universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

2do C 2021

Laboratorio 1 (Físicos)

MEDICIONES INDIRECTAS

Mediciones directas: son aquellas en las cuales el resultado es obtenido directamente del instrumento que se esta utilizando.

Por ejemplo, la longitud de una pieza mas corta que la cinta métrica que tengo o la regla que tengo. El valor se obtiene directamente de la medición

Mediciones indirectas: Involucra siempre un cálculo en el que se usan los valores de magnitudes medidas en forma directa. Se necesita conocer la relación funcional.

Por ejemplo, el volumen de una pieza, o simplemente el largo de una pieza, cuya longitud es mayor que el rango de mi instrumento

¿Cómo expresamos el resultado de una medición?

RESULTADO

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

$$[\bar{x} - \Delta x\,, \bar{x} + \Delta x]\ \text{Unidad}$$

Se Expresa

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ \text{Unidad}}$$

$\bar{x} \rightarrow$ Valor más representativo

$\Delta x \rightarrow$ Incerteza Absoluta
Error Absoluto

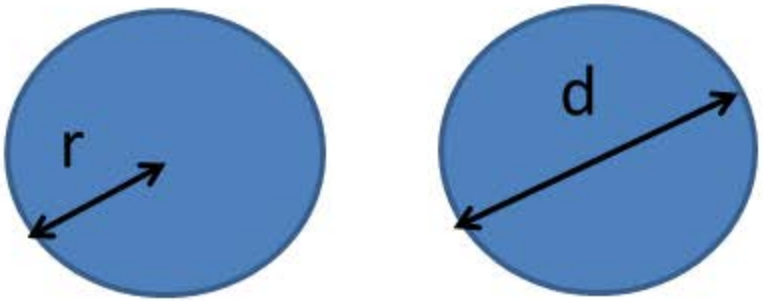
¿Cómo expresamos el resultado de una medición indirecta?

IGUAL. Pero ahora tanto el valor representativo como el error absoluto se calculan a partir de:

los valores obtenidos de mediciones directas

Por ej: AREA de un objeto

Caso de un circulo



Qué mido en FORMA DIRECTA ??

Qué Calculo??

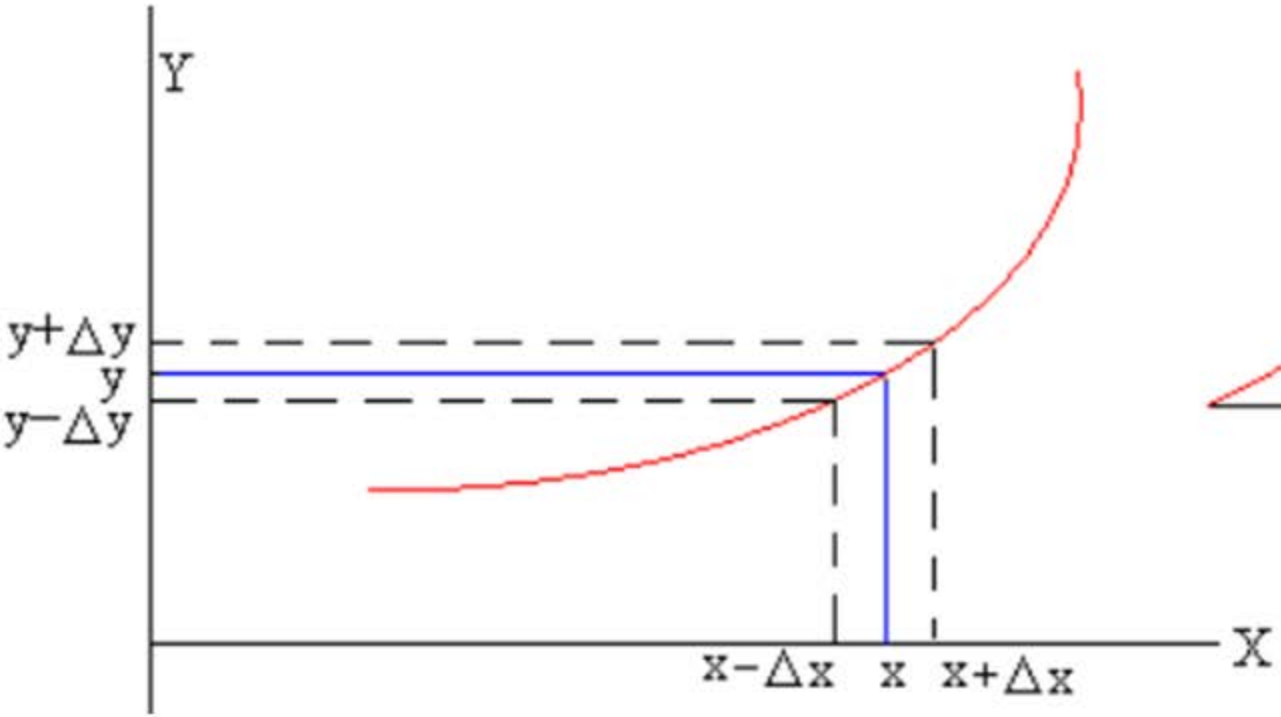
$$d = (d_0 \pm \Delta d)\ u \qquad A = \frac{\pi}{4} d^2 \qquad \boxed{A = (A_0 \pm \Delta A)\ u}$$

$$A_0 = ??\qquad \Delta A = ??$$

Queremos determinar el valor de una magnitud y partir de la medición directa de una magnitud x.

$$\boxed{y = f(x) \qquad\qquad x = (x_0 \pm \Delta x)}$$

$$y = f(x) \quad ; \; x = (x_0 \pm \Delta x)$$

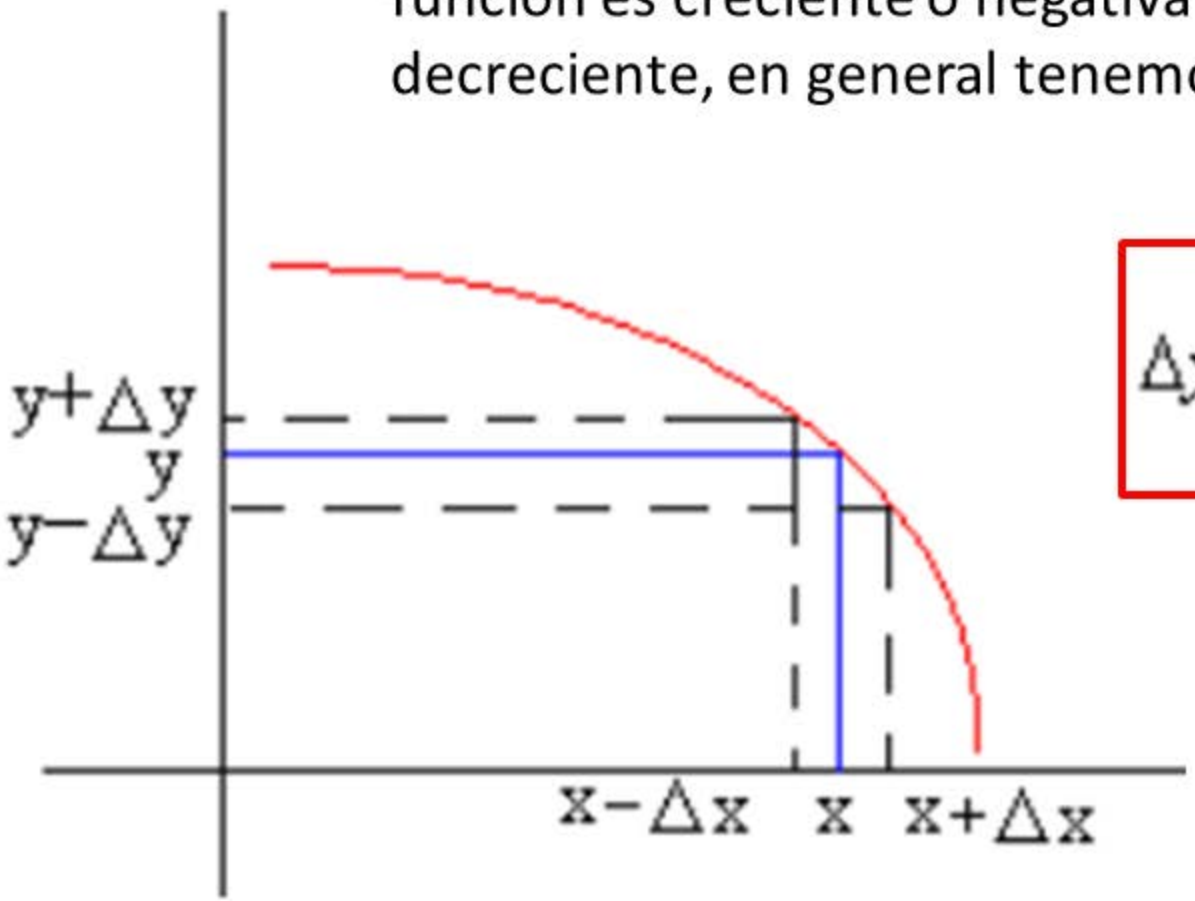


$\Delta y = \tan\theta \, \Delta x$

Pero $\tan\theta$ es la pendiente de la recta tangente a al curva en el punto de abscisa *x*

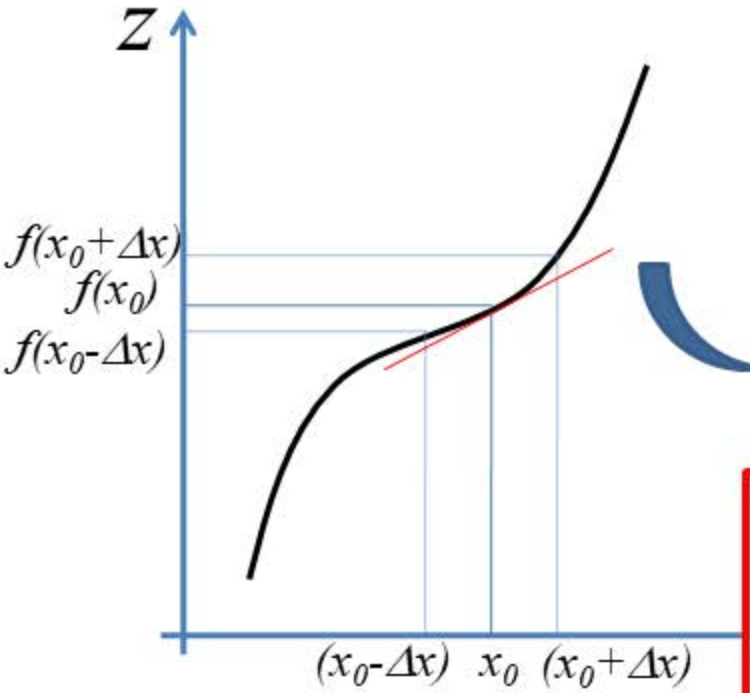
$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$$

Como la pendiente puede ser positiva, si la función es creciente o negativa si la función es decreciente, en general tenemos que:



$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Delta x$$

$$z = f(x) \qquad\qquad x = (x_0 \pm \Delta x)$$



Recta tangente a $f(x_0)$

pendiente:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$$

Expresión final: $z = (z_0 \pm \Delta z)$

donde:

$$z_0 = f(x_0) \qquad \Delta z = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} * \Delta x$$

Ejemplo : Supongamos que queremos medir el periodo *t* de un oscilador, es decir, el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa.

Disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo: 0,1s. Decido medir 10 veces y obtener el periodo en forma indirecta:

$$t = \frac{T}{10}$$

Lo que mido en forma DIRECTA es T (el tiempo de 10 oscilaciones)

Lo que mido en forma INDIRECTA es t (el período de 1 oscilación)

Medimos T y supongamos que nos da T_0 = 4,6 s

$$T = (T_0 \pm \Delta T) = (4{,}6 \pm 0{,}1)\text{s}$$

$$\text{t} = f(T) = \text{T}/10$$

t_0 = ??? Δt =???

$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

$$z_0 = f(x_0) \qquad \Delta z = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} * \Delta x$$

$$t = \frac{T}{10}$$

Lo que mido en forma DIRECTA es T (el período de 10 oscilaciones)

Lo que mido en forma INDIRECTA es t (el período de 1 oscilación)

Medimos T y supongamos que nos da T_0 = 4,6 s

$$T = (T_0 \pm \Delta T) = (4{,}6 \ \pm 0{,}1)\text{s}$$

$$\text{t} = f(T) = \text{T}/10$$

t_0 = ??? Δt =???

$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

$$z_0 = f(x_0) \qquad \Delta z = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} * \Delta x$$

$$t_0 = f(T_0) \qquad \Delta t = \left|\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}T}\right|_{T_0}\right| * \Delta T = \frac{1}{10} * 0{,}1 \text{ s} = 0{,}01 \text{ s}$$

$$t_0 = f(T_0) = 4{,}6 \text{ s}/10 = 0{,}46 \text{ s}$$

$$t = (t_0 \pm \Delta t) = (0{,}46 \ \pm 0{,}01) \text{ s}$$

Y si quería medir t en forma directa con el mismo instrumento???

Función de varias variables

$y = f(p, q, r \ldots)$. y_0 = ??? Δy = ???

Donde p, q, r son variables medidas en forma directa.
Además, son Independientes

Cuando había una sola variable

$$\boxed{\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x}$$

Cuando hay mas de una variable independiente, se deriva respecto de cada una de las variables, considerando a las otras como constantes (concepto de **derivada parcial**)

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0}\Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0}\Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0}\Delta r\right)^2 + \cdots}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}$$

$y = p + q$ $\quad$ $\boldsymbol{y_0 = p_0 + q_0}$ $\quad$ $\Delta y = \sqrt{\Delta P^2 + \Delta q^2}$

$y = p - q$ $\quad$ $\boldsymbol{y_0 = p_0 - q_0}$ $\quad$ $\Delta y = \sqrt{\Delta P^2 + \Delta q^2}$

Entonces, para **suma** y **resta**:

$y = p \pm q$ $\quad$ $\boldsymbol{y = P_0 \pm q_0}$ $\quad$ $\Delta y = \sqrt{\Delta P^2 + \Delta q^2}$

Si tengo que medir un lado de una mesa, cuyo valor mas probable es 1 m. ¿Cómo tendré un resultado mas preciso: midiendo en forma directa con una cinta métrica graduada en mm, o trasladando 10 veces una regla también graduada en mm?

Con la Cinta métrica $\boxed{L = (1000{,}0 \pm 0{,}5)\ \text{mm}}$

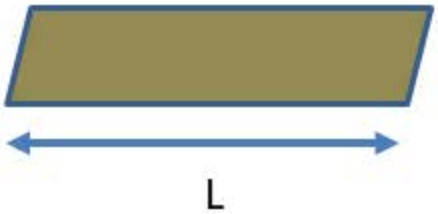
Trasladando la regla $L = (L1+L2+L3....L10)$ $\boxed{L = (1000{,}0 \pm 1{,}6)\ \text{mm})}$

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta\, L1)^2 + (\Delta\, L2)^2 + (\Delta\, L3)^2 + \cdots \ldots . (\Delta\, L10)^2}$$

$$\Delta L = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + \cdots \ldots . (0{,}5)^2}$$

$$\Delta L = \sqrt{10.(0{,}5)^2}$$

$$\rightarrow\ \Delta L = (3{,}162277\ .\ 0{,}5)\ \text{mm} = 1{,}58\ \text{mm} \approx 1{,}6\ \text{mm}$$



Con la Cinta métrica (**directa**)

$L = (1000{,}0 \pm 0{,}5)$ mm

Trasladando la regla (**indirecta**)

$L = (L1+L2+L3....L10)$

$L = (1000{,}0 \pm 1{,}6)$ mm)

¿Cómo hacía para incrementar la precisión en la determinación del valor representativo de algo que era del orden del error de apreciación del instrumento? En esos casos, ¿la información que se obtiene es la misma?

Disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo, 0,1s y el valor representativo es ≈ 0,5 s?

$t = (0{,}5 \pm 0{,}1)$ s

Medía el tiempo de 10 veces.

Obtengo, por ejemplo:

$T = (4{,}6 \pm 0{,}1)$s

$t = (0{,}46 \pm 0{,}01)$ s

¿Cómo puedo hacer para determinar el peso de 1 hoja de papel de una resma, cuyo peso mas probable es de 0,01 g, con una balanza cuya resolución es 0,1 g?

¿Puedo?

¿Estoy determinando el peso de "esa" hoja?

¿O un peso promedio que tienen las hojas de esa resma?

Propagación en productos

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}$$

$$y = p \pm q \qquad \boldsymbol{y_0 = p_0 \pm q_0} \qquad \Delta y = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$$

$$y = p \cdot q \qquad \boldsymbol{y_0 = p_0 \cdot q_0} \qquad \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\sqrt{p_0^2 (\Delta q)^2 + q_0^2 (\Delta p)^2}}{P_0 \cdot q_0}$$

$$y = p \cdot q \qquad \boldsymbol{y_0 = P_0 \cdot q_0} \qquad \boxed{\frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{{q_0}^2} + \frac{(\Delta p)^2}{{p_0}^2}}}$$

$$y = \frac{p}{q} \qquad y_0 = \frac{p_0}{q_0}$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{q_o^{\,2}} + \frac{p_o^{\,2}.(\Delta q)^2}{q_o^{\,4}}}}{P_0 \,/\, q_0}$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\left(\frac{(\Delta p)^2}{q_o^{\,2}} + \frac{p_o^{\,2}.(\Delta q)^2}{q_o^{\,4}}\right)\frac{q_0^{\,2}}{P_0^{\,2}}} = \sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{P_o^{\,2}} + \frac{(\Delta q)^2}{q_o^{\,2}}}$$

$$y = \frac{p}{q} \qquad \frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{q_0^{\,2}} + \frac{(\Delta p)^2}{p_0^{\,2}}}$$

$$y = p \cdot q \qquad \frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{q_0^{\,2}} + \frac{(\Delta p)^2}{p_0^{\,2}}}$$

En resumen

$$y = p \pm q \qquad \Delta y = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{p}{q} \\ \\ y = p \cdot q \end{array}\right\} \quad \frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{{q_0}^2} + \frac{(\Delta p)^2}{{p_0}^2}}$$

O en términos de errores relativos:

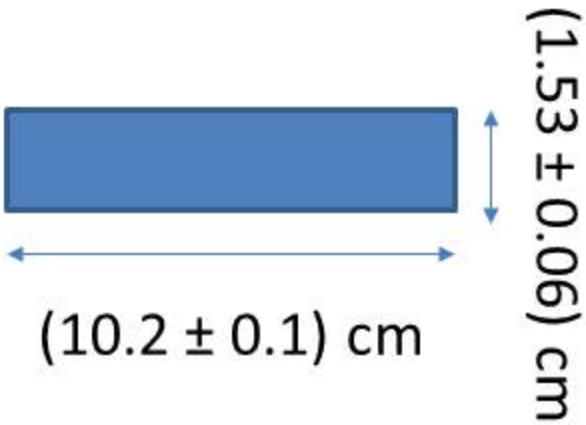
$$\epsilon_y = \sqrt{{\epsilon_p}^2 + {\epsilon_q}^2}$$

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}$$

En forma aproximada se puede calcular, como cota superior:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial p}\right| \Delta p + \left|\frac{\partial f}{\partial q}\right| \Delta q + \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \Delta r + \ldots.$$

Hallar el área del rectángulo



$$z_o = L_1 \cdot L_2$$

$$z_o = 1.53 \times 10.2 = 15.606 \text{ cm}^2$$

El error relativo del área $\Delta z/z$

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \sqrt{\frac{(\Delta L_1)^2}{{L_1}^2} + \frac{(\Delta L_2)^2}{{L_2}^2}}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{0.06}{1.53}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{10.2}\right)^2} = 0.0404422504$$

$$\Delta z = (1.53 \cdot 10.2) \cdot 0.0404422504 = 0.63083 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\text{Área: } z = (15{,}61 \pm 0{,}63) \text{ cm}^2}$$

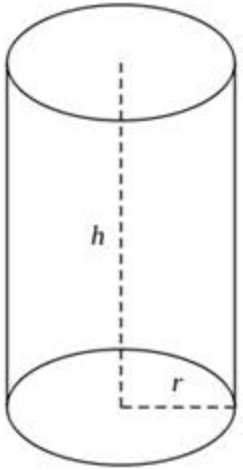
¿Que pasa cuando aparece en la calculo π??

Se puede despreciar la influencia de su incerteza en el resultado, **eligiendo un número adecuado de cifras**

Un criterio es despreciarlo si su ε << que el de las otras MF intervinientes.

$$\varepsilon_\pi \ll \varepsilon_{MF} \qquad \varepsilon_\pi \leq 0{,}1.\,\varepsilon_{MF}$$

Ejemplo: ¿Con cuántas cifras se expresará π para despreciar su error en el cálculo del volumen de un cilindro?.



$V = \frac{1}{4}\,\pi.d^2.h$

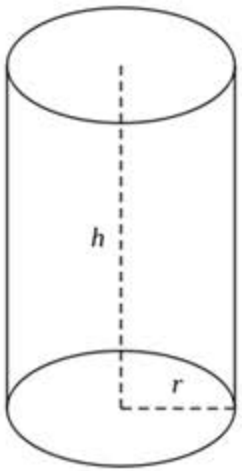
$$\epsilon_V^2 = \cancel{\epsilon_\pi}^2 + (2\epsilon_d)^2 + \epsilon_h{}^2$$

$$\varepsilon_\pi \ll \varepsilon_{(d)} \quad \varepsilon_\pi \ll \varepsilon_{(h)}$$

El caso de variables dependientes (x^n)

$V = \frac{1}{4}\pi.d^2.h$

$$\epsilon_V^2 = \cancel{\epsilon_\pi}^2 + \underbrace{(2\epsilon_d)^2} + \epsilon_h{}^2$$



OJO: d y d en d^2 son variables DEPENDIENTES pero lo puedo pensar como $d^2 = A$ y ahí aplicar la regla:

$V = \frac{1}{4}\pi.d^2.h = \frac{1}{4}\pi.A.h$

$$\epsilon_V^2 = \epsilon_A{}^2 + \epsilon_h{}^2$$

$$\epsilon_A^2 = \epsilon_{d^2}{}^2 = \left(\frac{\Delta(d^2)}{d^2}\right)^2 = \left(\frac{2\mathrm{d}\Delta d}{d^2}\right)^2 = (2\epsilon_d)^2$$

$$\Delta(d^2) = 2d\Delta d$$

Por lo tanto, no puedo aplicar la regla y debo derivar cuando hay variables dependientes.

Entonces en general:

$$f = a^l b^m ... c^n$$

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{l^2 \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + ... + n^2 \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2}$$

donde l, m y n son constantes que pueden ser negativas.

Supongamos que queremos calcular g a partir de la determinación del período del péndulo. (P)

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad g = 4\pi^2\frac{l}{P^2}$$

¿Cuál es el error absoluto de g??? Determinado en forma indirecta a partir de P y considerando despreciable $\varepsilon(\pi)$:

$$\Delta g = \sqrt{\left(4\pi^2\frac{1}{P^2}\Delta l\right)^2 + \left(4\pi^2\frac{-2}{P^3}\Delta P\right)^2} = 4\pi^2\frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(4\pi^2 \frac{1}{P^2}\Delta l\right)^2 + \left(4\pi^2 \frac{-2}{P^3}\Delta P\right)^2} = 4\pi^2 \frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{P^2} \qquad \triangle g = g.\varepsilon(g)$$

$$(\varepsilon(g))^2 = (2.\varepsilon(\pi))^2 + (\varepsilon(l))^2 + (2.\varepsilon(p))^2$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2} \qquad \triangle g = g.\varepsilon(g)$$

$$\Delta g = 4\pi^2 \frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$