Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2023

Error Estadístico

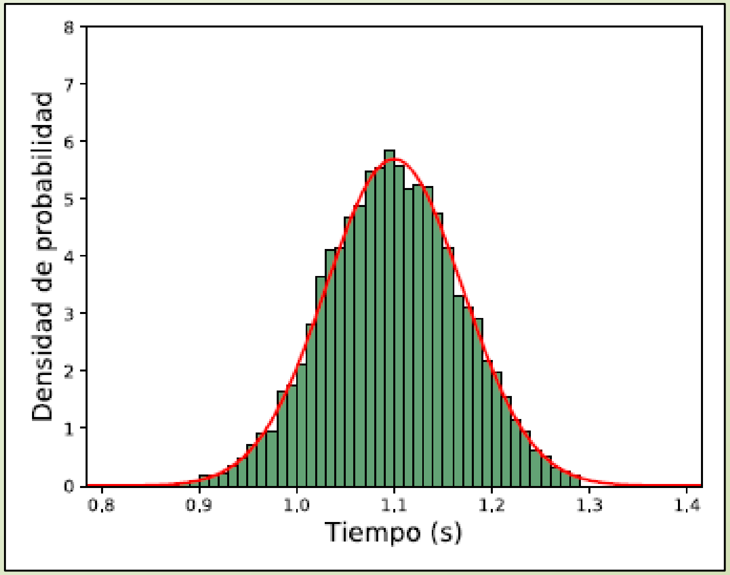
Lucía Famá, Germán Patterson,
Lucia Novacovsky,
Luciana Martínez, Anael Zurdo

Mediciones Directas (MD)

¿Cómo obtenemos el resultado de una MF?

2 - Si mido más de 1 vez y los datos se encuentran **FUERA del intervalo de confianza** $\left[\boldsymbol{\bar{x}-\sigma_{ap}}\,,\boldsymbol{\bar{x}+\sigma_{ap}}\right]$

Expresión del Resultado $\boxed{x=(\bar{x}\pm\Delta x)\;Ud.}$



$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

$\boldsymbol{\Delta x}$??

$S = Desviación\ Estándar$

$\sigma_e = Error\ estadístico$

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución

$N \rightarrow \infty$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR\ (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = Desviación\ Estándar$$

$$\sigma = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Si realizamos una nueva medición, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

$$[\bar{x} - S, \bar{x} + S] \longrightarrow [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$$

Análisis de estadístico

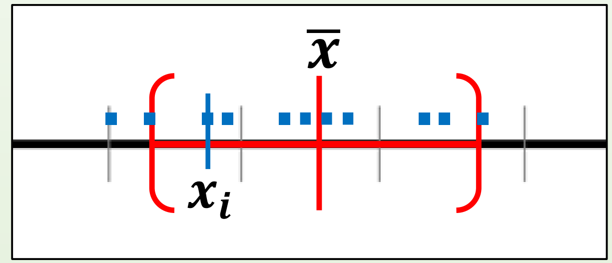
Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\boldsymbol{N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}}$$

Book1

	A(X)
Long Name	Diametro
Units	microm
Comments	
77	7,55
78	7,27
79	7,59
80	7,16
81	7,59
82	7,12
83	7,37
84	7,50
85	7,41
86	7,27
87	7,50

$$\boldsymbol{\overline{x} = 7,29\ \mu m}$$



Promedio

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

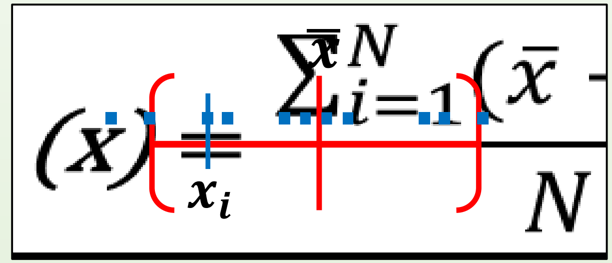
$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$

$$\bar{x} - x_i \qquad (\bar{x} - x_i)^2$$

Book1

	A(X)	B(Y)	C(Y)
Long Name	Diametro	X-Xmedia	(X-Xmedia)^2
Units	microm	microm	microm^2
Comments			
77	7,55	0,26	0,07
78	7,27	-0,02	0,00
79	7,59	0,30	0,09
80	7,16	-0,13	0,02
81	7,59	0,30	0,09
82	7,12	-0,17	0,03
83	7,37	0,08	0,01
84	7,50	0,21	0,05
85	7,41	0,12	0,01
86	7,27	-0,02	0,00
87	7,50	0,21	0,04

$$\bar{x} = 7,29\ \mu m$$



VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio

$$S = \sqrt{Var\,(x)}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución

$$N \rightarrow \infty$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \longrightarrow \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}} \longrightarrow \sigma = \sqrt{VAR\,(x)}$$

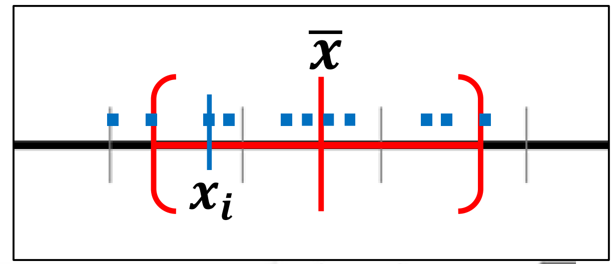
Si realizamos una nueva medición, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

$$[\bar{x} - S, \bar{x} + S] \longrightarrow [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria $\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N\}$

```
[ ]  array([32.545, 32.691, 32.58 , 32.546, 32.429, 32.524, 32.63 , 32.409,
            32.554, 32.545, 32.411, 32.347, 32.545, 32.778, 32.646, 32.545,
            32.477, 32.502, 32.6  ])
```



Valor más representativo: Promedio de los datos: $\bar{x}$

```
X = np.mean(x)
print("El valor medio es =", X, "s")
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

```
[ ] array([32.545, 32.691, 32.58 , 32.546, 32.429, 32.524, 32.63 , 32.409,
           32.554, 32.545, 32.411, 32.347, 32.545, 32.778, 32.646, 32.545,

    El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
A=x-X
print(A)
```

$x_i - \bar{x}$

```
[ 0.00268421  0.14868421  0.03768421  0.00368421 -0.11331579 -0.01831579
  0.08768421 -0.13331579  0.01168421  0.00268421 -0.13131579 -0.19531579
```

```
AA=A**2
print(AA)
```

$(x_i - \bar{x})^2$

```
[7.20498615e-06 2.21069945e-02 1.42009972e-03 1.35734072e-05
 1.28404681e-02 3.35468144e-04 7.68852078e-03 1.77730997e-02
 1.36520776e-04 7.20498615e-06 1.72438366e-02 3.81482576e-02
```

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

```
AA=A**2
```

$(\bar{x} - x_i)^2$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

```
[ ] B=sum(AA)/N
    print(B)
```

```
0.010171163434903048
```

```
C=np.var(x)
print("La varianza es =", C)
```

```
La varianza es = 0.010171163434903046
```

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio de una serie

$$\boldsymbol{S^2 = Var\,(x)}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
[ ]  D=np.sqrt(C)
     print(D)
```

```
0.10085218606903396
```

Esto también puede obtenerse simplemente como np.std("datos")

```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

```
[ ]  array([32.545, 32.691, 32.58 , 32.546, 32.429, 32.524, 32.63 , 32.409,
            32.554, 32.545, 32.411, 32.347, 32.545, 32.778, 32.646, 32.545,
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

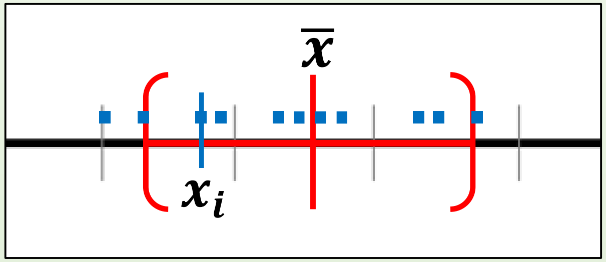
```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

¿Cuándo vamos a usar S?

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria
$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$



Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)}$$

Error Estadístico (σ_e): Error cuadrático medio del Promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

¿Pero … Δx cómo lo obtengo?

Varias Series de mediciones

Teorema Central del Límite (TCL)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $<\bar{x}>$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

En general se toma una única muestra de N medidas …

Si se toma como **hipótesis** que nuestra serie que comportará como otra de la misma MF bajo la misma metodología:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

Valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Si tomo N medidas: $\Delta x = \sigma_e$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

En general se toma una única muestra de N medidas …

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

N Series

PROBABILIDAD	Una nueva medida de x …
• *~68%*	$[\bar{\boldsymbol{x}} - \sigma_e \,, \bar{\boldsymbol{x}} + \sigma_e]$
• *~95%*	$[\bar{\boldsymbol{x}} - 2\sigma_e \,, \bar{\boldsymbol{x}} + 2\sigma_e]$
• *~99%*	$[\bar{\boldsymbol{x}} - 3\sigma_e \,, \bar{\boldsymbol{x}} + 3\sigma_e]$

El error del promedio

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

que en la práctica es:

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Está en todos los libros de estadística.

```
Dx=S/np.sqrt(len(x))
print("El error del promedio es Dx =", Dx, "s")
```

```
El error del promedio es Dx = 0.02313707827947787 s
```

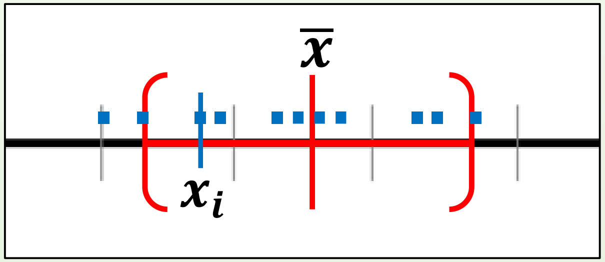
Expresión del resultado $\boxed{T = (\bar{T} \pm \sigma_e)\, Ud.}$

```
print("El resultado de la medición fue: T =", f'({X:.3f} ± {Dx:.3f}) s')
```

```
El resultado de la medición fue: T = (32.542 ± 0.023) s
```

Desviación estándar y sus usos ….

¿Cuál va a ser el error de cada medida de la muestra general?



Si realizamos una nueva medición x_i, este dato tendrá una probabilidad del 68% de encontrarse en el intervalo de confianza

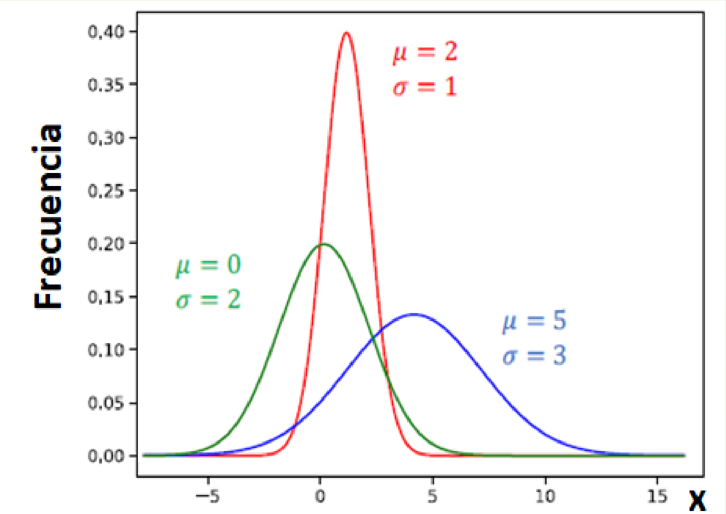
$$[\overline{x} - \sigma_e , \overline{x} + \sigma_e]$$

El error de cada dato de toda la serie de medidas es S

Comparación:

¿Quién mide en forma más precisa?

MENOR valor de S representa MAYOR PRECISIÓN al medir



Desviación estándar y sus usos ….

Ejemplo:

Mido **N = 81** períodos de un péndulo, calculo los parámetros estadísticos:

$$\boldsymbol{\bar{T} = 2.25\ s,} \qquad \boldsymbol{S = 0.27\ s,} \qquad \boldsymbol{\sigma_e} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \boldsymbol{0.03\ s}$$

El **RESULTADO del período** es: : $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\bar{T}} \pm \boldsymbol{\sigma_e})$: $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2.25} \pm \boldsymbol{0.03})\ \boldsymbol{s}$

Si tomo **una nueva medida** del períodos de un péndulo y obtengo $\boldsymbol{2.23\ s}$. La nueva medida tendrá aprox. un **68% de probabilidades** de encontrarse en el intervalo de confianza

$$[\boldsymbol{\bar{T}} - \boldsymbol{\sigma_e}, \boldsymbol{\bar{T}} + \boldsymbol{\sigma_e}]: [\boldsymbol{2.22, 2.28}]$$

El error de la nueva medida será igual al del resto de las medidas, y valdrá: $\boldsymbol{S = 0.27\ s}$

Entonces el **resultado de la nueva medida** será: $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2,23} \pm \boldsymbol{0,27})\ \boldsymbol{s}$

ACTIVIDAD 1

EXPERIMENTO

Exp. 3

Analicemos la desviación estándar *S* con los datos de la clase pasada (29-03)

1) Calcular *S* de los datos del cronómetro de 1 integrante y los del Photogate para N = 40 **de la CLASE 2. Actividad 1A**.

Discusión *¿Depende S del instrumento de medición que emplearon? ¿En qué caso observaron la mayor dispersión de datos? ¿Qué instrumento mostró la serie de mediciones más precisa? ¿Por qué creen que ocurrió eso?*

2) Calcular *S* de las medidas del photogate para N = 40 del péndulo de 1 m y péndulo de 50 cm **de la CLASE 2. Actividad 1A y 1B.**

Discusión *¿Observa un cambio importante en S cuando cambia la longitud del péndulo? ¿Qué esperaría de S si usa el mismo instrumento para la medición y no está el factor humano?*

EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 2

Exp. 3

Armar un Péndulo de 1 m de largo

- Obtener **160 medidas** con un **photogate** como la clase pasada, haciendo 4 series de 40 mediciones (N = 40) cada una.

- Dividir los datos en 3 grupos: N = 40, N = 80 y N = 160. Hacer una Figura con los 3 Histograma superpuestos.

Discusión *¿Depende la forma, el centro y/o el ancho del Histograma del número de mediciones?*

- Dividir los datos en grupos: N = 40, N = 80, N = 100, N = 120, N = 140, y N = 160.

  - Calcular el valor más representatico $\overline{T}$ de cada grupo

  - Calcular el desvío estándar S de cada grupo

Discusión *¿Paree depender* $\overline{T}$ *o* S *del número de mediciones N?*

ACTIVIDAD 2

EXPERIMENTO

Exp. 3

Armar un Péndulo de 1 m de largo

- **Calcular el RESULTADO del período del péndulo:**

$$\boldsymbol{T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud}$$

considerando que **N = 160** es representativo para su experimento. Exprese el resultado con 2 cifras significativas.

¿Qué hipótesis se debe cumplir para poder decir que $\Delta T = \sigma_e$*?*
¿Creen que la cumplieron?

ENTREGA:
12 DE ABRIL 14 HORAS

EXPERIMENTO

Exp. 3

Actividad 1 (con los datos de la clase pasada. Clase 2):

- Resultados de $\boldsymbol{S}$ **de 1) con la Discusión**
- Resultados de $\boldsymbol{S}$ **de 2) con la Discusión**

Actividad 2:

- **Figura 1. Histograma superpuestos** con N = 40, N = 80 y N = 160 **con la Discusión**
- **Tabla 1.** Resultados de $\overline{\boldsymbol{T}}$ y de $\boldsymbol{S}$ de cada grupo (N = 40, N = 80, N = 100, N = 120, N = 140, y N = 160) **con la Discusión**
- Resultado del **período del péndulo T expresado con 2 cifras significativas, con la Discusión**