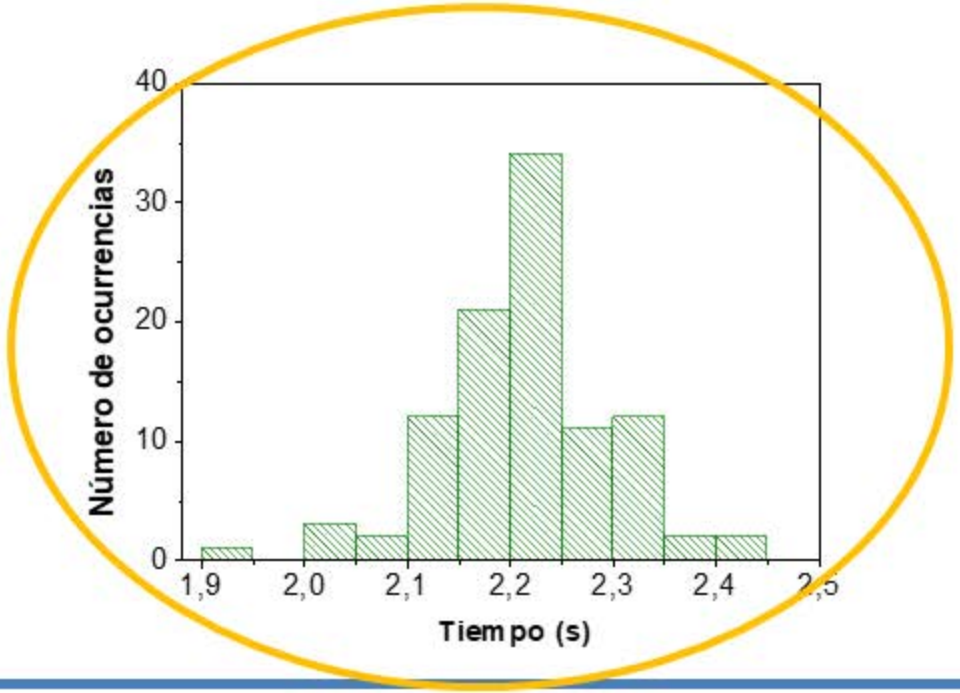
2do C 2021

Laboratorio 1 (Físicos)

MEDICIONES DIRECTAS. Parte 2

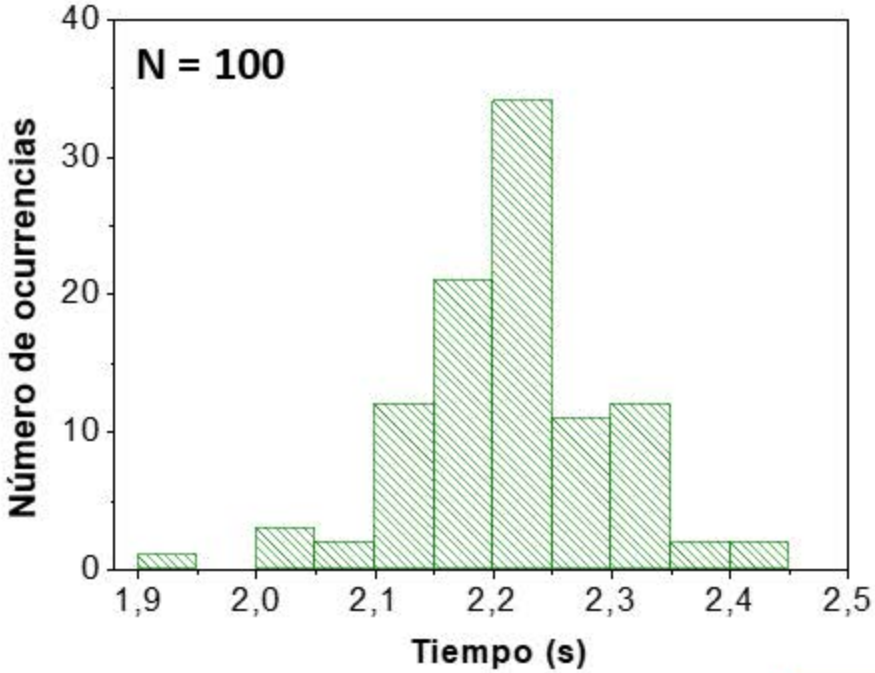
MEDIR: Comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuantas veces la segunda está contenida en la primera.

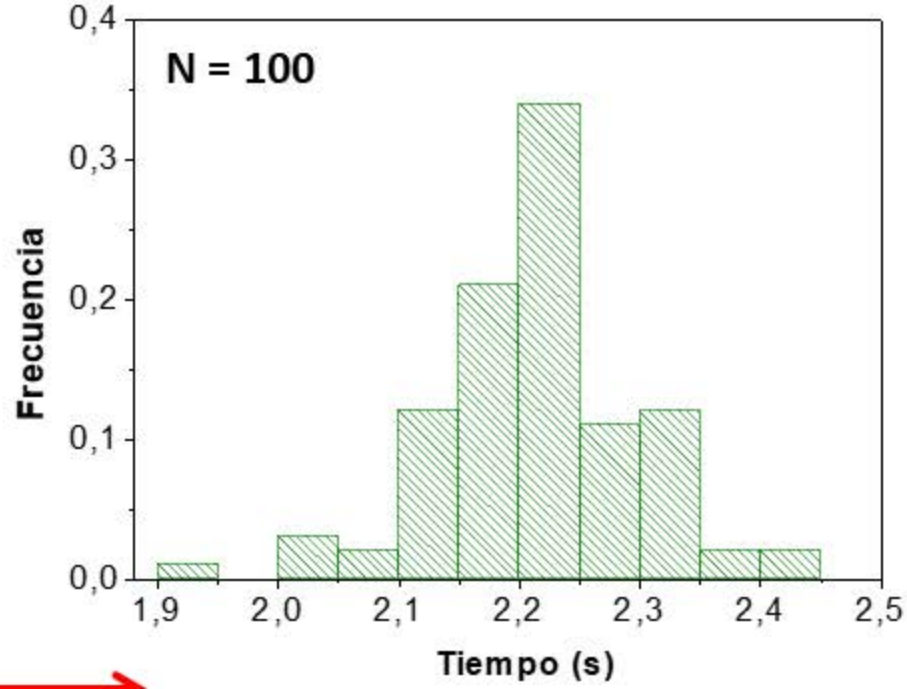


Mido misma MF del mismo objeto de la misma forma al menos 3 veces (siempre).

- ✓ **Si no hay diferencias significativas entre los resultados, entonces escribo el resultado como el promedio de los tres.**
- ✓ **Si hay diferencias significativas entonces sigo midiendo hasta tener bien definida la estadística.**

Cómo comparo histogramas





$$\frac{Número\ de\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia\ (Fk)$$

$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

Condición de Normalización → $\sum_i F_i = 1$

$$F_i = \frac{n_i}{N}$$

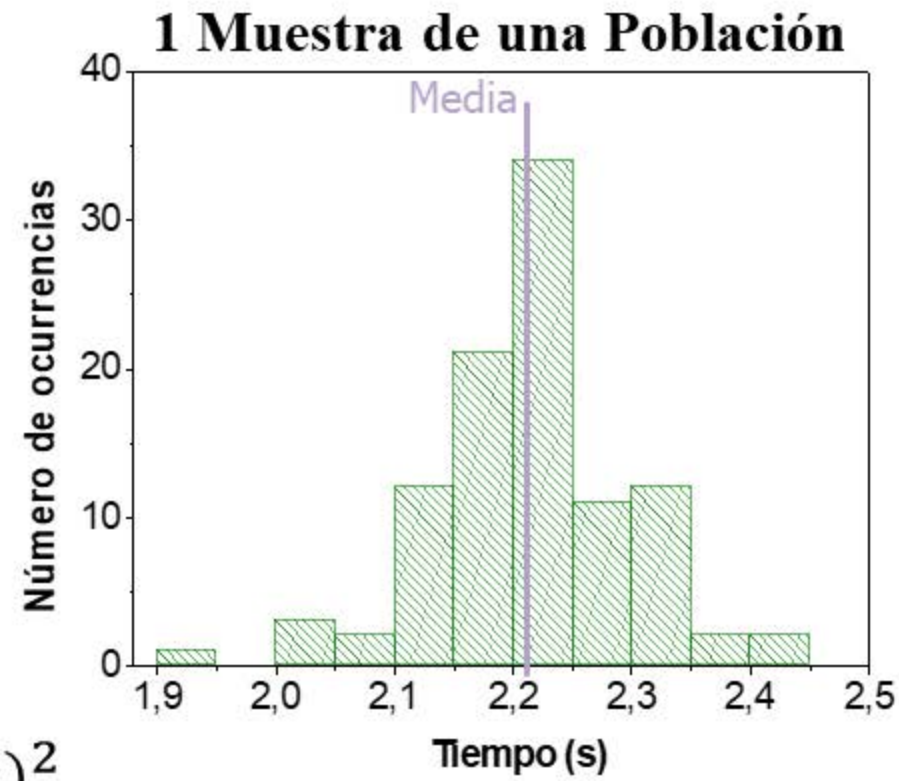
DISCRETO Simétrico

Valores característicos

$\bar{x}$: Promedio o media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k} n_k x_k = \sum_{k} x_k F_k$$

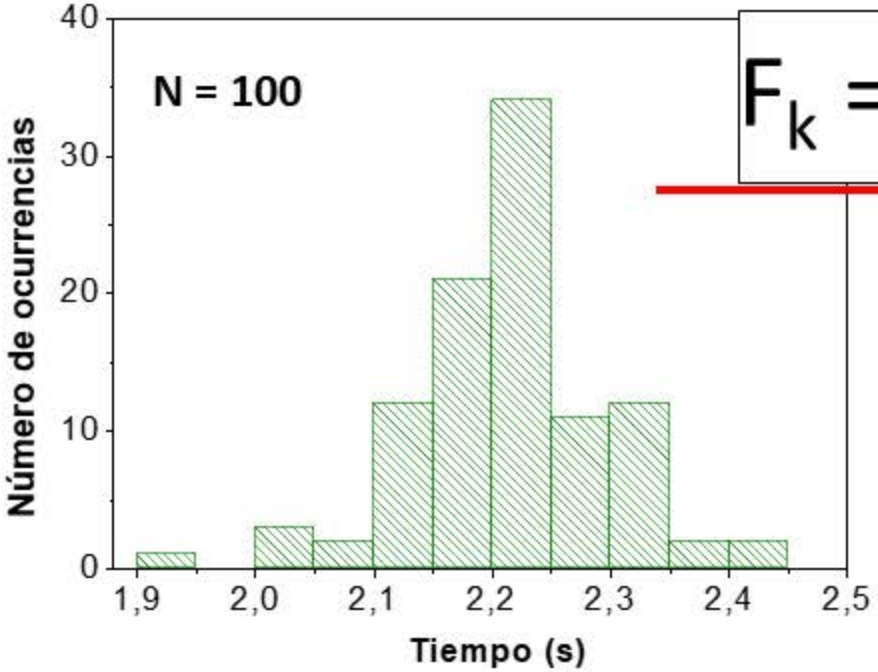


$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)}{N} = ???$$

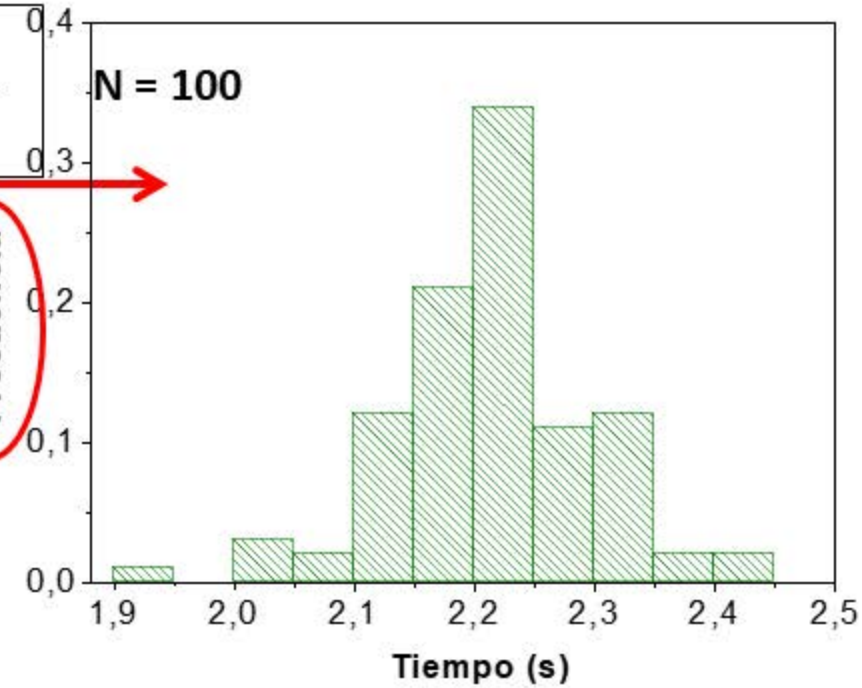
$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N} = \text{VARIANZA}$$

$$VAR(X) = \frac{1}{N}\sum_{k} n_k (x_k - \bar{X})^2 = \sum_{k} (x_k - \bar{X})^2 F_k$$

Distribucion DISCRETA (Simétrica)



$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

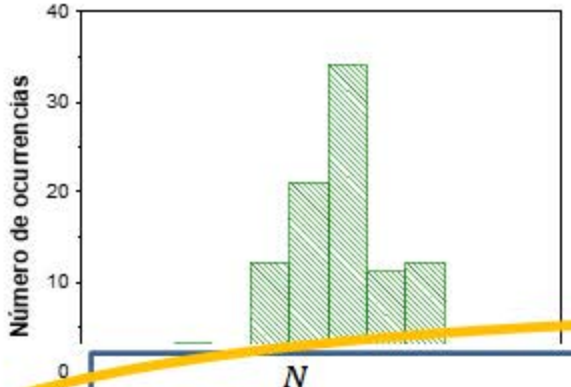


$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k$$

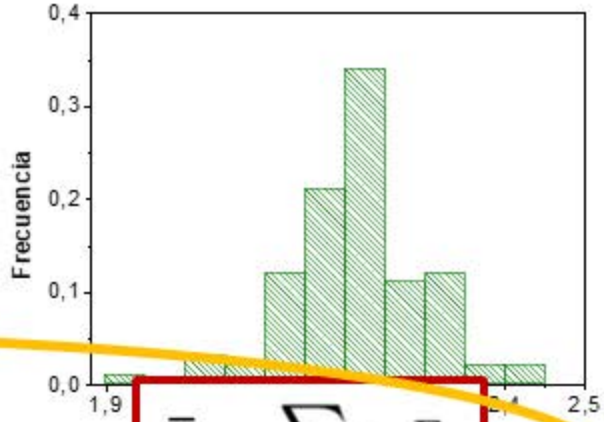
$$\bar{x} = \sum_k x_k F_k$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_k n_k (x_k - \bar{X})^2 = \text{VAR}$$

$$VAR(X) = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$$



DISTRIBUCION DISCRETA



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k$$

$$\bar{x} = \sum_k x_k F_k$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_k n_k (x_k - \bar{X})^2 = \text{VAR}$$

$$VAR(X) = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$$

$$\sigma = \sqrt{VAR(X)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N}} = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2 F_i}$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (σ)

Dispersión de los datos x_i respecto de la media

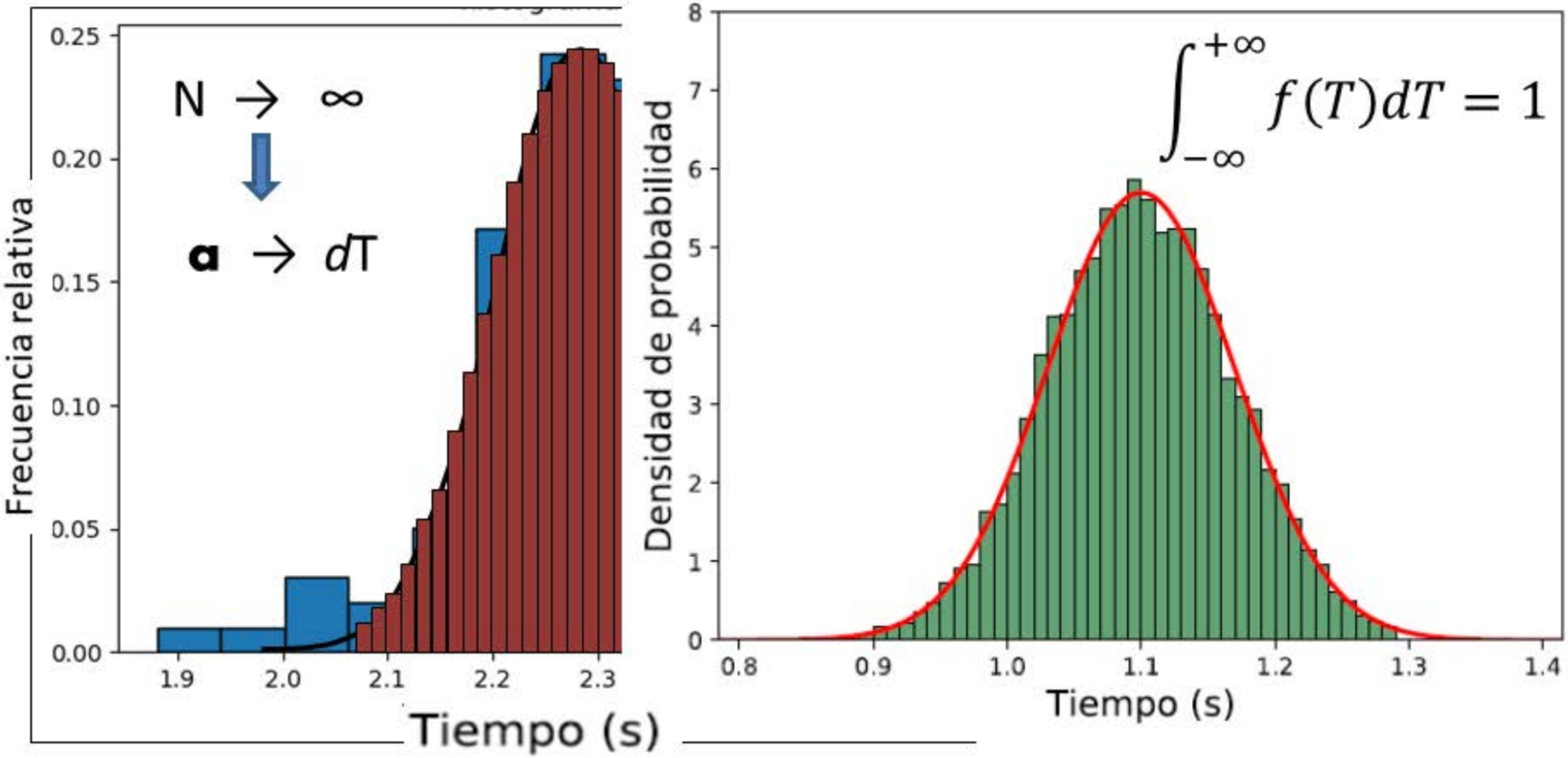
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(\bar{x}-x_i)^2} \approx \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N}}$$

N grande

σ desvio estandar Esta cantidad es una "medida" de la distribución de las mediciones alrededor del valor mas probable. Nos da una idea de cuan dispersos están los datos alrededor del valor promedio.

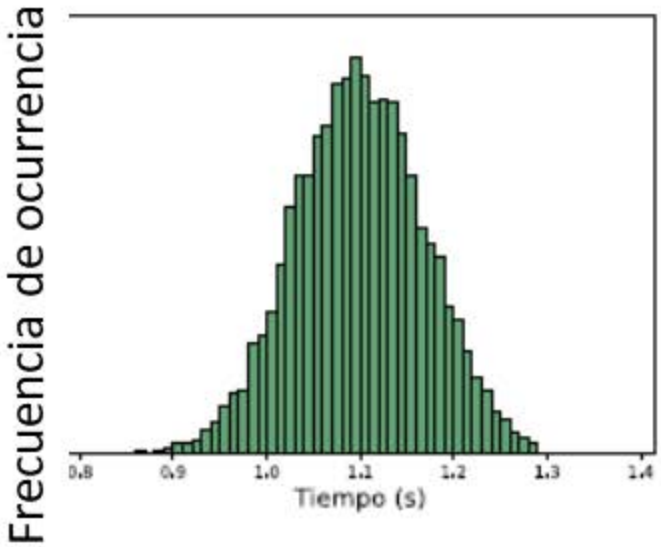
En el caso **Discreto** muchas veces a σ **se lo llama S (en el origin)**

Función Distribución



f(T) es la función de distribución de probabilidades

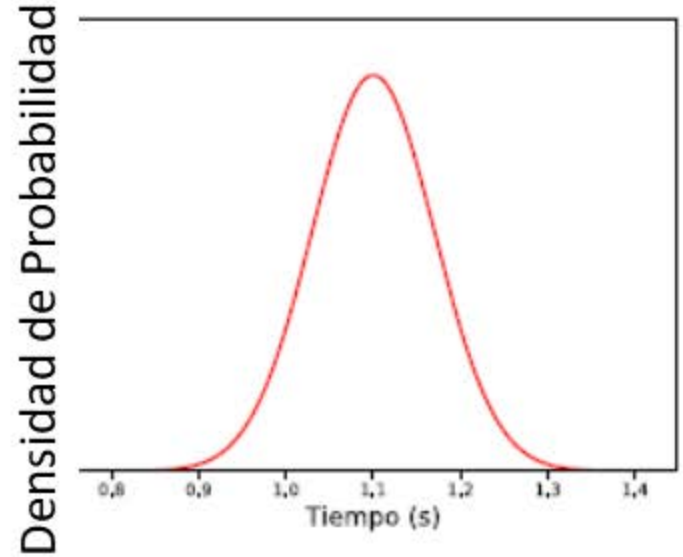
DISCRETO



$$F_k \rightarrow f(x)dx$$

$$N \rightarrow \infty$$
$$a \rightarrow 0$$

CONTINUO



$$\sum_k F_k = 1$$

Condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k = \sum_k x_k F_k$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$VAR(X) = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$$

Desviación estándar $S = \sqrt{VAR(X)}$

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x)dx$$

Desviación estándar $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k = \sum_k x_k F_k$$

$$VAR(X) = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$$

Desviación estándar $S = \sqrt{VAR(X)}$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx$$

Desviación estándar $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$

X: variable aleatoria (ej: resultado de una medición)

x_k: resultado k-ésimo

x: resultado continuo

x es análogo a x_k

F_k: frecuencia del resultado x_k

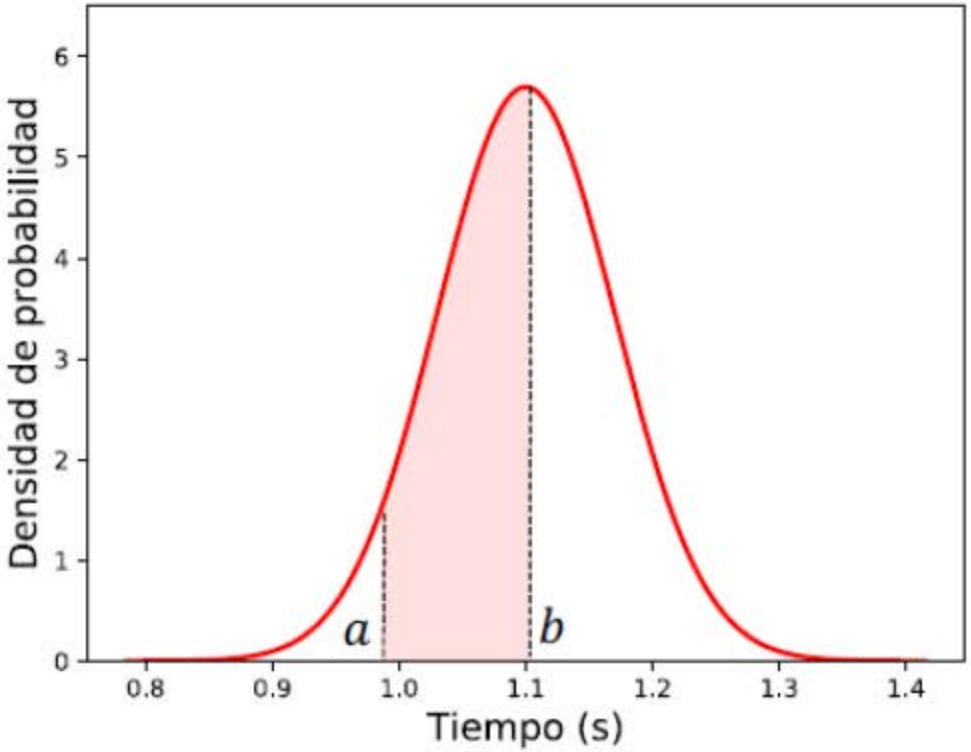
f(x)dx es análogo a F_k

f(x): densidad de probabilidad del resultado x

N: número total de resultados (ej: mediciones)

n_k: número de veces que se obtuvo x_k

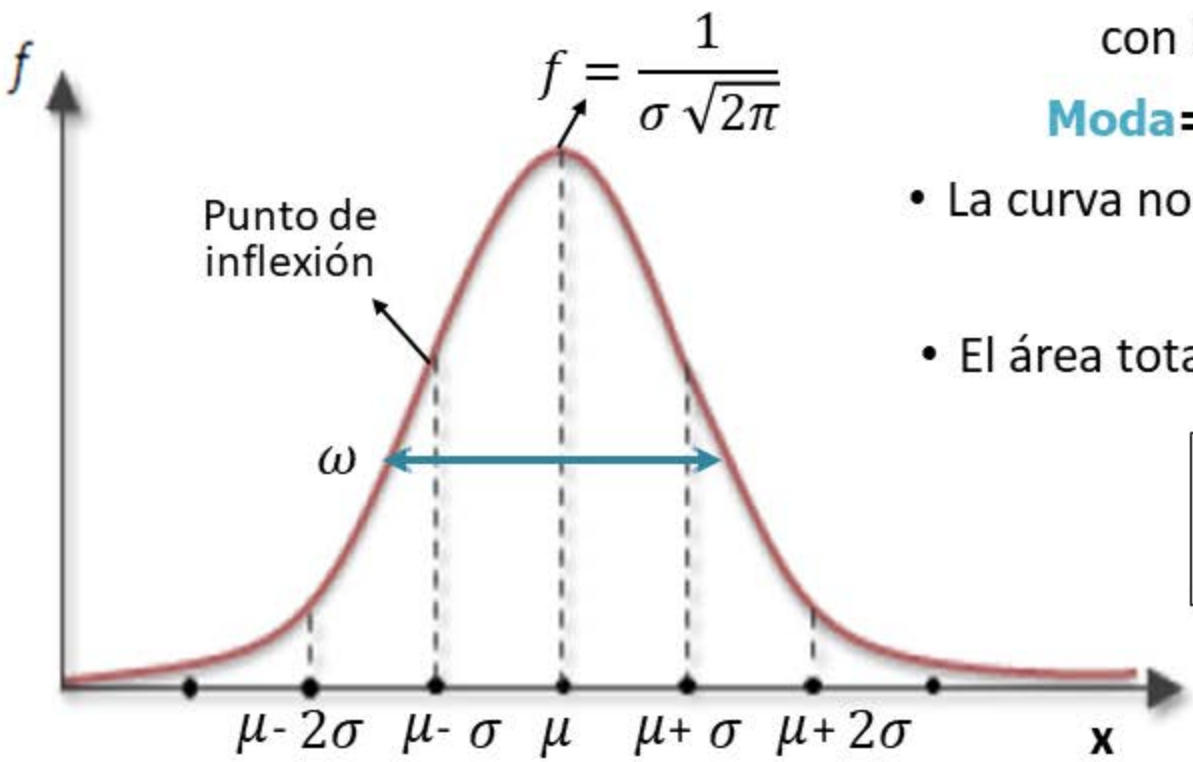
¿Cuál es la probabilidad de que una medición esté comprendida entre a y b?



$$Prob\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Algunas propiedades relevantes

Por ahora

- Es simétrica con respecto a su media
- Tiene una única moda, que coincide con la media y mediana

Moda=Mediana=Media

- La curva normal es asintótica al eje de abscisas
- El área total bajo la curva es igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

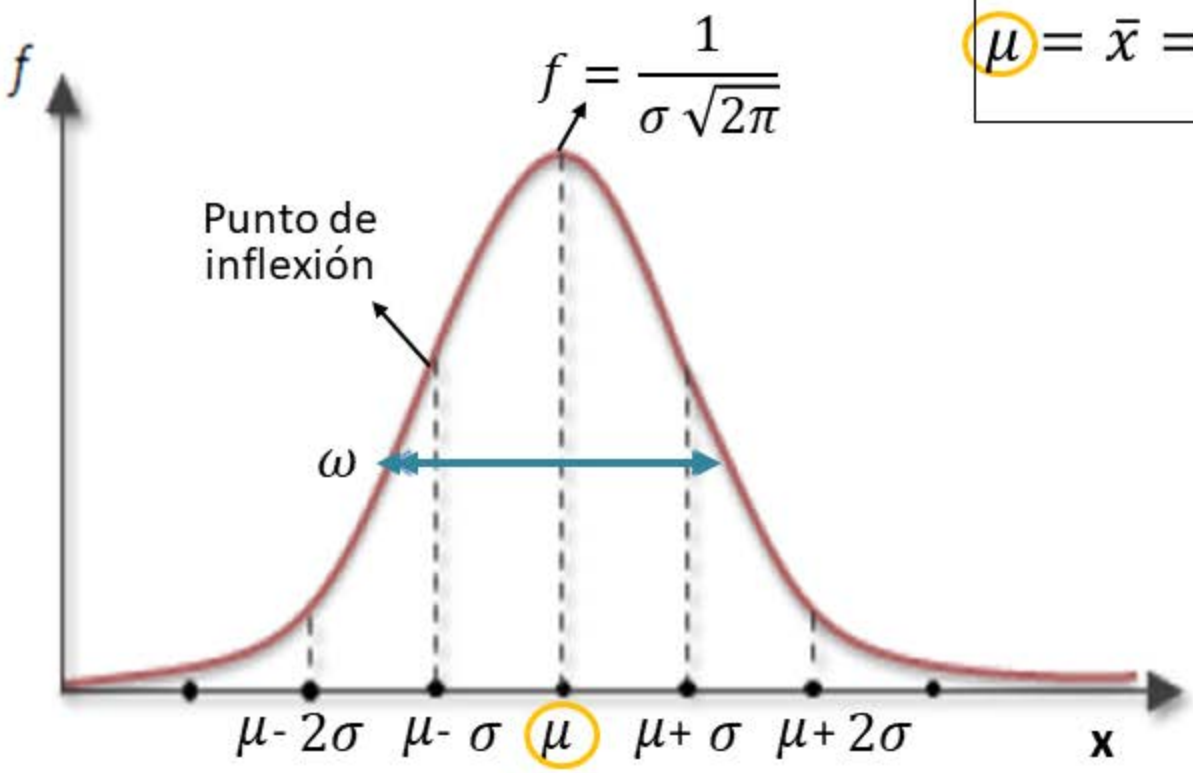
$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$



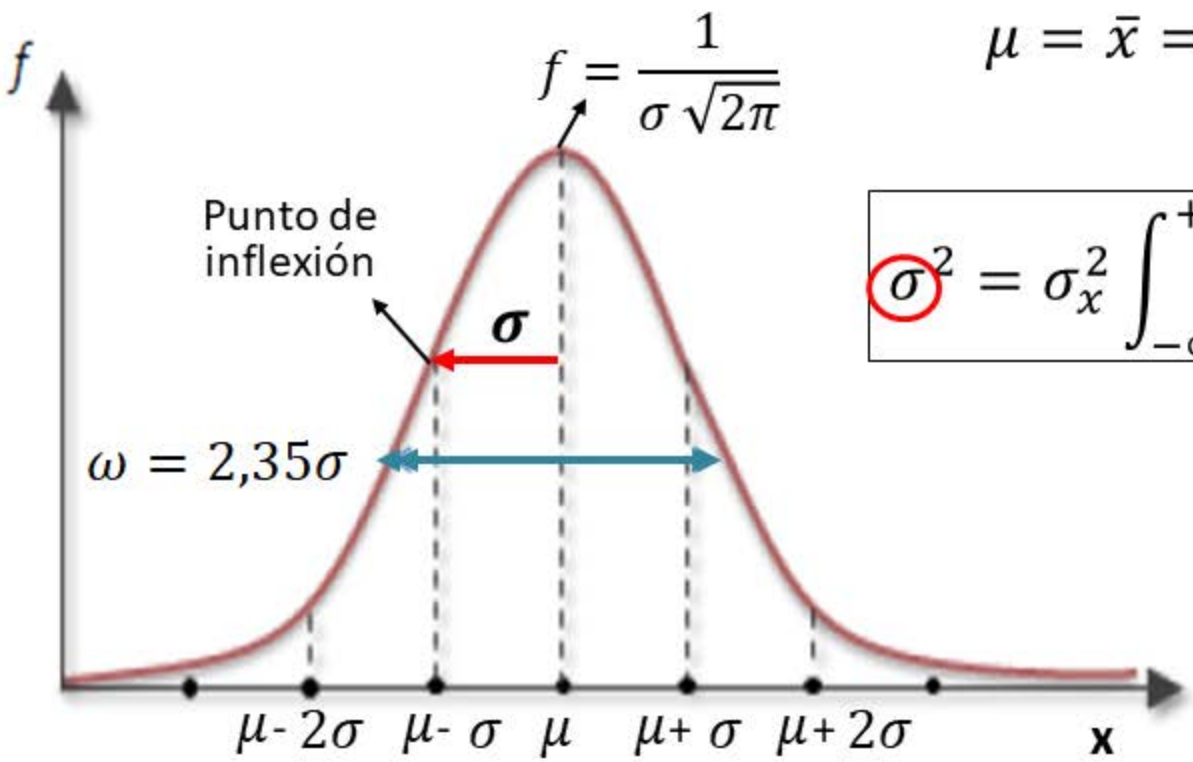
Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx$$



Función de distribución: Gauss

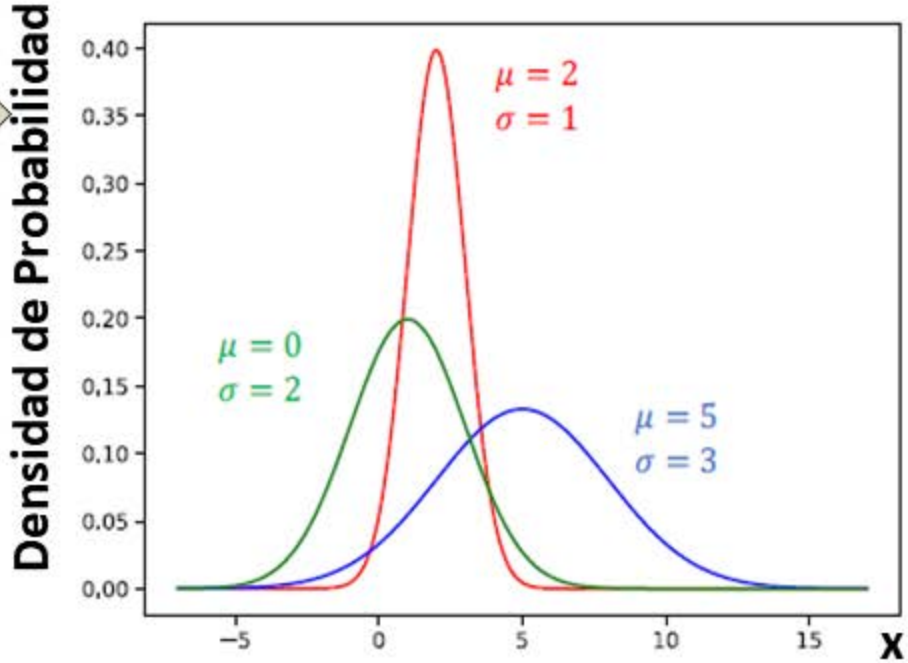
Otras características de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Está centrada en $x = \mu$
- Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$
- El parámetro σ da una idea del ancho de la curva

Función de distribución de 3 Muestras

- ⇧ μ Corrimiento en x
- ⇧ σ Aumento del ancho



Función de distribución: Gauss

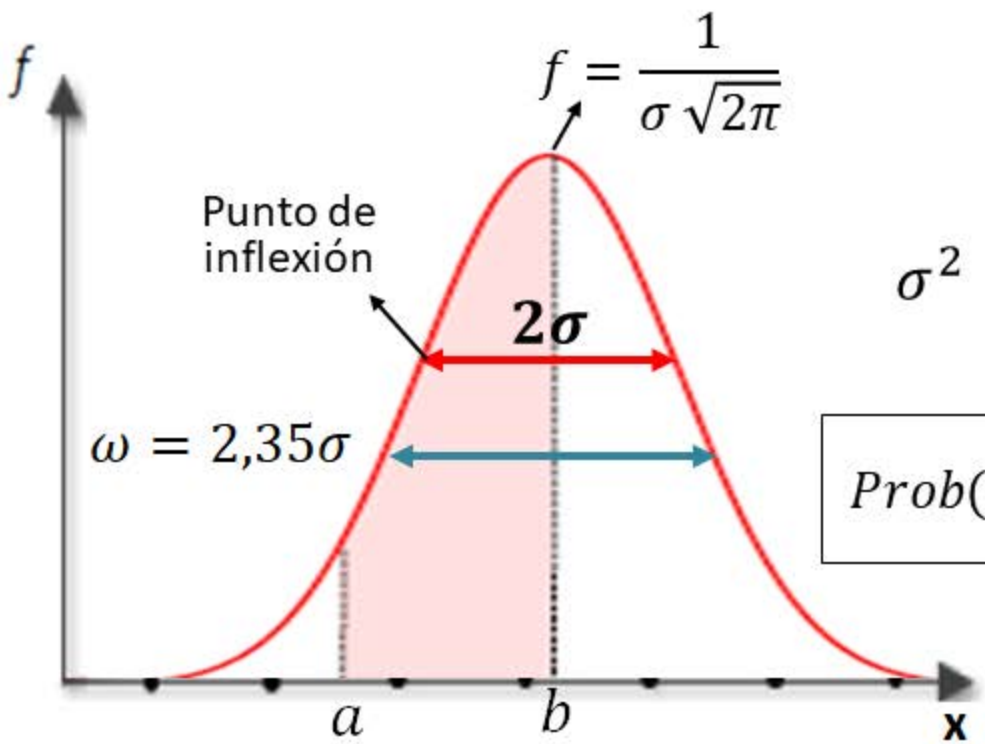
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx$$

$$Prob(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

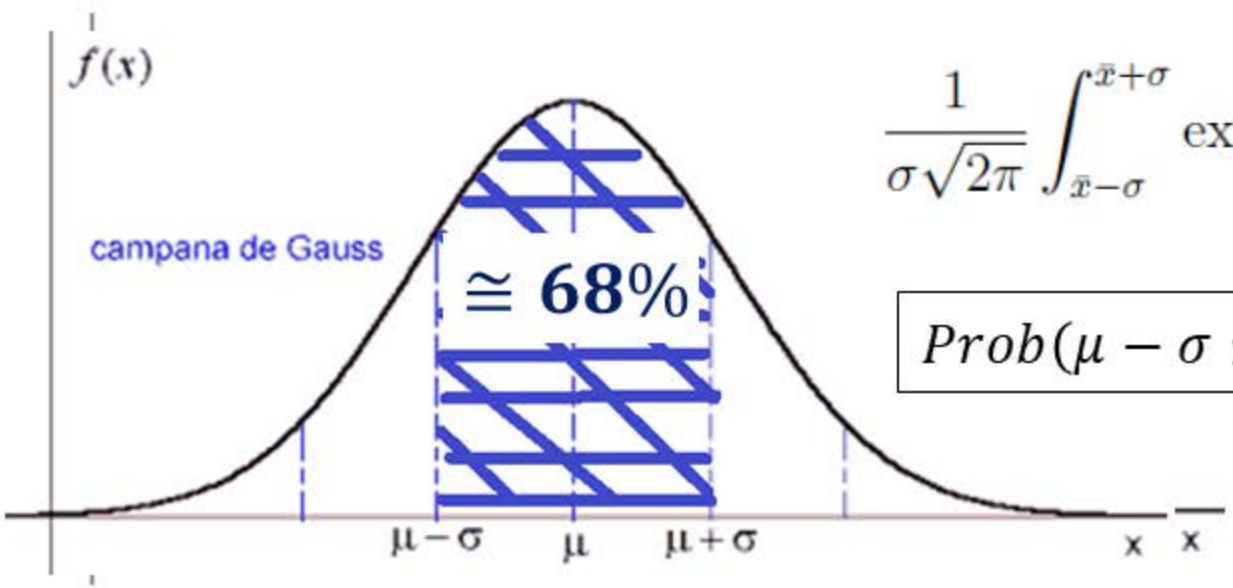


Supongamos que tenemos una muestra de 1000 datos. Por ejemplo se midieron mil veces la misma MF, con el mismo instrumento, protocolo y operador.

¿Cual es la probabilidad que si hago una medición mas el resultado se encuentre en el intervalo? $(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\boxed{Prob(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx}$$



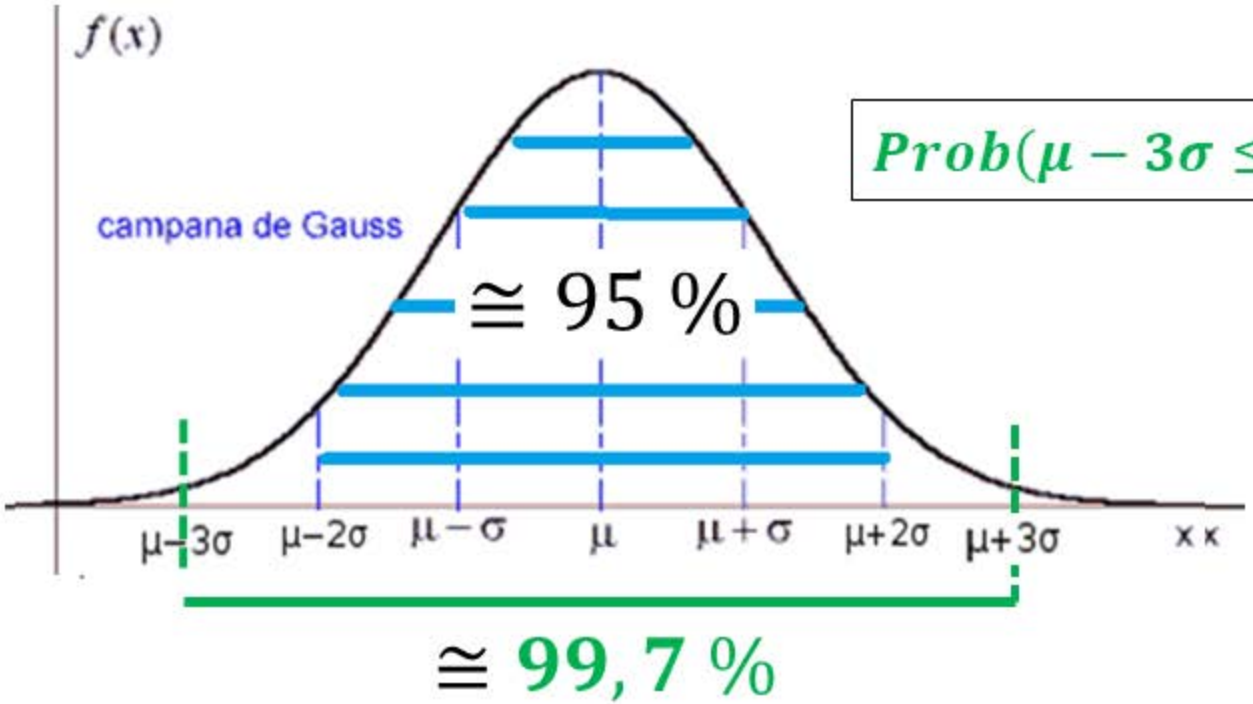
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0,68$$

$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong 0{,}6827}$$

Supongamos que tenemos una muestra de 1000 datos. Por ejemplo se midieron mil veces la misma MF, con el mismo instrumento, protocolo y operador.

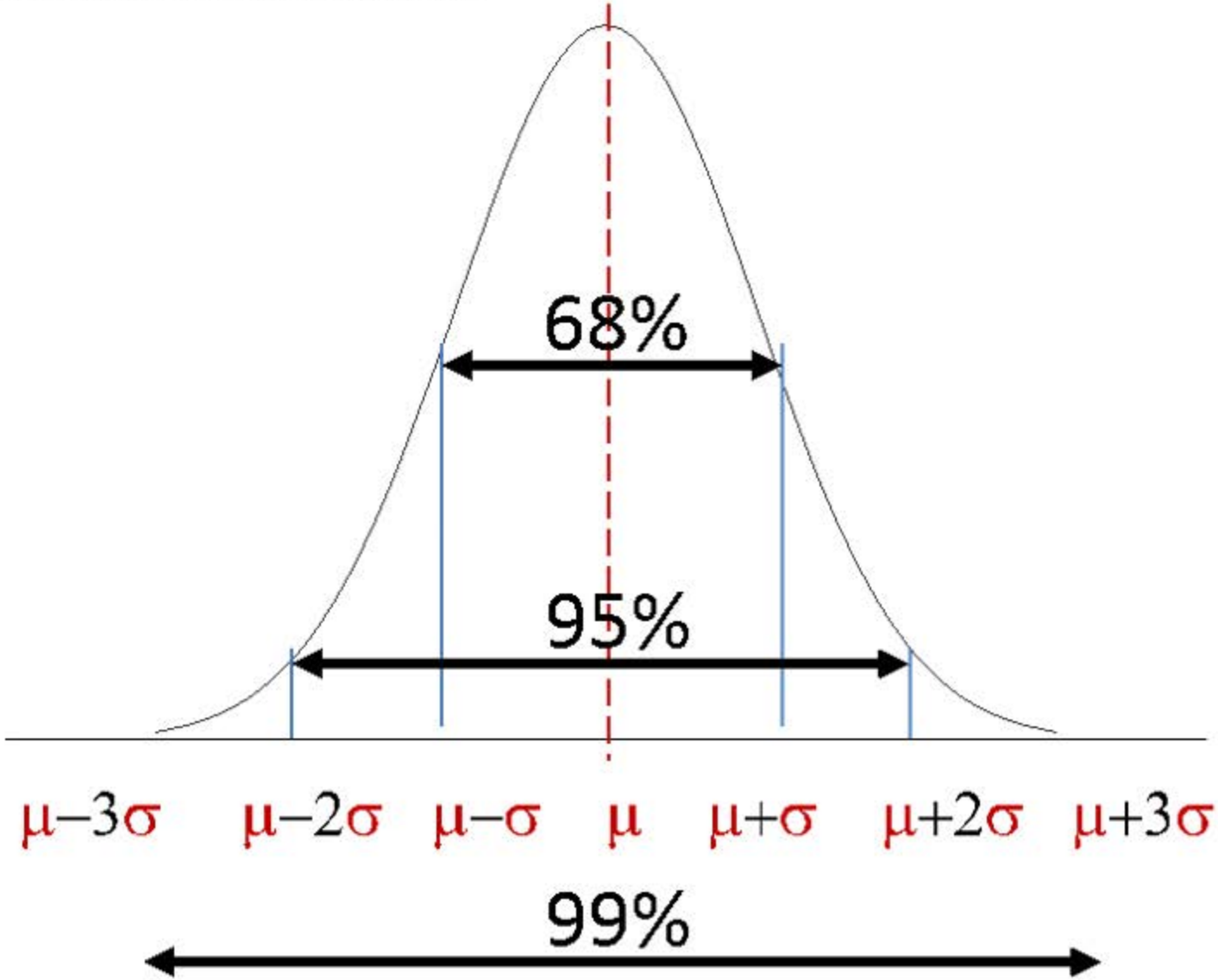
¿Cual es la probabilidad que si hago una medición mas el resultado se encuentre en el intervalo? $(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma)$

$$Prob\,(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx \cong 0{,}95$$



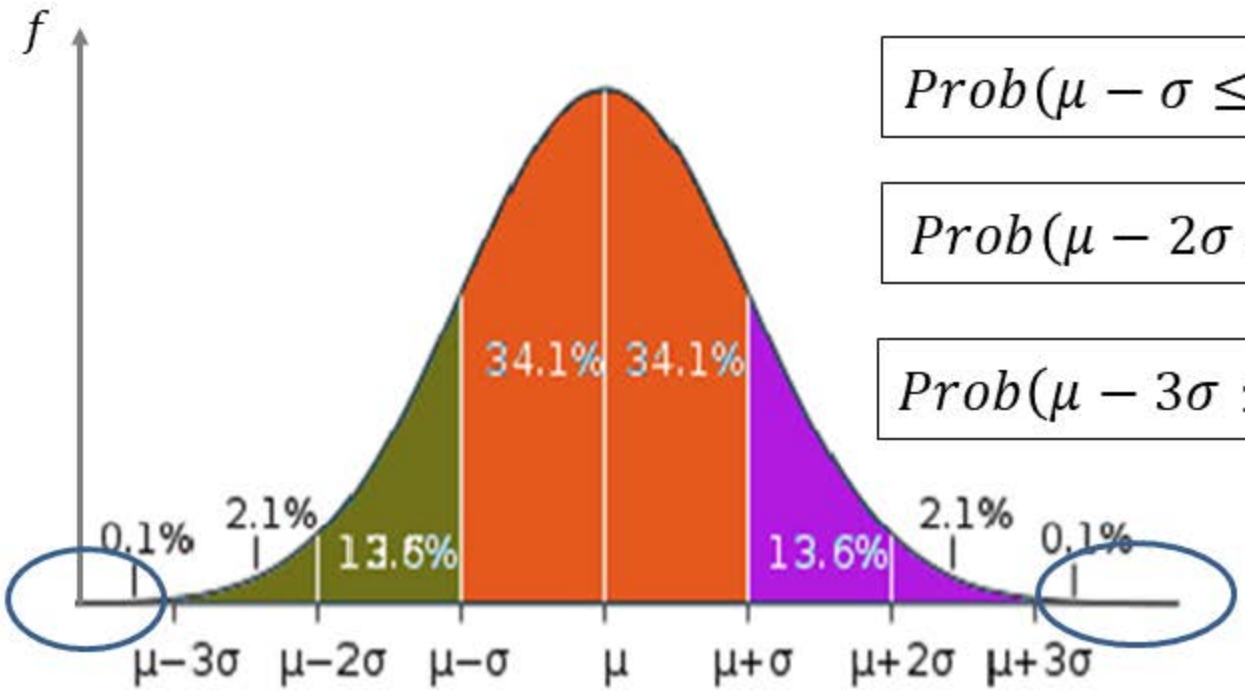
$$\boxed{Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0,997}$$

Si realizamos una nueva medición x , que probabilidad tenemos que sea un valor que se encuentre en el intervalo …….



Supongamos que tenemos una muestra de 1000 datos. Por ejemplo se midieron mil veces la misma MF, con el mismo instrumento, protocolo y operador.

¿Cual es la probabilidad que si hago una medición mas el resultado se encuentre en el intervalo?



$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong 0{,}6827$$

$$Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong 0{,}95$$

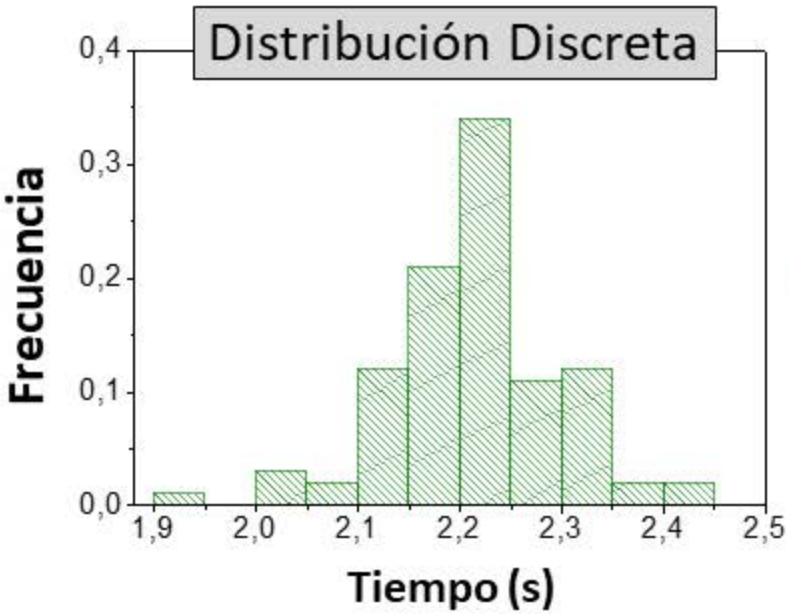
$$Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0{,}997$$

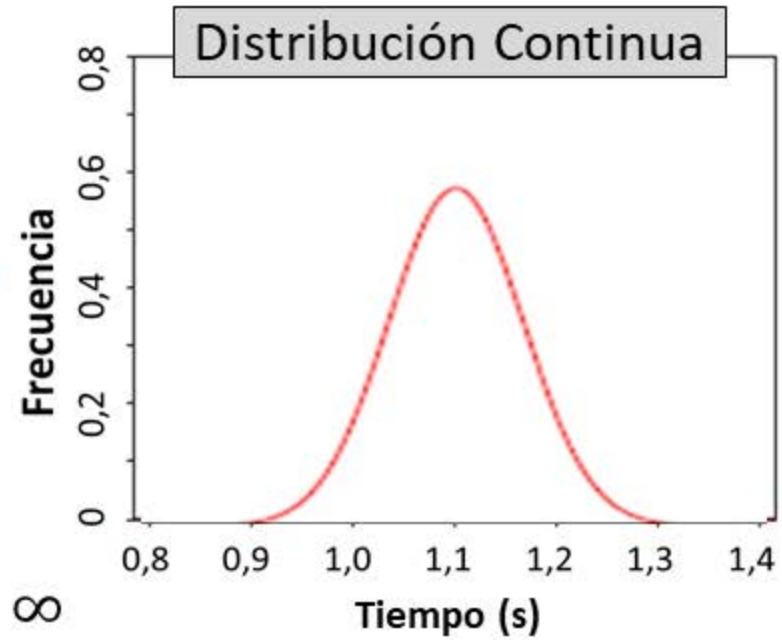
$$1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x-3\sigma}^{\bar{x}+3\sigma} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0,0028 \quad (0,28\,\%)$$

Objetivo

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos estimamos los parámetros de la distribución





$N \to \infty$

$\bar{x} \to \mu$

$S \to \sigma$

Estimación de los parámetros de la distribución de Gauss

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i \longrightarrow \bar{X} = \mu$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}(x_i - \bar{X}_n)^2 \longrightarrow VAR(X) = \sigma^2$$

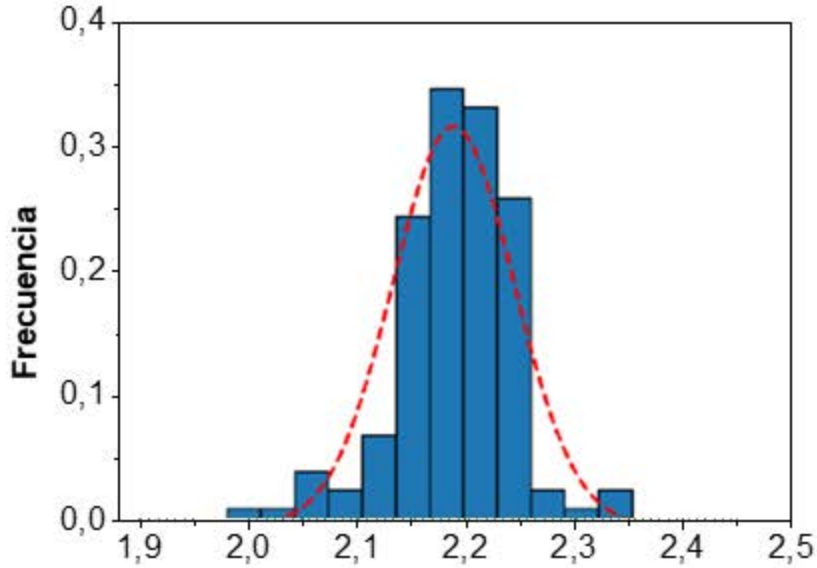
Son *estimadores*:

funciones de los datos medidos x_i

Parámetros desconocidos distribución de Gauss

Tomo 1 Muestra con N medidas

Tenemos una muestra finita de datos → Estimamos los parámetros de la distribución



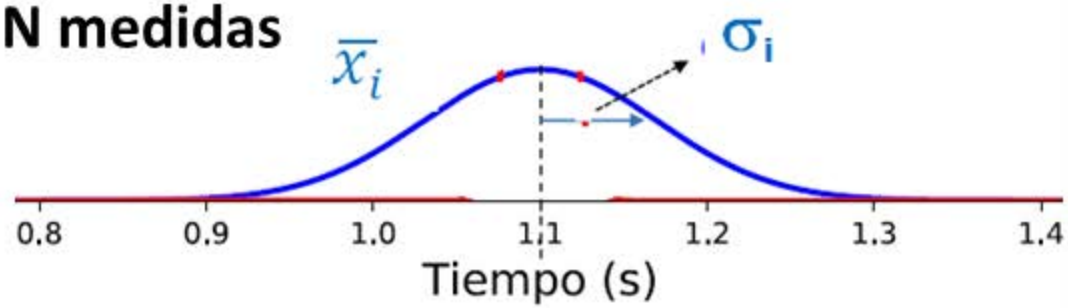
Si el numero de medidas es suficientemente grande → σ No varia en forma significativa

TCL

TCL: teorema central del limite

Error estadístico

Si se toma **1 muestra con N medidas y saco un $\overline{x_1}$ y un σ_1**



Si tomo **otra muestra (<u>mismo proceso, misma MF</u>) de N medidas voy a sacar otro valor de $\overline{x_2}$.**

¿Como va a ser σ_2 respecto de σ_1?
¿En cuanto difiere $\overline{x_2}$ respecto de $\overline{x_1}$???

¿ como informo el resultado de la medición?

¿Cual es el intervalo en el que hay un 68 % de probabilidades que se encuentre el valor de $\overline{x_2}$??

TCL: teorema central del limite

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\sigma_1 \cong \sigma_2 \cong \sigma$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana**, centrada en: $<\bar{x}>$

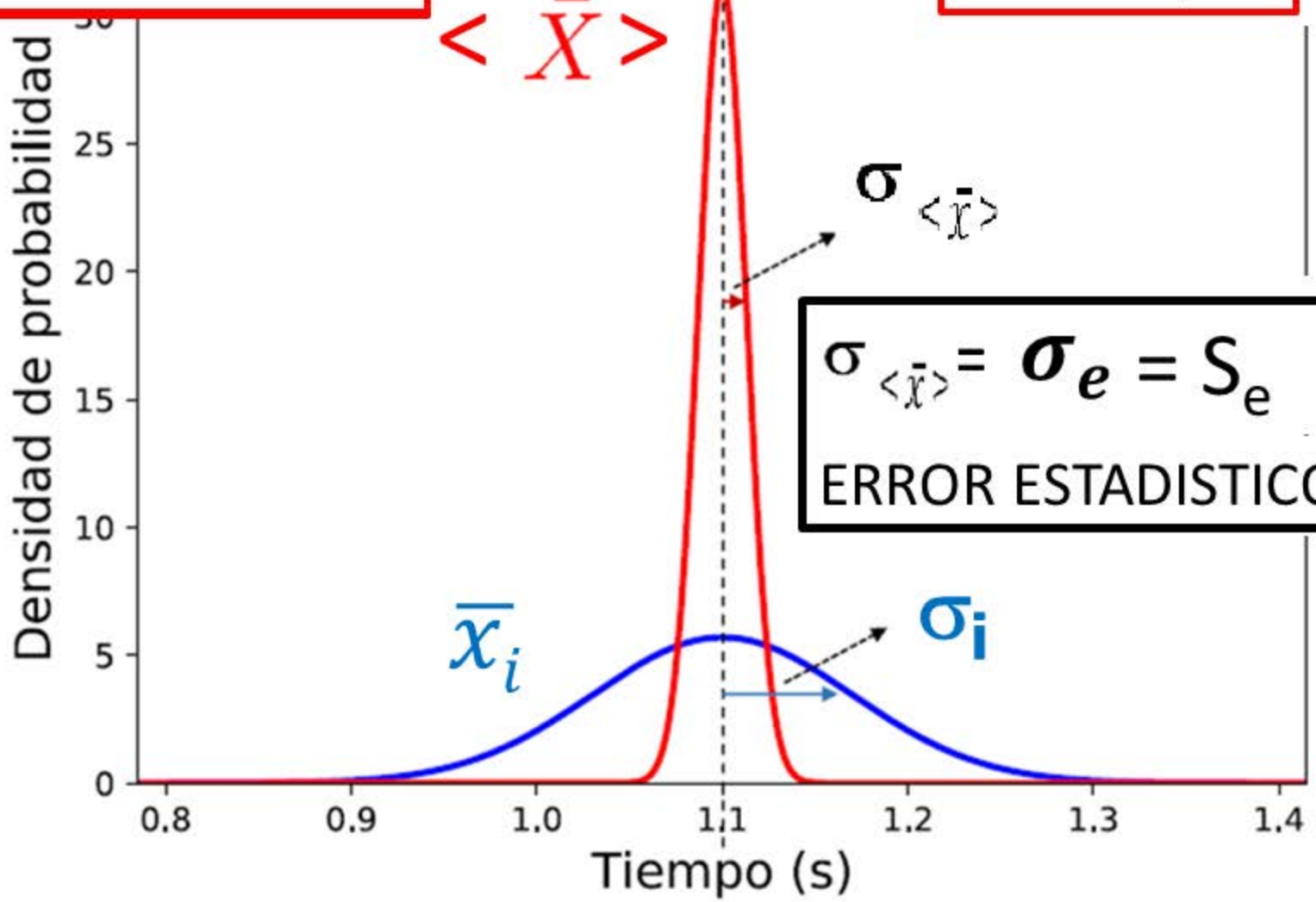
$$<\bar{x}> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

con una dispersión estándar $\sigma_{<\bar{x}>}$ dada Por:

$$\sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

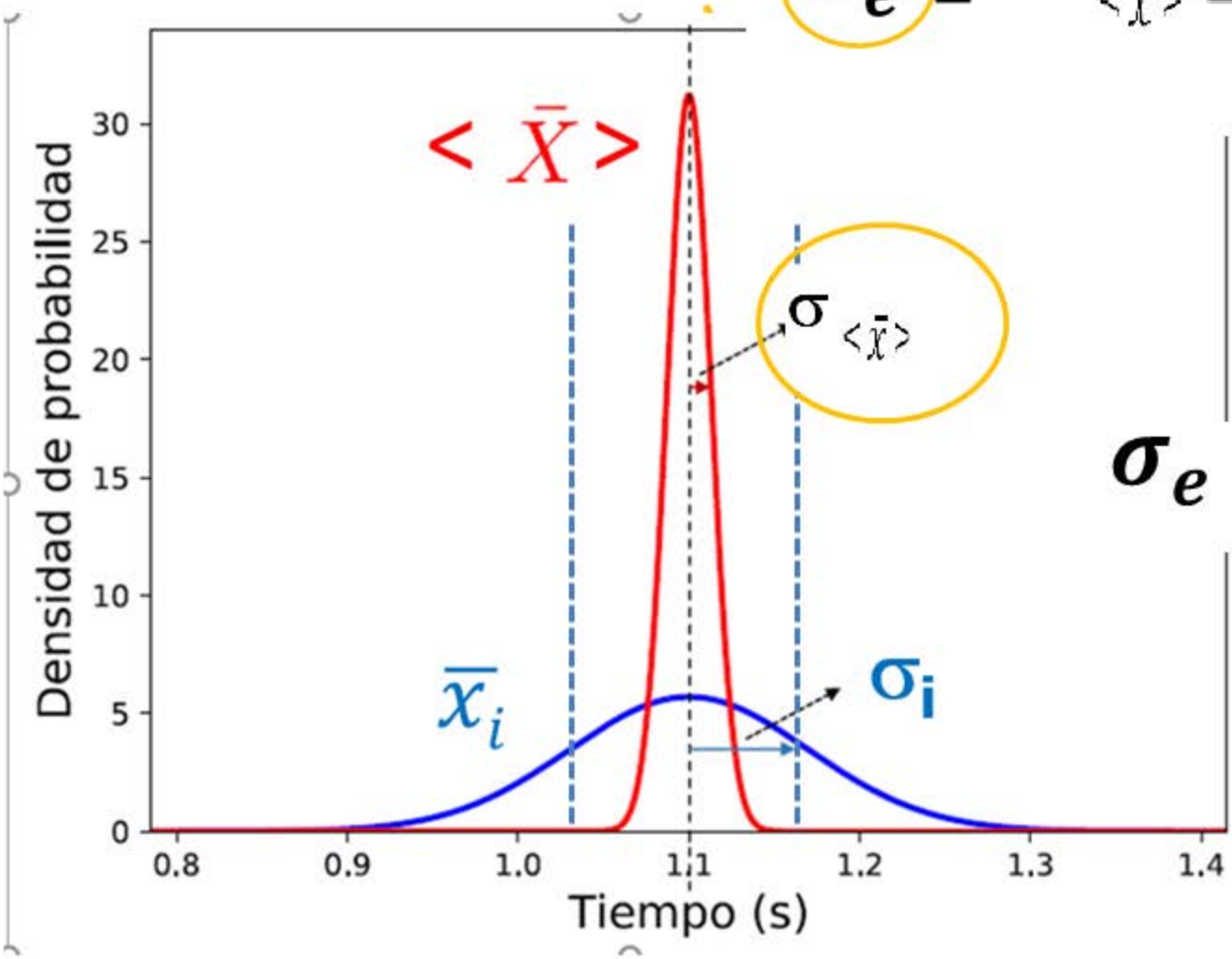
$$< \bar{x} > = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



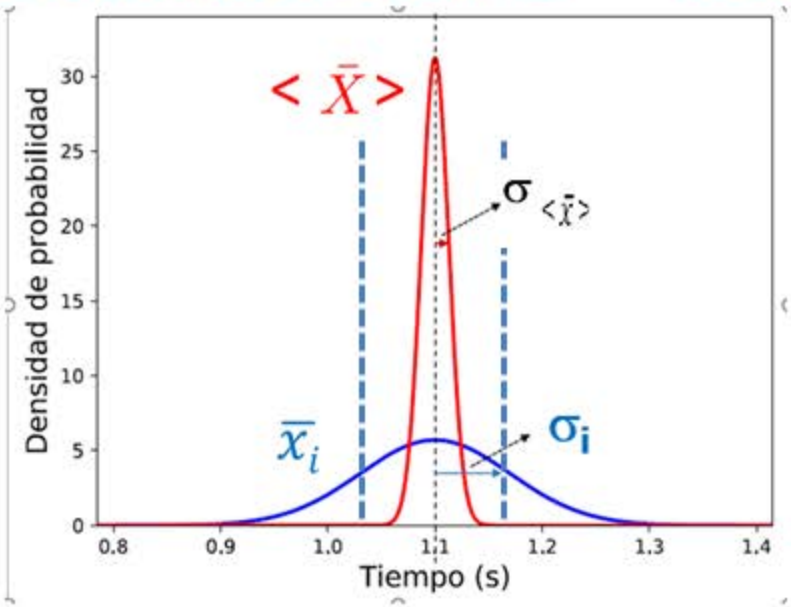
ERROR ESTADISTICO de una medición de N datos

$$\sigma_e = \sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



$$\sigma_e = S_e$$

¿Cual es el intervalo en el que hay un 68 % de probabilidades que se encuentre el valor de $\bar{x}_2$ de una nueva serie de mediciones??



$$\boldsymbol{\sigma_e} = \sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Para una muestra representativa (Población), una nueva medida de $\bar{\boldsymbol{x}}$ tendrá

- ***Probabilidad de ~68%*** de encontrarse en $(<\bar{x}> -\sigma_e, <\bar{x}> +\sigma_e)$
- ***Probabilidad de ~95%*** de encontrarse en $(<\bar{x}> -2\sigma_e, <\bar{x}> +2\sigma_e)$
- ***Probabilidad de ~99%*** de encontrarse en $(<\bar{x}> -3\sigma_e, <\bar{x}> +3\sigma_e)$

En general se mide <u>1 sola serie de N mediciones.</u> Entonces, sabiendo como se va a comportar el valor medio de la serie de otro experimentador que mide la misma MF, con el mismo protocolo y con el mismo numero de datos, se escribe el resultado de mi serie de mediciones como:

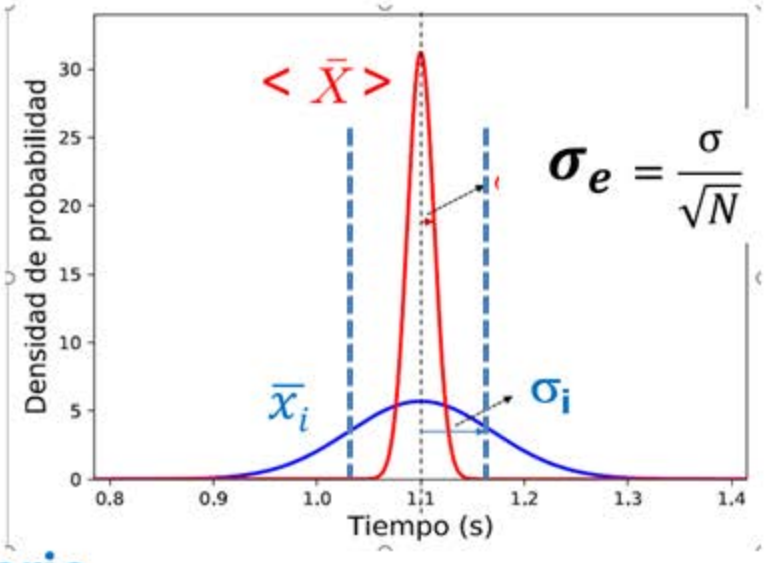
$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ \text{Unid}} \qquad \Delta \boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_N^2 + \boldsymbol{\sigma}_e^2} \qquad \boldsymbol{\sigma}_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Para una nueva muestra representativa, su valor de $\bar{\boldsymbol{x}}$ tendrá

- ***Probabilidad de ~68%*** de encontrarse en $\boxed{(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)}$
- ***Probabilidad de ~95%*** de encontrarse en $\boxed{(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)}$
- ***Probabilidad de ~99%*** de encontrarse en $\boxed{(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)}$

Dada una serie de N mediciones con un dado de $\overline{x}$ y un dado σ

¿Cual es el intervalo en el que hay un 68 % de probabilidades que se encuentre :



A) Una nueva medición de la misma serie

B) El valor promedio de una nueva serie de mediciones

PROBABILIDAD	Una nueva medida de x_i	una nueva medida de $\bar{x}_i$
• ~68%	$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	$(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$
• ~95%	$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	$(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)$
• ~99%	$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	$(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)$

Expresión del RESULTADO

RESULTADO $$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\, u$$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

$$[\bar{x} - \Delta x\, , \bar{x} + \Delta x]$$

Valor más representativo $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Error Absoluto $$\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}$$

Error Estadístico $$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Error Relativo $$\varepsilon_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Error Nominal cuadrático

$$\sigma_N^2 = \sigma_{Ap}^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2$$

Error Relativo porcentual $$\varepsilon_{r\%} = \varepsilon_r \text{ x } 100\ \%$$

Desviación Estándar $$\sigma = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Preguntas frecuentes

¿Cuántas veces debo medir?

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2} \qquad \sigma_e \ll \sigma_N$$

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

A medida que N AUMENTA, σ_e DISMINUYE

Número Óptimo de mediciones:

$$N_{op} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_N}}$$

¿Cómo comparo dos resultados?

PRECISIÓN, EXACTITUD y DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS

- **Precisión:** Comparando los Errores Relativos (ε_r): ⇩ ε_r ⇧ **PRECISIÓN**
- **Exactitud:** Comparando la media con el valor tabulado o valor "real": El $\bar{x}$ más cercano a dicho valor, será el más exacto.
- **Diferencias Significativas:** Comparando los intervalos de confianza