universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Repaso matemático

Laboratorio 1 B – 2c 2021

Problema 1: suma cuadrática

1. Suma cuadrática

Sean c_1 y c_2 tal que $c_1 = a + b$ y $c_2^2 = a^2 + b^2$, donde $a > 0$ y $b > 0$:

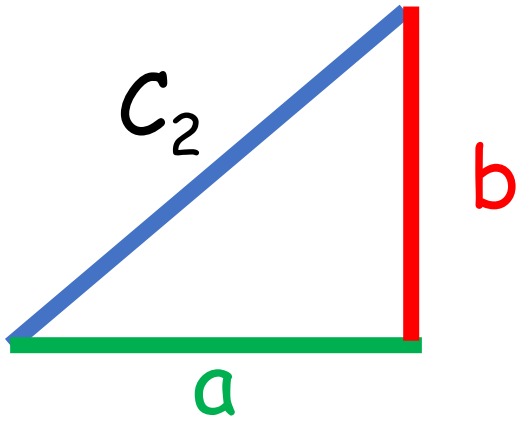
1. ¿Cuál de los dos es mayor?
2. ¿Cómo lo interpretan gráficamente?
3. ¿Cómo tiene que ser la relación $r \equiv a/b$ para que pueda aproximar $c_2 = 0{,}99c_1$?

Problema 1: suma cuadrática

1. Suma cuadrática

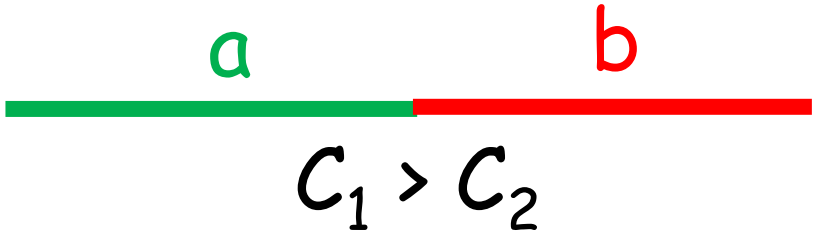
Sean c_1 y c_2 tal que $c_1 = a + b$ y $c_2^2 = a^2 + b^2$, donde $a > 0$ y $b > 0$:

1. ¿Cuál de los dos es mayor?
2. ¿Cómo lo interpretan gráficamente?



$$c_1 = a + b$$

$$c_2^2 = a^2 + b^2$$ (Pitágoras)



→ Sumar sin los cuadrados da un número mayor.

3. ¿Cómo tiene que ser la relación $r \equiv a/b$ para que pueda aproximar $c_2 = 0{,}99c_1$?

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{b}\,\frac{\frac{a}{b}+1}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2+1}} = \frac{r+1}{\sqrt{r^2+1}} = x$$

$$\Rightarrow x^2(r^2+1) = (r+1)^2$$

$$\Rightarrow r^2(x^2-1) - 2r + x^2 - 1 = 0$$

… y despejo r usando x = 1/0.99

Problema 2: campana de Gauss

2. Campana de Gauss

La función de Gauss tiene forma de campana y su forma funcional es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

1. Hallar el máximo.

2. Demostrar que es simétrica alrededor del máximo.

3. Si el valor de σ aumenta, ¿la campana se ensancha o se angosta?

Problema 2: campana de Gauss

1) Hallar el máximo.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Puedo hallar el máximo de la función (x_0) sabiendo que:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$$

(+ la condición de concavidad negativa)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(x)[-(x-\mu)/\sigma^2]$$

→ Único máximo en $x_0 = \mu$

Problema 2: campana de Gauss

2) Demostrar que es simétrica alrededor de μ.

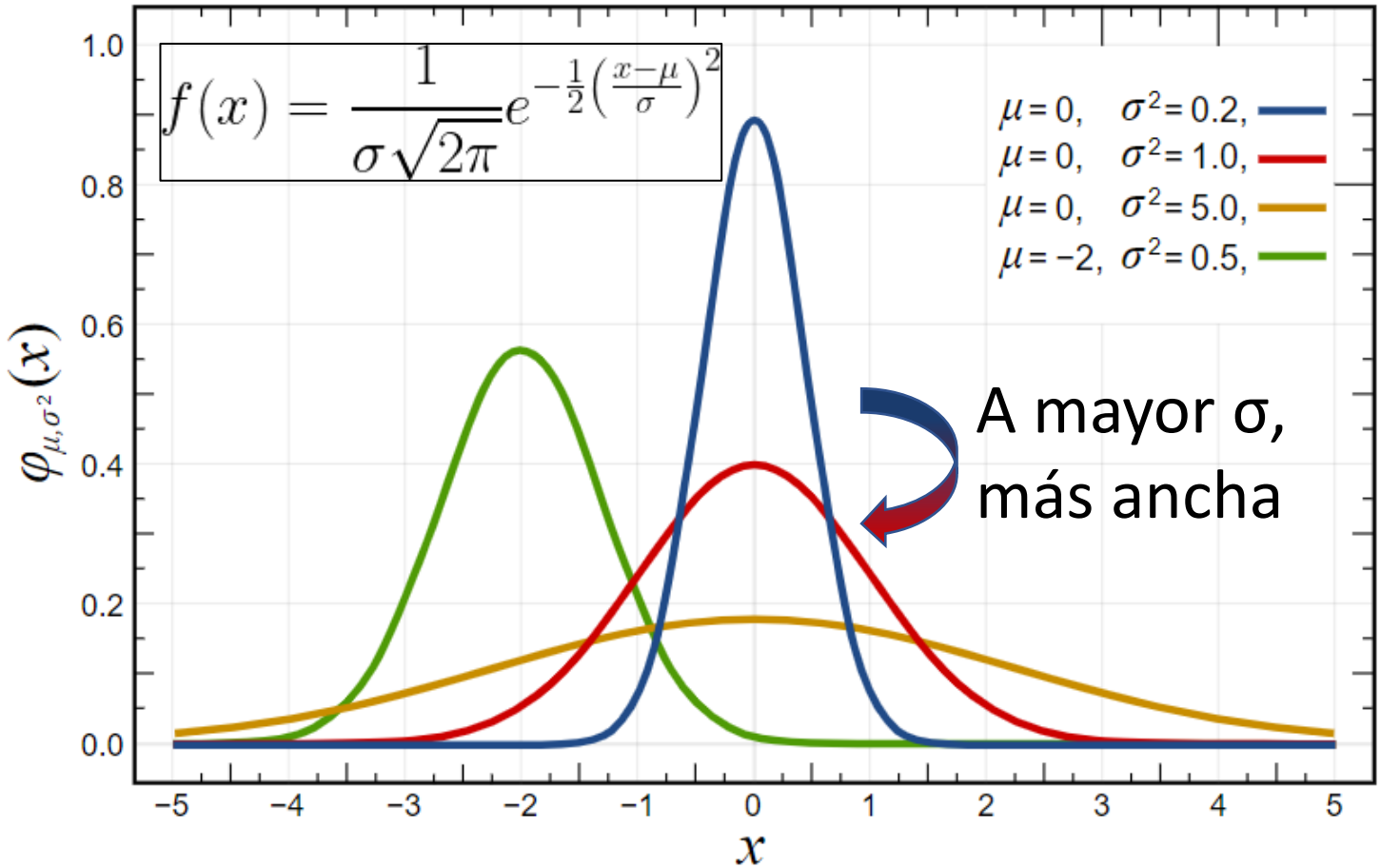
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Esto sucede si: $f(\mu + d) = f(\mu - d)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-d}{\sigma}\right)^2}$$

Problema 2: campana de Gauss

3) Significado de σ (desviación estándar)



Problema 3: cambio de variables

3. Cambio de variables

Cuando se quiere visualizar la tendencia de una variable y en un rango que abarca varios órdenes de magnitud, se suele graficar $\log(y)$ en su lugar, usando entonces lo que se conoce como **escala logarítmica**.Supongan una función $y = f(x)$ que van a querer graficar en escala semi-logarítmica de modo que, en vez de visualizar $y(x)$, visualicen $u(x)$ donde $u = \log(y)$. ¿Qué transformación deben hacerle a f? ¿Y si ahora quieren visualizar $u(v)$, donde $v = \log(x)$? Este último caso se suele llamar escala log-log,

1. Sea una función $y = A\exp(Bx)$, dibujar $u(x)$. ¿Qué representan A y B en la nueva escala? Esto se usa mucho para poder comparar entre distintos comportamientos exponenciales, como por ejemplo en las recientes representaciones gráficas de los casos de COVID-19.

2. Representar en escala semi-logarítmica $u(x)$ para $y = \log(x)$.

3. Dibujar en escala log-log la función $y = A + Bx$.

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

Dados **dos números reales positivos** *a* y *N* ($a \neq 1$), el logaritmo en base *a* de *N* es el exponente al que hay que elevar la base *a* para que el resultado sea *N*

$$x = \log_a N \qquad \text{si} \qquad a^x = N$$

De la definición se deducen las siguientes igualdades:

$$a^{\log_a N} = N$$

$$\log_a a^x = x$$

$\log_2 8 = 3$ (logaritmo en base 2 de 8 es 3) pues $2^3 = 8$

$\log_6 36 = 2$ (logaritmo en base 6 de 36 es 2) pues $6^2 = 36$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ (logaritmo en base 2 de $\frac{1}{4}$ es -2) pues $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$\log_3 \frac{1}{27} = -3$ (logaritmo en base 3 de $\frac{1}{27}$ es -3) pues $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

Logaritmo decimal o de Briggs

Llamamos logaritmo decimal al logaritmo en base 10, y se designa: *log*

$$\log N = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = N$$

Ejemplos:

$$\log 100 = 2 \quad \text{pues} \quad 10^2 = 100$$

$$\log 1000 = 3 \quad \text{pues} \quad 10^3 = 1000$$

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

Logaritmo neperiano

Llamamos logarimo neperiano al logaritmo cuya base es el número *e*, y se designa: *Ln*

$$\mathrm{Ln}\, N = x \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} = N$$

Ejemplos:

$$\mathrm{Ln}\, e^{5} = 5 \qquad \text{pues} \qquad e^{5} = e^{5}$$

$$\mathrm{Ln}\, e^{-3} = -3 \qquad \text{pues} \qquad e^{-3} = e^{-3}$$

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

Propiedades de los logaritmos

1. **El logaritmo de la base es siempre 1:**

$$\log_a a = 1$$

$$\log_2 2 = 1$$

2. **En cualquier base, el logaritmo de 1 es siempre 0:**

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_3 1 = 0$$

3. **En cualquier base, tenemos la siguiente relación:**

$$\log_a A = \log_a B \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

4. **El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:**

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

$$\log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 3 + \log_2 4$$

5. **El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el del denominador:**

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A + \log_a B$$

$$\log \frac{5}{3} = \log 5 + \log 3$$

6. **El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia:**

$$\log_a \left(A^n\right) = n \log_a A$$

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

El logaritmo en base *a* de un número N se puede obtener a partir de logaritmos en otra base *b*.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

o bien, a partir de logaritmos neperianos:

$$\log_a N = \frac{1}{\mathrm{Ln}\ a}\,\mathrm{Ln}\ N$$

$$\log_3 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 3}$$

Problema 3: cambio de variables
LOGARITMOS

Los logaritmos en base a de un número N es igual al cociente del logaritmo decimal de N entre el logaritmo decimal de a

$$\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$$

Problema 3: cambio de variables

Escala semi-logarítmica

$$y = f(x)$$

$$u = log(y)$$

$$log(y) = log(f(x))$$

$$\boxed{u(x) = log(f(x))}$$

Escala log-log

$$v \equiv log(x) \Rightarrow x = exp(v)$$

Entonces:

$$\boxed{u(v) = \log(f(\exp(v)))}$$

Problema 3: cambio de variables

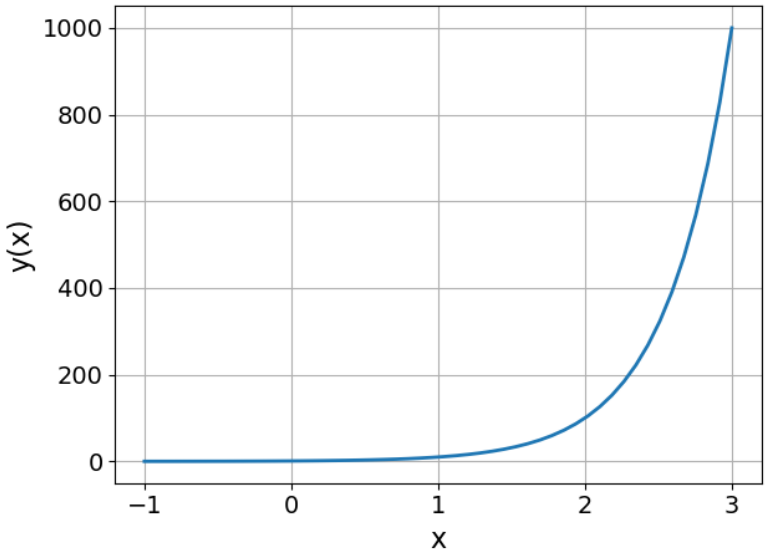
Ejemplos (1)

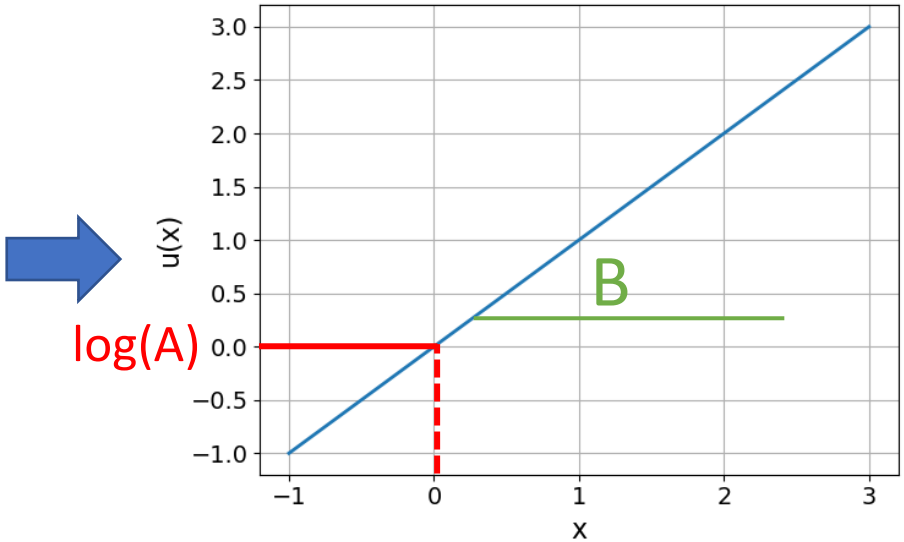
De antes:

$$\boxed{u(x) = log(f(x))}$$

$$y(x) = A\exp(Bx)$$

$$\log(y) = \log[A\exp(Bx)] = \log(A) + Bx$$



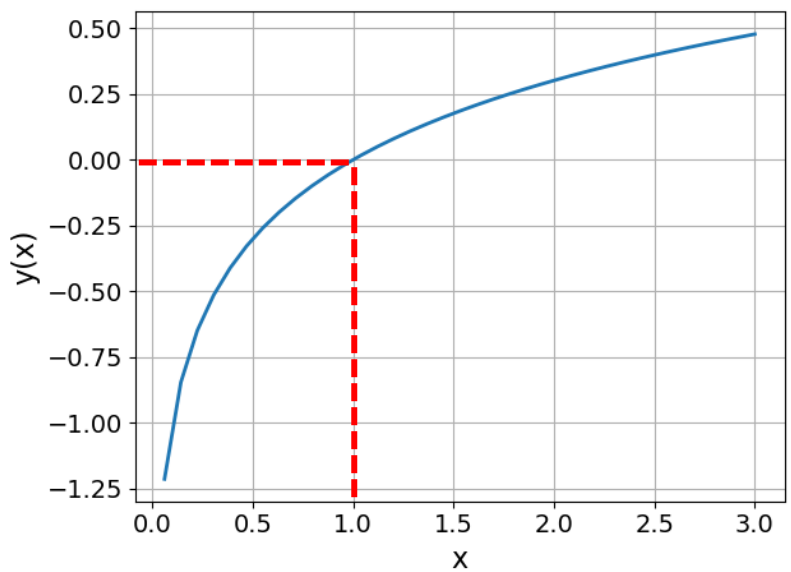


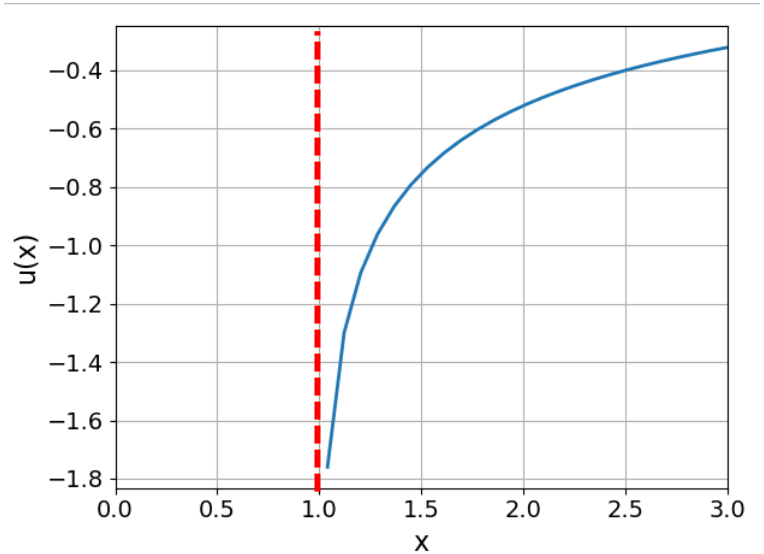
→ La escala logarítmica linealiza los comportamientos exponenciales

Problema 3: cambio de variables

Ejemplos (2)

$$y(x) = \log(x) \Rightarrow \log(y) = \log(\log(x))$$





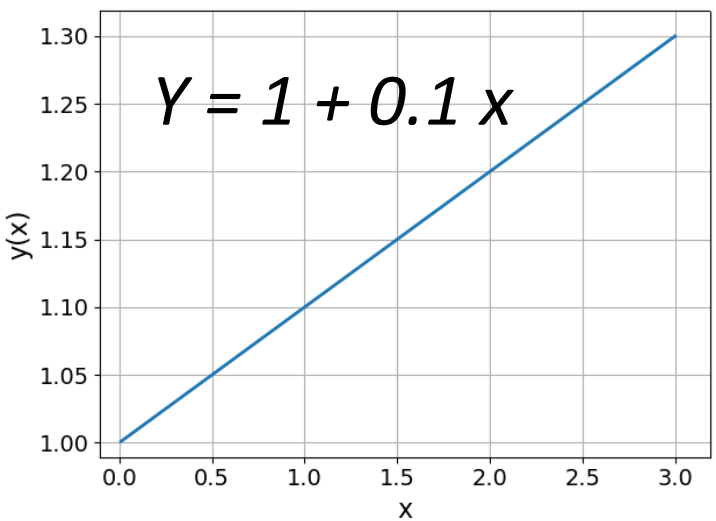
→ La escala logarítmica no puede aplicarse para argumentos negativos

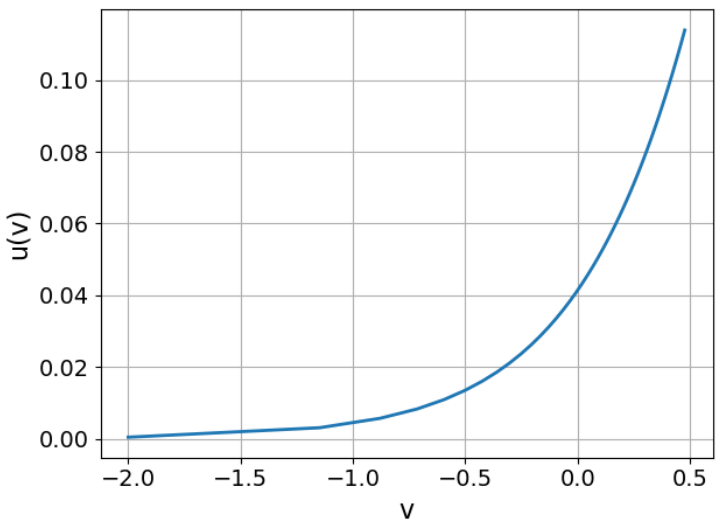
Problema 3: cambio de variables

Ejemplos (3)

$$y(x) = A + Bx \Rightarrow \log(y) = \log(A + Bx)$$

$$u(v) = \log(A + B\exp(v))$$





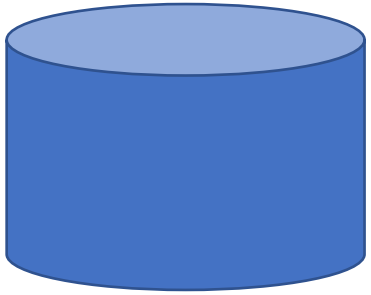
Problema 4: derivadas

¿Aumenta más el volumen con r o con h?

4. Derivadas

Las derivadas parciales serán útiles para cuando veamos propagación de errores.

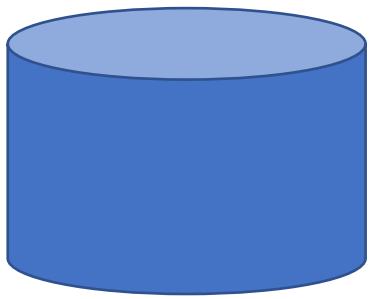
1. El volumen de un cilindro se puede calcular como $V = \pi r^2 h$. ¿El volumen crece más con un incremento infinitesimal de h o con uno de r? ¿Depende de los valores de h y r? Distinguir los regímenes en lo que sucede lo uno o lo otro.



$$V = \pi r^2 h$$

Problema 4: derivadas

¿Aumenta más el volumen con r o con h?



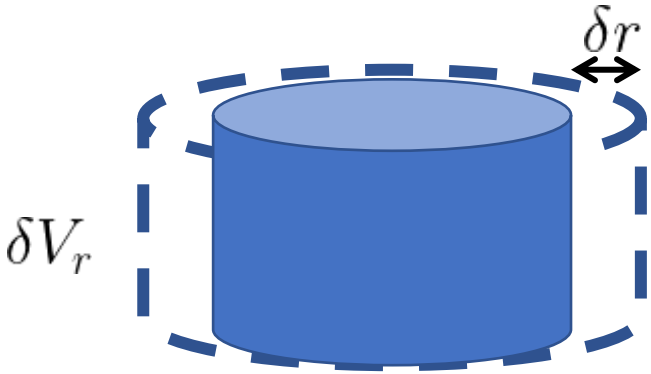
$$V = \pi r^2 h$$

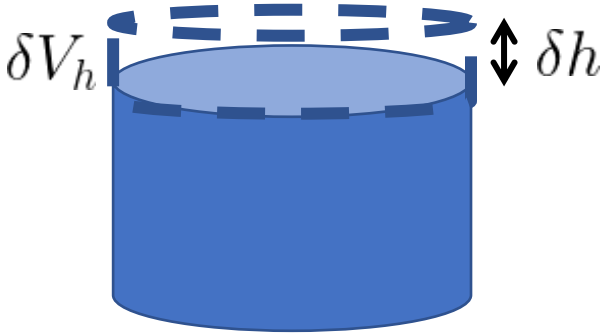
$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

$$\delta V_r = 2\pi r h \; \delta r \qquad \delta V_h = \pi r^2 \; \delta h$$

$$\frac{\delta V_h}{\delta V_r} = \frac{r}{2h}\frac{\delta h}{\delta r}$$

$$\boxed{\delta V_h > \delta V_r \quad si \quad r > 2h}$$





→ Es decir, si es “muy ancho” conviene mover h y si es “muy alto”, r.

Problema 4: derivadas

2. La superficie de una huevera se puede modelar con la función $z(x, y) = \cos(x)\cos(y)$. Ubicar las coordenadas donde hay que colocar los huevos.

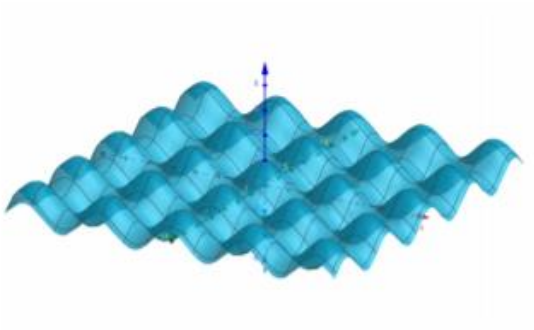
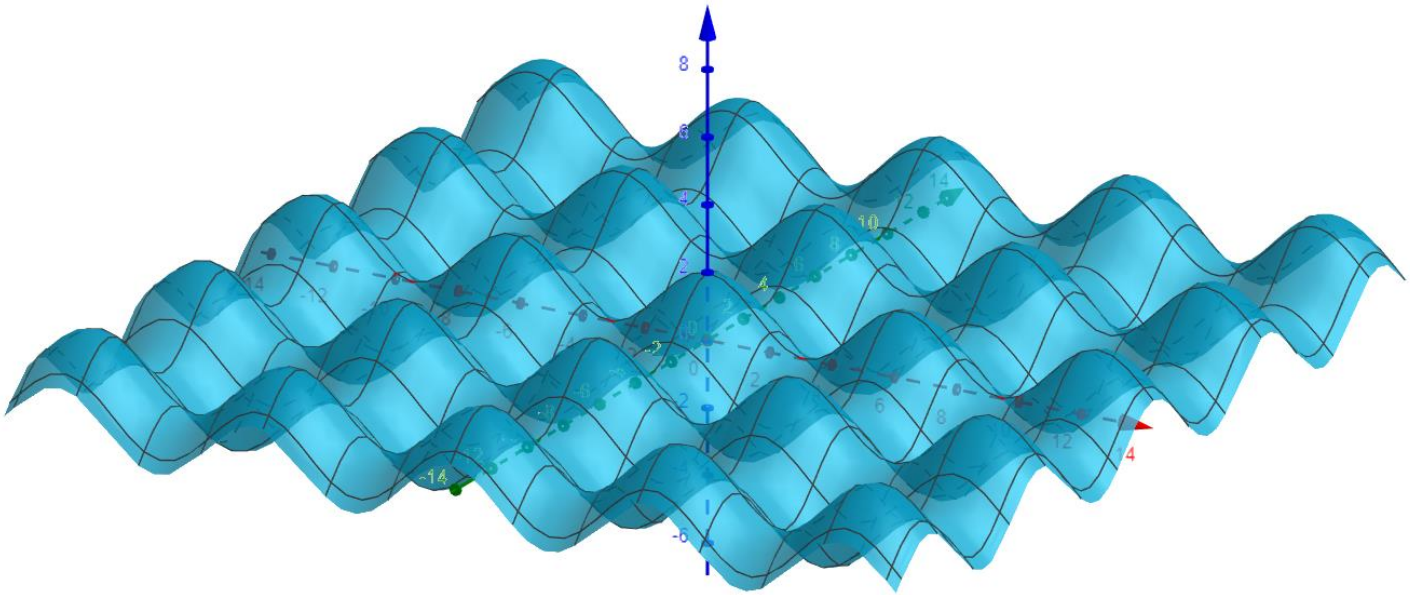


Figura 1: *Modelo de la huevera.*

Problema 4: derivadas

Huevos en la huevera

$$z(x, y) = \cos(x)\cos(y)$$



→ Opción 1 (fácil): busco los mínimos “a ojo”.
→ Opción 2 (difícil): busco los mínimos usando derivadas.

$$z(x, y) = \cos(x)\cos(y)$$

Opción 1 (fácil)

El mínimo valor de z posible es $z(x_0, y_0) = -1$

Eso ocurre cuando:

$$\cos(x_0) = 1 \quad \wedge \quad \cos(y_0) = -1$$

(y viceversa)

x_0 múltiplos **pares** de π
y_0 múltiplos **impares** de π

$(x_0, y_0) = (2n\,\pi, (2n+1)\,\pi)$ $\quad n \in Z$

Y al revés:

x_0 múltiplos **impares** de π
y_0 múltiplos **pares** de π

$(x_0, y_0) = ((2n+1)\,\pi, 2n\,\pi)$ $\quad n \in Z$

Opción 2 (difícil)

Los mínimos (x_0 , y_0) están donde se cumpla:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \wedge \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

Y para que sean mínimos (no máximos):

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0 \quad \wedge \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0$$

Problema 4: derivadas

3. Supongan un gráfico $y(x)$ como el de la figura, para el cual a una persona me pide que le reporte el valor $y_0 = y(x_0)$. Supongan que yo interpeté mal y le doy el valor de $y(x_1)$, donde $x_1 = x_0 + dx$ con dx pequeño. ¿Cuánto vale, aproximadamente, la diferencia entre el valor de y_0 y el calculado por mí? Por más que parezca extraño, estas situaciones son muy recurrentes en los casos en los que redondeamos. Por ejemplo, si decido calcular el diámetro o área de una circunferencia usando x_1 = 3.14 en vez de x_0 = 3.1415 (notar que en ese caso el resultado obtenido para dy es exacto porque la relación es lineal).

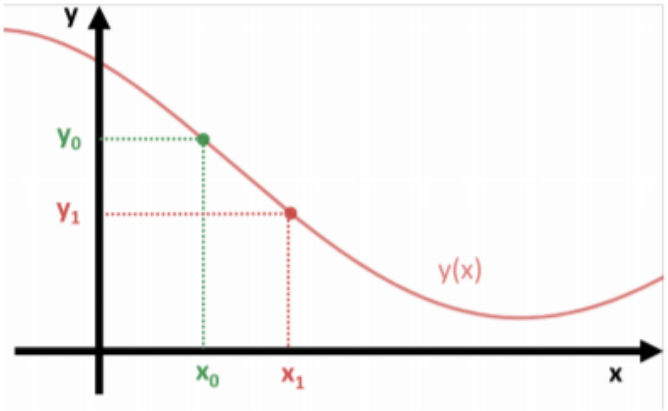


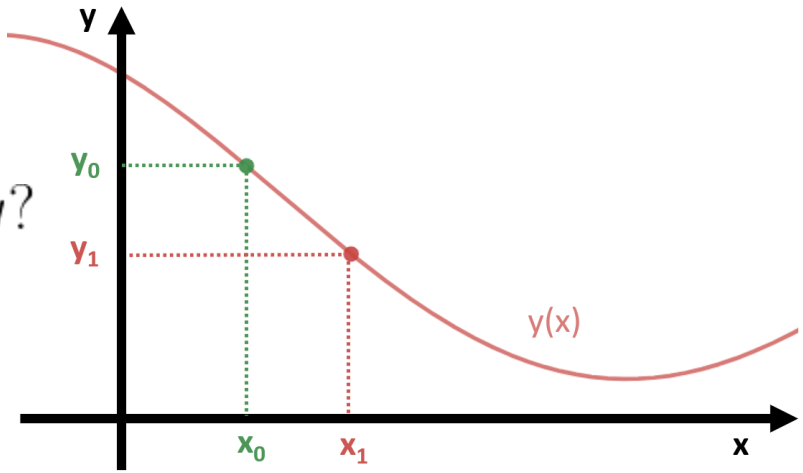
Figura 2: *Aproximación al valor de $y(x)$.*

Problema 4: derivadas

3. Aproximaciones (Taylor)

$$y_0 = y(x_0)$$
$$y_1 = y(x_0 + dx)$$

$\Delta y?$



Por Taylor:

$$y(x_0 + dx) = y(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} dx + (\ldots)$$

Entonces (restando):

$$\Delta y \approx \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} dx$$

→ La derivada sirve para estimar apartamientos

Problema 4: derivadas

4. Calcular la siguiente derivada parcial: $\frac{\partial y}{\partial L}$, donde $y(g, L) = \sqrt{g/L}$.

4. Un ejemplo

$$y(g, L) = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{1}{2\sqrt{g/L}}\left(-\frac{g}{L^2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L^3}}$$