



Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2023

**Mediciones Indirectas
Determinación del volumen**

**Lucía Famá, Germán Patterson,
Lucia Novacovsky,
Luciana Martínez, Anael Zurdo**

Resultado y una MF y forma de expresarlo

Resultado

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Ud.}$$

\bar{x} o x_0 : Valor más representativo

Δx : Incerteza Absoluta

Mediciones Directas (MD)

Valor más representativo

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Incerteza Absoluta (Δx) para diferentes casos

Si mido dentro del error instrumental



$$\Delta x = \sigma_{ap}$$

El RESULTADO de MF será:

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_{ap} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{ap}$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_{ap}) Ud.$$

Si mido fuera del error instrumental

Generalizando ... tomo **N** medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones y como **hipótesis** que **se cumple el Teorema Central del Límite**

El **error absoluto de MF** será el error estadístico → $\Delta x = \sigma_e$

$$\Delta x = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

El **RESULTADO de MF** será:

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e) Ud.$$

Si mido fuera del error instrumental

Generalizando ... tomo **N** medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones y como **hipótesis** que **se cumple el Teorema Central del Límite**

El **error de cada medida** será: →

$$\Delta x = S$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

El **RESULTADO** de cada medida:

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

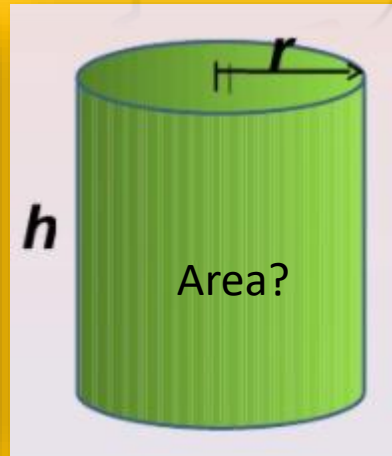
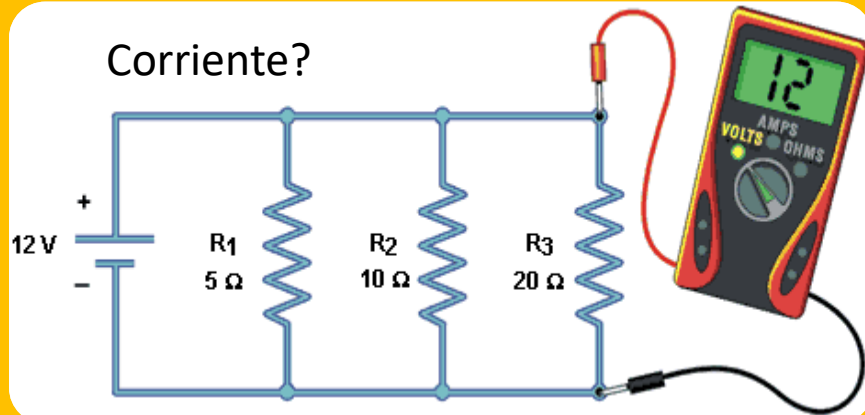
Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S) \text{ Ud.}$$

Si realizamos una NUEVA MEDICIÓN DE LA MF, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

$$(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$$

Mediciones Indirectas (MI)



Indirectas (MI)

La medida deseada se obtiene a partir de un proceso matemático sobre otras medidas

Ej.: superficie de un cuerpo a partir de la medida de sus lados.

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$W = f(x, y, z, \dots)$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) \text{ Ud.}$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y) \text{ Ud.}$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z) \text{ Ud.}$$

⋮

$x, y, z \dots$ variables
independientes

$$W = (W_0 \pm \Delta W) \text{ Ud.}$$

Valor más representativo

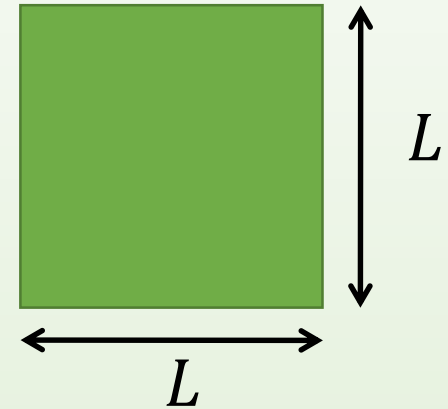
Error Absoluto

¿Cuál es el valor del Área de un Cuadrado?

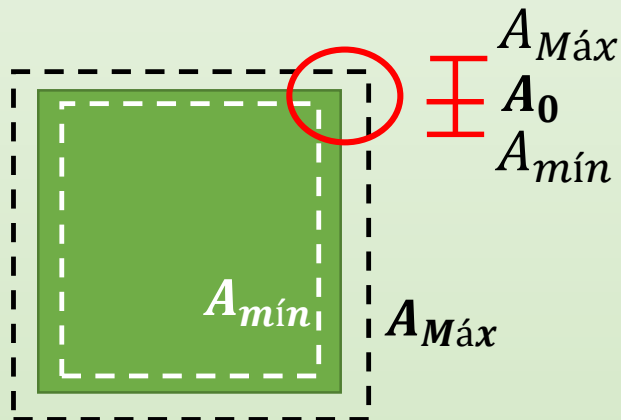
AREA de un cuadrado

$$A = L^2$$

$$L = (L_0 \pm \Delta L) \text{ Ud.}$$



Estimemos un posible valor de A



$$A = (A_0 \pm \Delta A) \text{ Ud.}$$

$$A_0 - \Delta A \leq A \leq A_0 + \Delta A$$

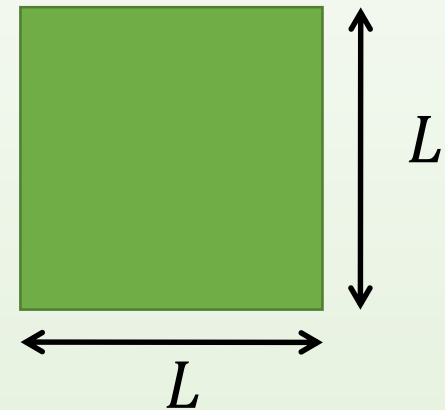
$$A_{\text{mín}} \leq A \leq A_{\text{Máx}}$$

¿Cuál es el valor del Área de un Cuadrado?

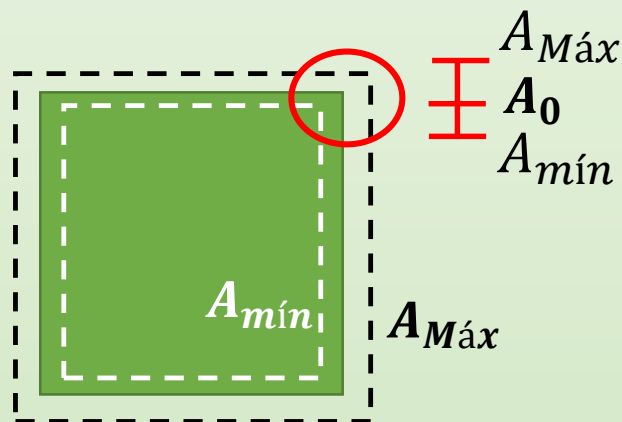
AREA de un cuadrado

$$A = L^2$$

$$L = (L_0 \pm \Delta L) \text{ Ud.}$$



Estimemos un posible valor de A



$$A_0 - \Delta A \leq A \leq A_0 + \Delta A$$

$$A_{mín} \leq A \leq A_{Máx}$$

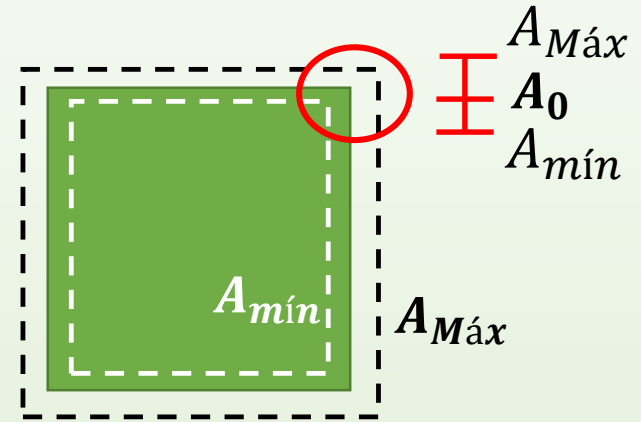
$$A_{Máx} = (L_0 + \Delta L)^2$$

$$A_{mín} = (L_0 - \Delta L)^2$$

¿Cuál es el valor del Área de un Cuadrado?

AREA de un cuadrado

$$A = L^2$$



Valor más representativo A_0

$$A_0 = \frac{A_{Máx} + A_{mín}}{2} = \frac{(L_0 + \Delta L)^2 + (L_0 - \Delta L)^2}{2}$$

$$A_0 = \frac{L_0^2 + 2L_0\Delta L - 2L_0\Delta L + L_0^2}{2} = \frac{2L_0^2}{2}$$

$$A_0 = L_0^2$$

Error Absoluto ΔA

$$A = (L_0^2 \pm 2L_0\Delta L) Ud.$$

$$\Delta A = \frac{A_{Máx} - A_{mín}}{2} = \frac{(L_0 + \Delta L)^2 - (L_0 - \Delta L)^2}{2}$$

$$\Delta A = \frac{4L_0\Delta L + \cancel{2\Delta L^2}}{2} = 2L_0\Delta L$$

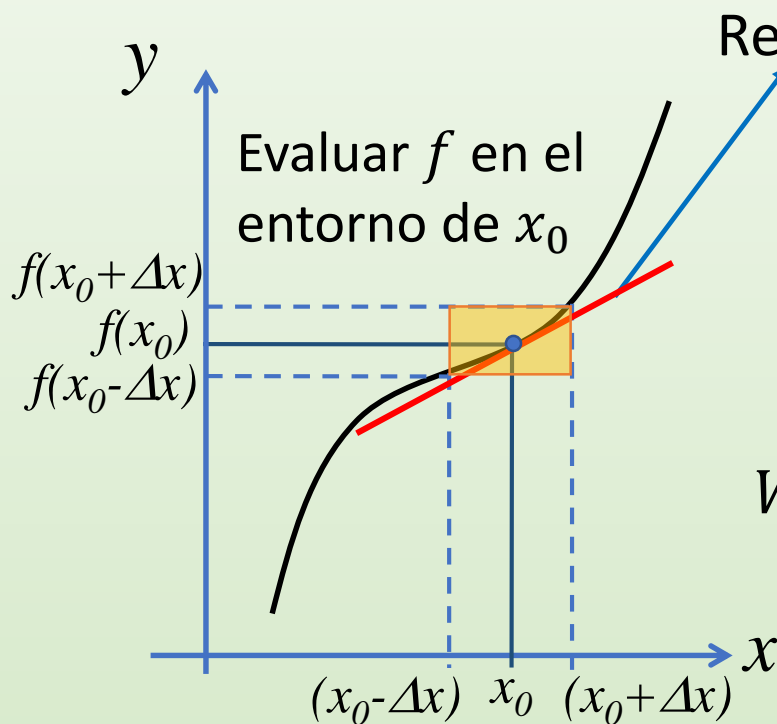
$$\Delta A = 2L_0\Delta L$$

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF W que depende de otra MF x

$$W = f(x)$$

$$W = (W_0 \pm \Delta W) \text{ Ud.}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) \text{ Ud.}$$



La pendiente será: $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}$

Desarrollo de Taylor:

$$W = f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}}_{\Delta x} (x - x_0) + \dots$$

$$W_0 = f(x_0)$$

$$\Delta W^2 = \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \right)^2 \Delta x^2$$

Ej. del Caso: W depende de otra MF x

AREA de un cuadrado

$$A = (A_0 \pm \Delta A) Ud.$$

$$A = L^2$$

$$L = (L_0 \pm \Delta L) Ud.$$

Valor más representativo

$$W_0 = f(x_0)$$



$$A_0 = f(L_0)$$

$$A_0 = L_0^2$$

Error Absoluto

$$\Delta W^2 = \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \right)^2 \Delta x^2$$



$$\Delta A^2 = \left(\left. \frac{dA}{dL} \right|_{L_0} \right)^2 \Delta L^2$$

$$\Delta A^2 = (2L_0)^2 \Delta L^2 \rightarrow \Delta A = 2L_0 \Delta L$$

RESULTADO del
AREA del cuadrado

$$A = L_0^2 \pm 2L_0 \Delta L$$

Ej. del Caso: W depende de otra MF x

AREA de un cuadrado

$$A = (A_0 \pm \Delta A) \text{ Ud.}$$

$$A = L^2$$

$$L = (15,3 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Valor más representativo

$$W_0 = f(x_0)$$



$$A_0 = f(15,3)$$

$$A_0 = 15,3^2 = 234,09 \text{ cm}$$

Error Absoluto

$$\Delta W^2 = \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \right)^2 \Delta x^2$$



$$\Delta A^2 = \left(\left. \frac{dA}{dL} \right|_{15,3} \right)^2 0,1^2$$

$$\Delta A^2 = (2 * 15,3)^2 0,1^2 \rightarrow \Delta A = 3,06 \text{ cm}$$

Expresión del Resultado
con 2 cifras significativas

$$A = (234,1 \pm 3,1) \text{ cm}$$

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF
 W que depende de DOS MF x, y

$$W = f(x, y)$$

$$W = (W_0 \pm \Delta W) Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y) Ud.$$

x, y son variables independientes

Desarrollo de Taylor

$$W = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$$

$x \approx x_0$
 $y \approx y_0$

Δx Δy

Derivada parcial respecto de la variable x

Derivada parcial respecto de la variable x , evaluada en x_0 e y_0

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF
 W que depende de DOS MF x, y

$$W = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) \right] + \dots$$

$$W_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \right)^2 \Delta y^2}$$

**DERIVADAS
 PARCIALES**

$$F = 2xy^2$$

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2y^2 & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, \dots} = 4x_0y_0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4xy & \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, \dots} = 2y_0^2 \end{array} \right\}$$

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$W = f(x, y, z, \dots) \longrightarrow W = (W_0 \pm \Delta W) Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y) Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z) Ud.$$

$$\vdots$$

$x, y, z \dots$ variables independientes

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{x_0, y_0, \dots}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{x_0, y_0, \dots}\right)^2 \Delta y^2 + \dots}$$

Casos comunes: Incerteza en MI que podemos aproximar

$$A = (A_0 \pm \Delta A) \text{ Ud.}$$

Sumas y Restas:

$$A = B + C$$

$$A_0 = B_0 + C_0$$

$$\Delta A = \Delta B + \Delta C$$

$$A = B - C$$

$$A_0 = B_0 - C_0$$

Multiplicación y División:

$$A = B * C$$

$$A_0 = B_0 * C_0$$

$$\varepsilon_{rA} = \varepsilon_{rB} + \varepsilon_{rC}$$

$$A = B / C$$

$$A_0 = B_0 / C_0$$

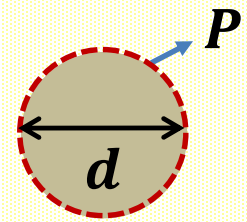
$$\varepsilon_{rA} = \varepsilon_{rB} + \varepsilon_{rC}$$

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\Delta A}{A_0} \right| \quad \text{Error Relativo}$$

ACTIVIDAD 1

- Determinar el valor de π del círculo medido la CLASE 1

Recuerden que siempre deben obtener el valor más representativo ($\bar{\pi}$) y su error absoluto ($\Delta\pi$).



$$P = \pi r^2$$

$$r = (r_0 \pm \Delta r) \text{ Ud.}$$

$$P = (P_0 \pm \Delta P) \text{ Ud.}$$

¿Y cómo obtengo r y Δr ?

$$r = \frac{d}{2}$$

Δr ?

Propagar el error de d

- Reportar el valor de π expresado con dos cifras significativas

OBTENER EL VOLUMEN DE UN OBJETO MEDIANTE DIFERENTES MÉTODOS

- Determinar el **volumen de un objeto mediante diferentes métodos**. Recuerden que siempre deben obtener el valor más representativo de V (\bar{V}) y su error absoluto (ΔV).

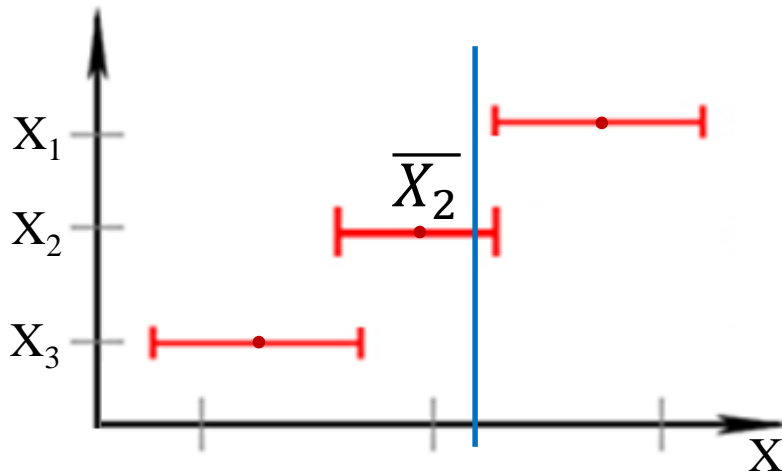
Posibles Métodos

1- A PARTIR DE SU GEOMETRÍA

2- SUMERGIENDO EL CUERPO EN AGUA

3- A PARTIR DE LA MASA Y LA DENSIDAD

¿Cómo comparo Resultados de una misma MF?



Precisión:

Se evalúan los intervalos de confianza (que es lo mismo que evaluar ΔX) de las diferentes medidas.

El resultado con menor valor de ΔX será el más preciso.

Para pensar

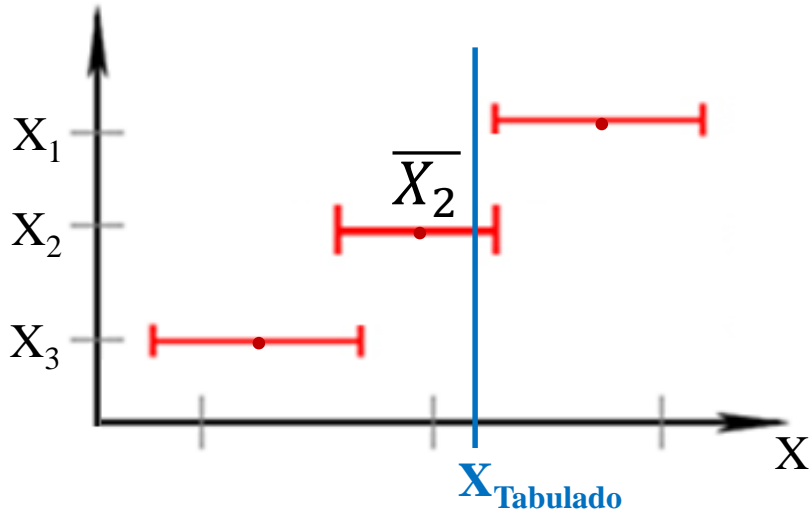
$$g_1 = 9,81 \pm 0,07$$

$$g_2 = 9,73 \pm 0,03$$

$$g_3 = 9,99 \pm 0,35$$

¿Qué resultado es más preciso?

¿Cómo comparo Resultados de una misma MF?



Exactitud:

Se evalúa la cercanía del valor más representativo (\bar{X}) de las diferentes medidas con el valor tabulado

El resultado con \bar{X} más cercano al X_{Tabulado} será el más exacto

Para pensar

$$g_1 = 9,81 \pm 0,07$$

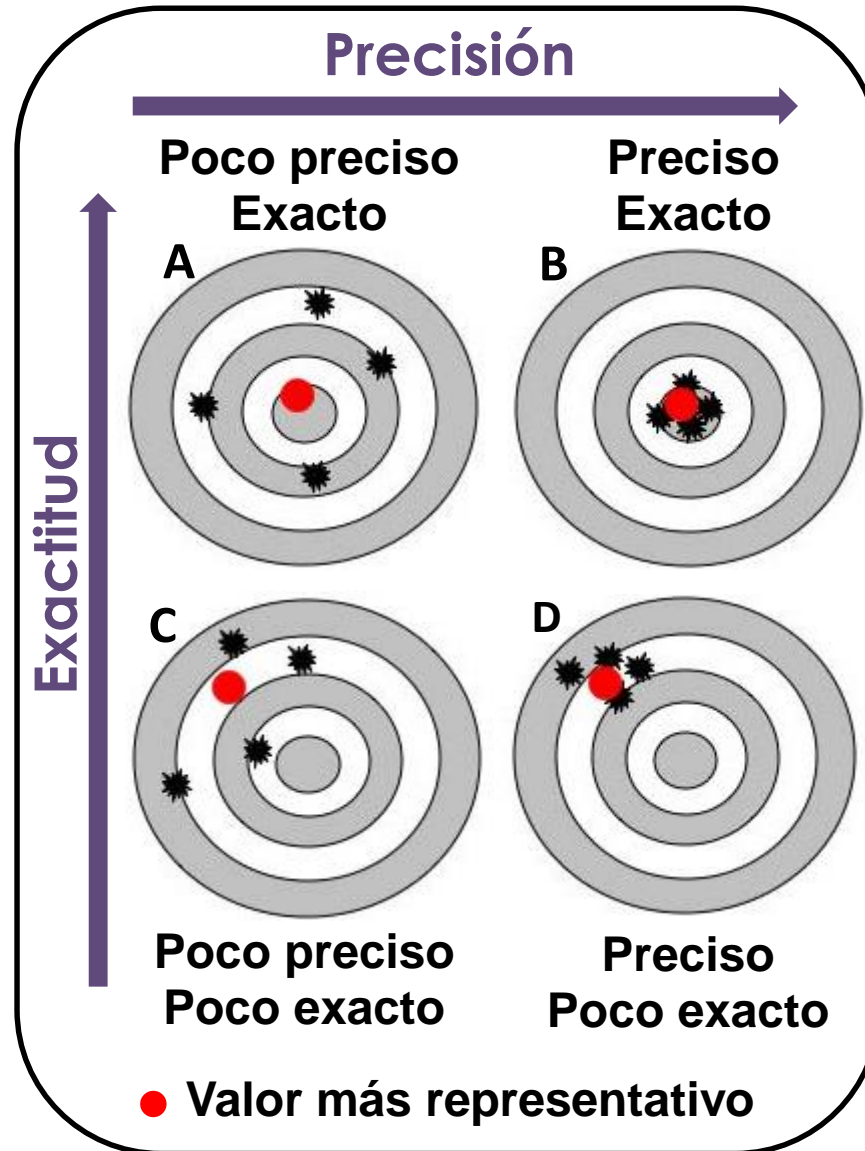
$$g_2 = 9,73 \pm 0,03$$

$$g_3 = 9,99 \pm 0,35$$

¿Qué resultado es más exacto?

¿Cómo comparo Resultados de una misma MF?

Exactitud y Precisión



¿Cómo comparo Resultados de diferentes fenómenos Físicos?

¿Puedo comparar resultados de diferentes fenómenos Físicos?

Sí, pero ...

- *No puedo usar diferencias Significativas*
- *No puedo usar exactitud*
- *Puedo usar precisión!! Pero NO puedo comparar ΔX con ΔY*

Error
Relativo

$$\epsilon_r = \left| \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right|$$

Precisión:

Se evalúan los errores relativos de las diferentes MF.

Error
Relativo
Porcentual

$$\epsilon_{r\%} = \left| \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right| \cdot 100$$

El resultado con menor ϵ_r será el más preciso.

Preguntas frecuentes

¿Cómo sabemos si una medición es confiable?

Debemos cuestionarnos sobre: el método, instrumento, objeto, observador...

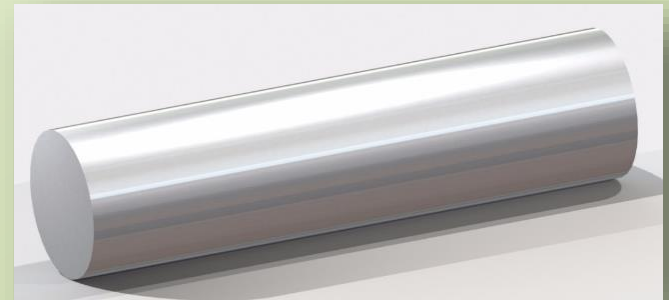
EVALUAR LAS HIPÓTESIS EMPLEADAS!!

Instrumento para determinar masas



Balanza de precisión

Uso la densidad del material tomado de la literatura



Barra de aluminio

¿Es aluminio puro?

**INFORME EN CAMPUS
MIERCOLES 26 HASTA LAS 14 HS**

ELABORACIÓN DE INFORMES

Formato

[Plantilla Informe de Laboratorio](#)

[Como se escribe un informe de Laboratorio, Ernesto Martinez](#)

- ❖ **Título**
- ❖ **Autores, mails, nombre de la comisión**
- ❖ **Resumen**
- ❖ **1. Introducción**
- ❖ **2. Desarrollo experimental**
- ❖ **3. Resultados y discusión**
- ❖ **4. Conclusiones**
- ❖ **Apéndice**
- ❖ **Referencias**

→ **Las Ecuaciones:** van numeradas entre paréntesis y centradas

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \quad (1)$$

→ **Referencias:** se citan en el texto entre corchetes [], numeradas y luego se colocan en la sección Referencias

Probablemente la gigante roja más famosa sea Betelgeuse la cual se puede ver directamente sin ayuda de instrumentos, su diámetro es del tamaño de la órbita del planeta Júpiter y se localiza en la constelación de Orión a 310 A.L. de la Tierra [3].

→ **Figuras:** numeradas, citadas en el texto. Con una leyenda debajo de la figura. Todos los Gráficos, fotos, dibujos, ... SON FIGURAS

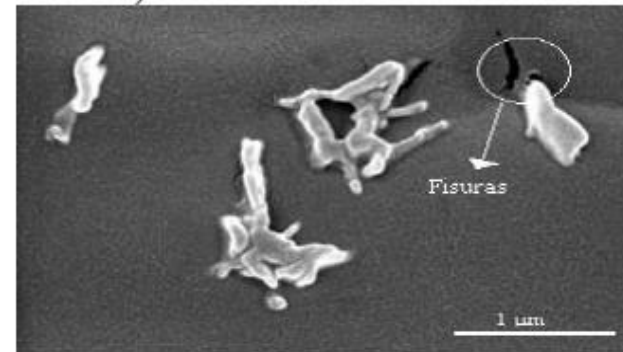


Figura 2. Micrografías SEM de la superficie de fractura del material compuesto con polvo de ajo. Aumento 20000X.

Tabla 8. Composiciones de mezclas

Nº	Almidón (%)	Glicerina (%)	Agua (%)
1	80	0	20
2	80	10	10
3	80	15	5
4	80	20	0

→ **Tablas:** numeradas, citadas en el texto. La leyenda va arriba de la Tabla

Tablas y Figuras se numeran en forma independiente

- **Título**
- **Nombres** de los autores, **dirección** de mails de los autores, nombre de la **comisión**

<p style="text-align: center;">Título del trabajo</p> <p style="text-align: center;">Nombre1 Apellido1, Nombre2 Apellido2, Nombre3 Apellido3</p> <p style="text-align: center;">mail@integrante1, mail@integrante2, mail@integrante3</p> <p style="text-align: center;"><i>Laboratorio 1 2°C. 2020 – Miércoles 14 - 20 hs.</i></p> <p style="text-align: center;"><i>Departamento de Física, <u>FCEyN</u>, UBA</i></p>
--

- **Resumen**

Un **Resumen** que en forma breve describa cuál es el objetivo del trabajo, cómo se llevó a cabo y qué resultó de la experiencia (suele tener alrededor de 100-200 palabras).

NO VAN: Eq., Fig., Tablas, Referencias

1. Introducción

Las herramientas para comprender el marco teórico de la experiencia. Ecuaciones que se utilizarán. Citas bibliográficas. Figuras o Tablas teóricas.

Al final de la introducción indicar, en forma clara y concisa, el **objetivo** de la práctica.

¿Qué podría ir en la Introducción de este informe?

→ Medición indirecta concepto general, Eq. del valor más representativo y de la incerteza general. Descripción de los métodos de comparación de resultados (sólo los que usan).

Último párrafo:

El objetivo de este trabajo consistió en

2. Desarrollo experimental

Se describe el sistema experimental y la metodología usada para llevar a cabo el experimento. El instrumental utilizado y su precisión, y la forma de obtener las incertezas de las variables empleadas.

Se incluye una figura que represente el dispositivo experimental. Se describe en la figura qué es cada cosa!

Se cuenta qué análisis realizó y con qué programa. NO especifique cálculos intermedios ni coloque resultados.

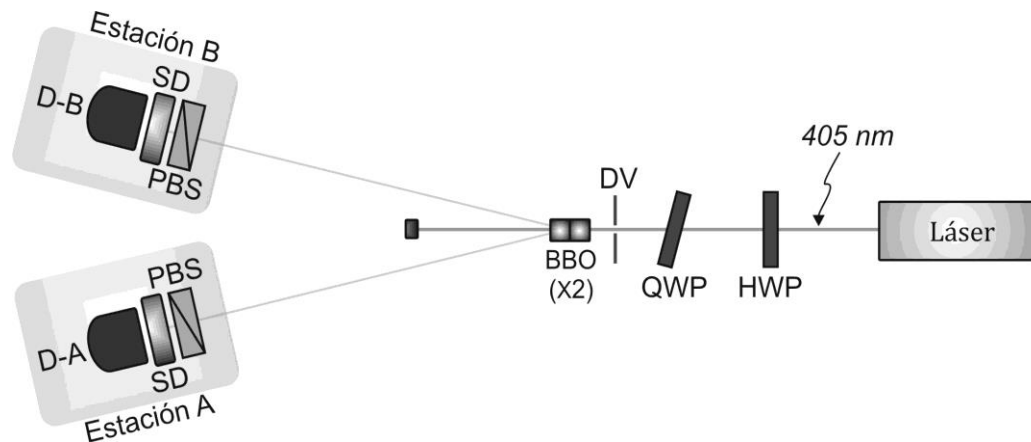


Figura 1. Esquema de LEYENDA.

2. Desarrollo experimental ¿Qué podría ir en este informe?

- **Describir** el objeto y los **3 métodos** empleados para obtener el Volumen. Colocar las fórmulas de cada caso. **No poner cuentas intermedias.**

Aclarar cómo se midió cada variable independiente brevemente: con qué instrumento y **la precisión** del instrumento.

- Incluir una figura/foto que represente el objeto que midieron con la leyenda debajo. NO coloquen fotos o esquemas de balanza, calibre, probeta, etc... se toman como conocido.

3. Resultados y discusión

Se deben incluir los resultados obtenidos y la discusión de los mismos. Incluye figuras, y/o tablas para comparación de resultados. Debe estar acompañado de texto antes de mostrar los resultados y luego conteniendo la discusión de los mismos.

NO colocar cuentas intermedias

3. Resultados y discusión

¿Qué podría ir en este informe?

→ Muestren la **figura** de los resultados de V . **NO colocar la tabla de datos de las variables medidas ni escribir los valores de V en el texto!**

→ **Discusión de la figura.**

Comparación de resultados: diferencias significativas, precisión y confianza de los métodos.

→ **Discutir las fuentes de incertezas** que condujeron a estos comportamientos.

→ Analizar **cómo influye el error absoluto** de cada variable independiente (x, y, \dots) en la **incerteza absoluta de V**

→ **NO** colocar las cuentas intermedias de propagación en el texto (Colocarlas en un Apéndice para que veamos que aprendieron).

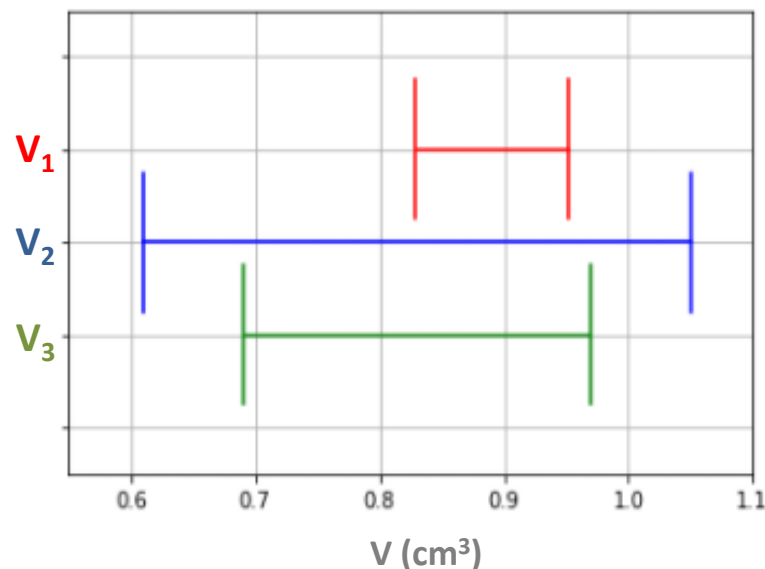


Figura 2. Leyenda

- **4. Conclusiones**

Se describen las conclusiones del trabajo, relacionadas con los objetivos y lo observado en el experimento.

- **Apéndice**

Información complementaria para mejorar la comprensión de algún concepto, que en el cuerpo principal del informe distraerían la atención del lector. En este caso, les pedimos que coloquen las cuentas de propagación de errores.

- **Referencias**

Numeradas y entre corchetes. Siempre estar citadas en el texto

[1] Y. Shen, *The principles of nonlinear optics*, John Wiley and Sons, USA (2003).

[2] D. Baird, *Experimentación*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1991).

[3] M. Alonso, E. J. Finn, *Física Vol. I: Mecánica*, Fondo Educativo Interamericano, México (1986).

[4] Oriel Instruments. URL:<http://ecee.colorado.edu/~mcleod/pdfs/AOL/labs/10030.pdf>