REPASO

¿Varían $\overline{x}$, S, σ_e con la variación de N?

Generalizando … Si tomo N medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones:

$\overline{x}$ NO debería depender de N

S NO debería depender de N

σ_e SÍ depender de N

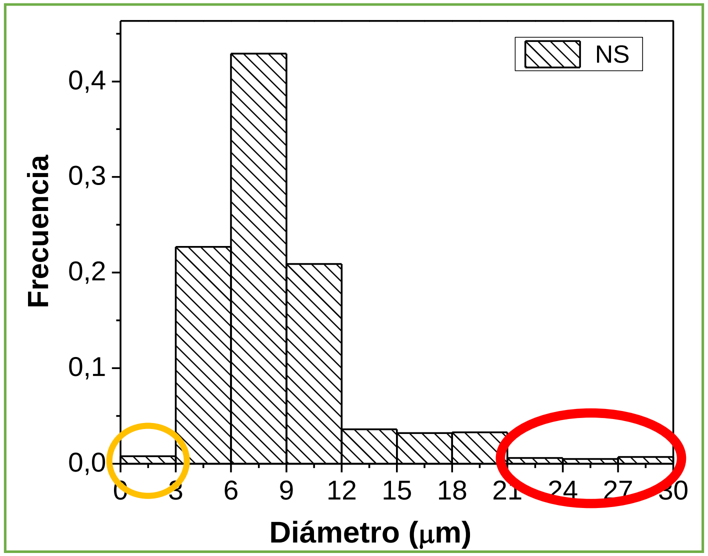
¿Varían $\bar{x}$, S, σ_e con la variación de N, cómo varía?

¿Qué representa S en un experimento, con qué se relaciona?

¿Cuál es la probabilidad que una nueva medición se encuentre en el intervalo de confianza $\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$?

¿Cuándo empleo como error S y cuándo el error de la media σ_e?

¿Hay datos que puedo descartar?



En Laboratorio 1 podremos descartar datos que sean mayores a $3S$.

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2023

MODELADO - CUADRADOS MÍNIMOS

Lucía Famá, Germán Patterson,
Lucia Novacovsky,
Luciana Martínez, Anael Zurdo

Objetivo de la clase de hoy

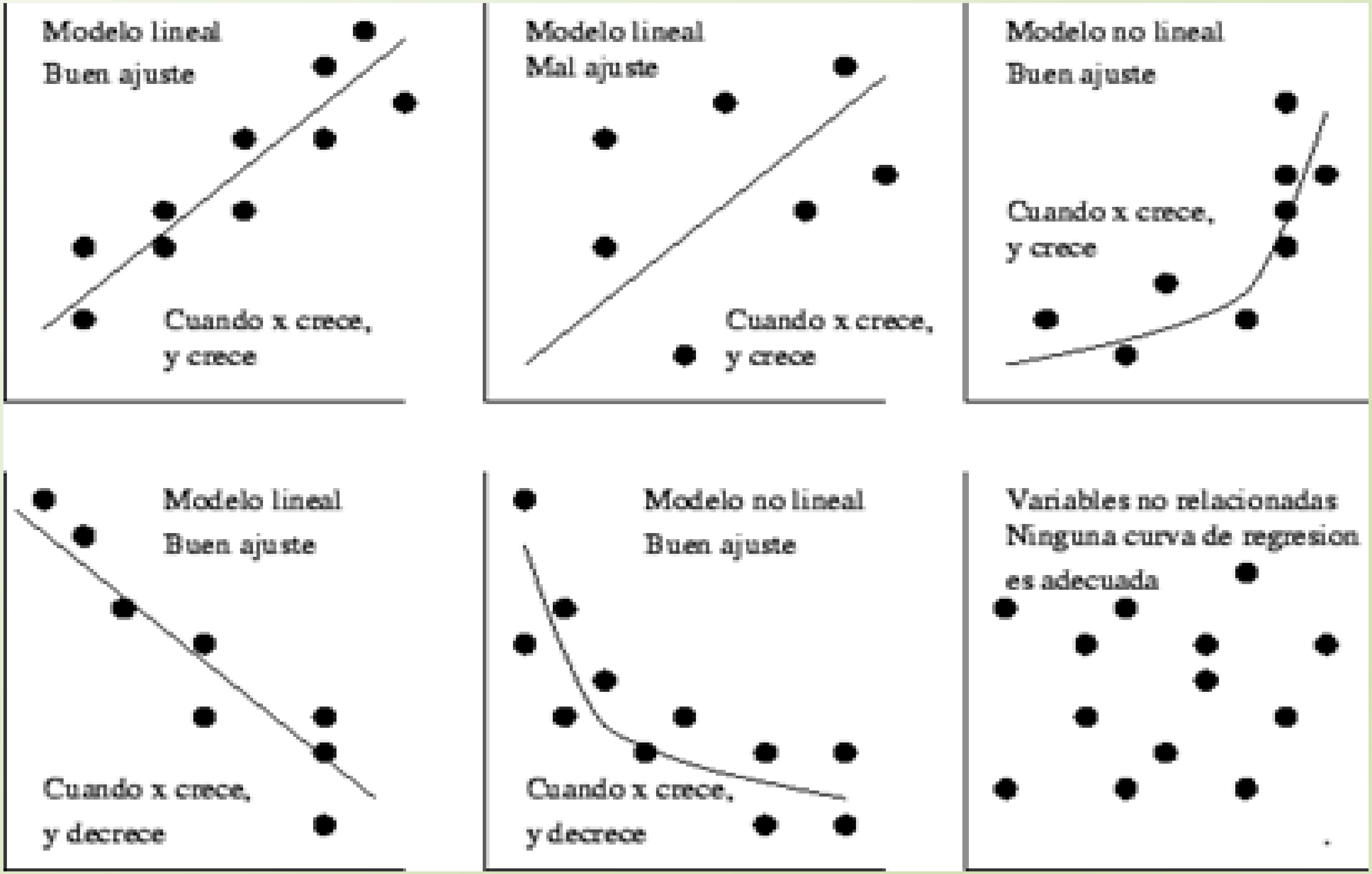
Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

Objetivo de la práctica de hoy y …. Cómo resolverlo

Determinar el valor de π a partir de los datos del Perímetro y Diámetro de diferentes superficies circulares y el uso de UN MODELO del MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

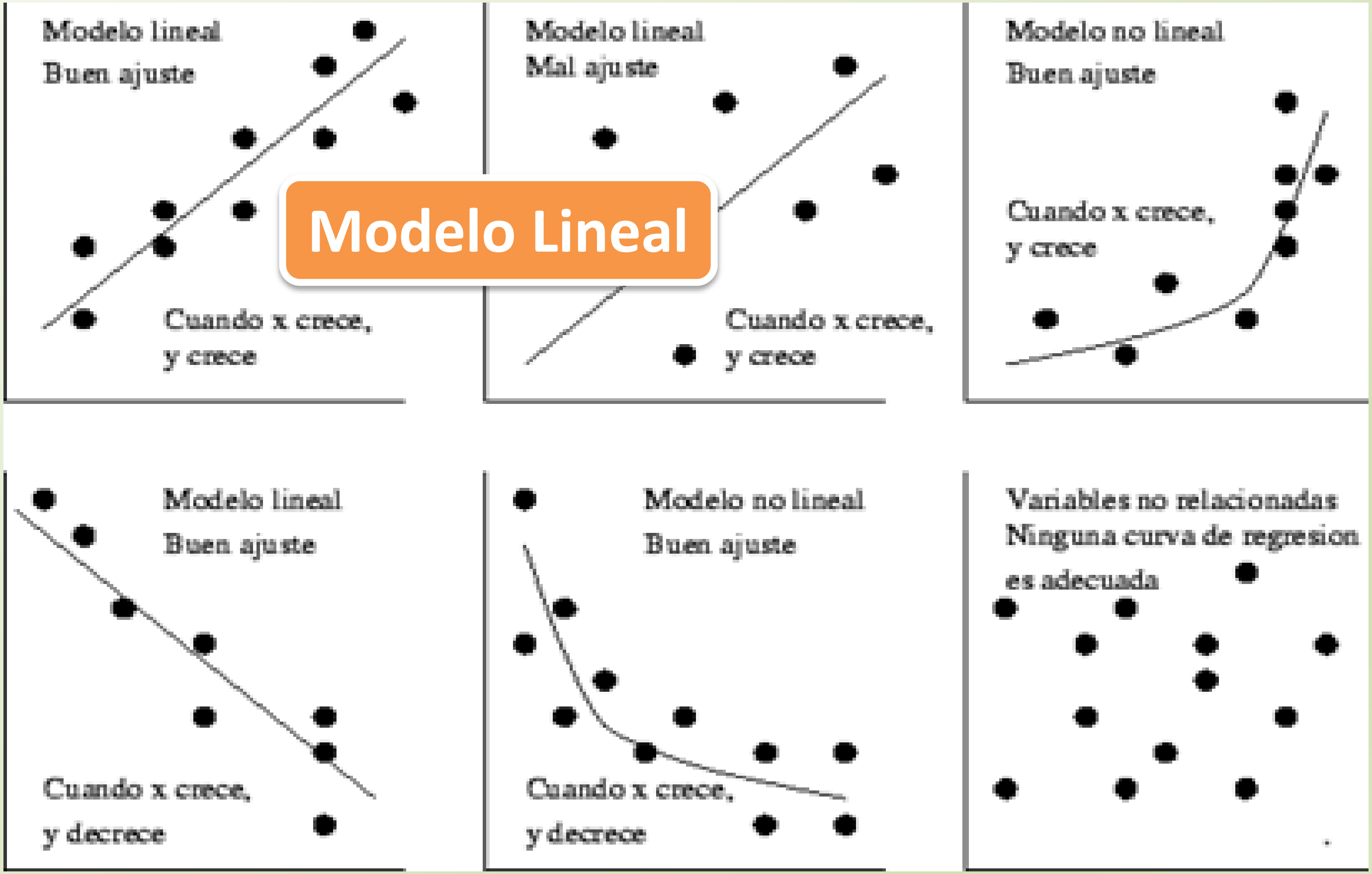
Cuadrados Mínimos

Relación entre dos variables usando un Modelo Matemático



Cuadrados Mínimos

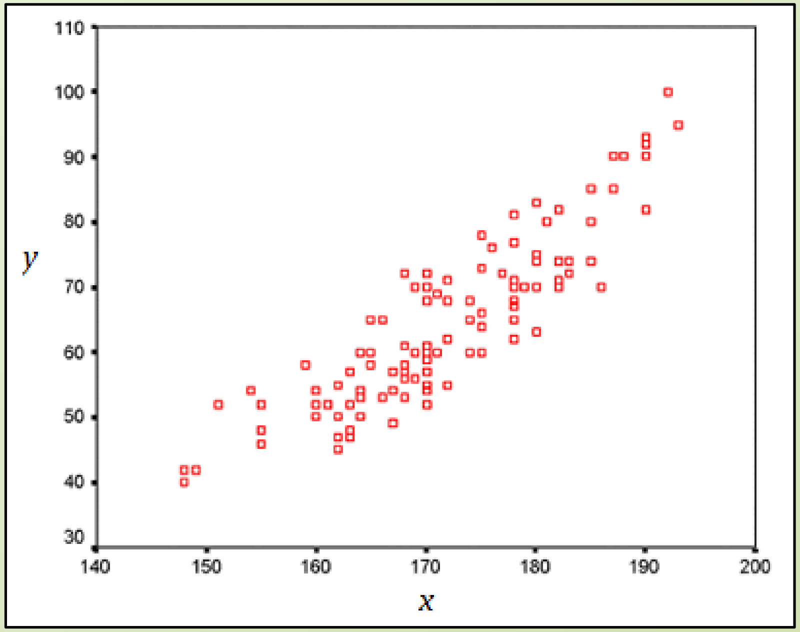
Relación entre dos medidas … caso más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

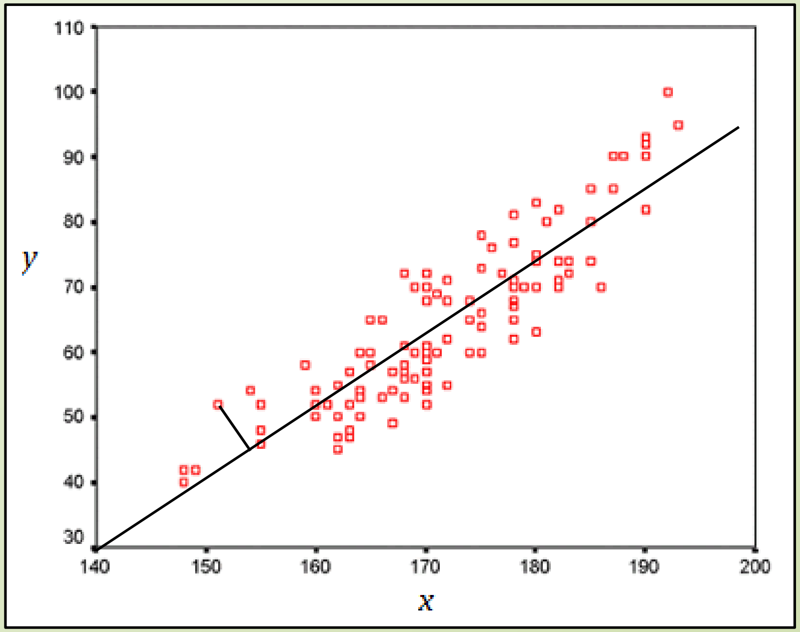
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos experimentales

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas **(x_i, y_i)**



Partamos asumiendo que la relación es:

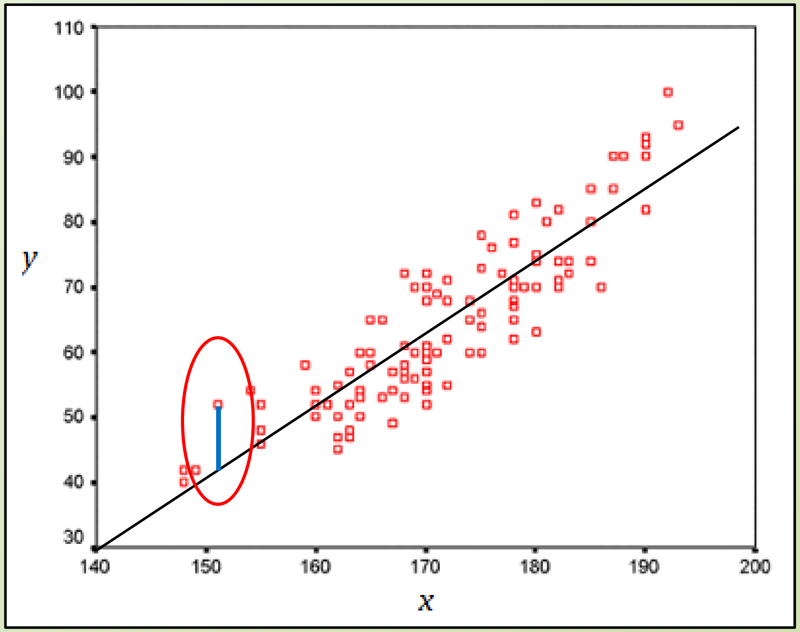
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso aún más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros *m* y *b* que minimicen la distancia de los datos al modelo

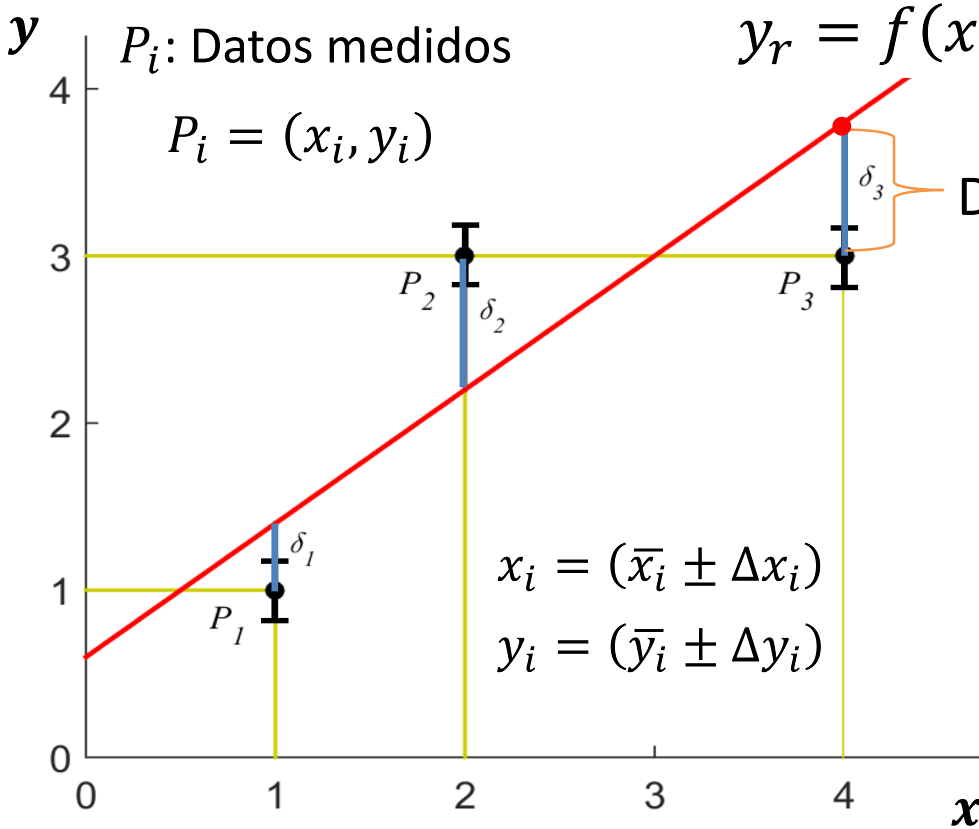
Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso aún más sencillo: Considerando la **Distancia en "y"**

P_i: Datos medidos

$P_i = (x_i, y_i)$

$y_r = f(x) = mx + b$



Distancia ➡ Residuos (δ_i)

$x_i = (\bar{x}_i \pm \Delta x_i)$

$y_i = (\bar{y}_i \pm \Delta y_i)$

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|$$

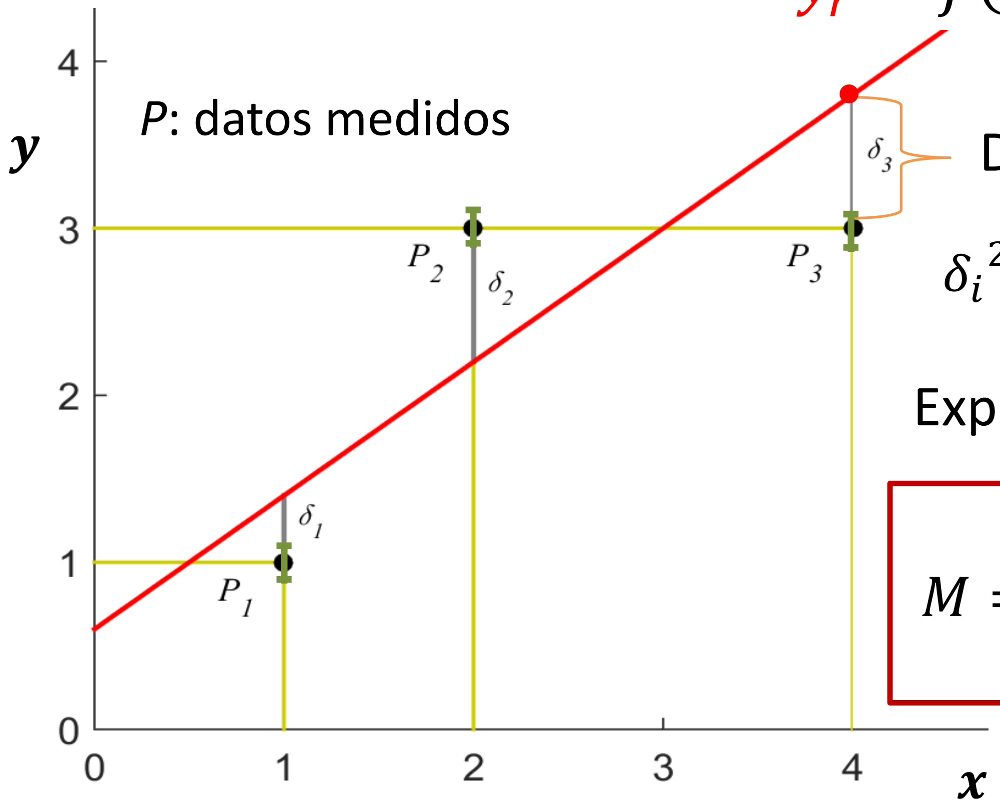
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Distancia ➡ Residuos (δ_i)

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Experimental   Recta

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(a,b) = \sum_i {y_i}^2 + a^2 \sum_i {x_i}^2 + N b^2 + 2ab \sum_i x_i - 2a \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \sum_i {x_i}^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ 2Nb + 2a \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

¿Y los errores de m y b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*

Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

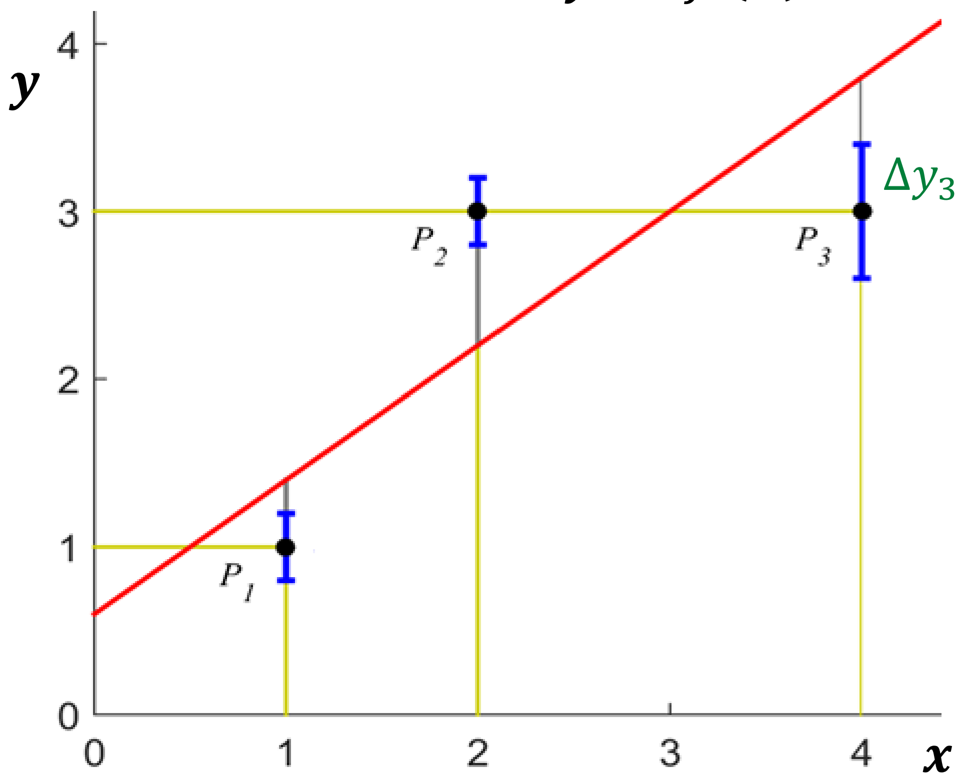
Hipótesis: Consideremos a la incerteza como los residuos: δ_i

Caso 2

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$

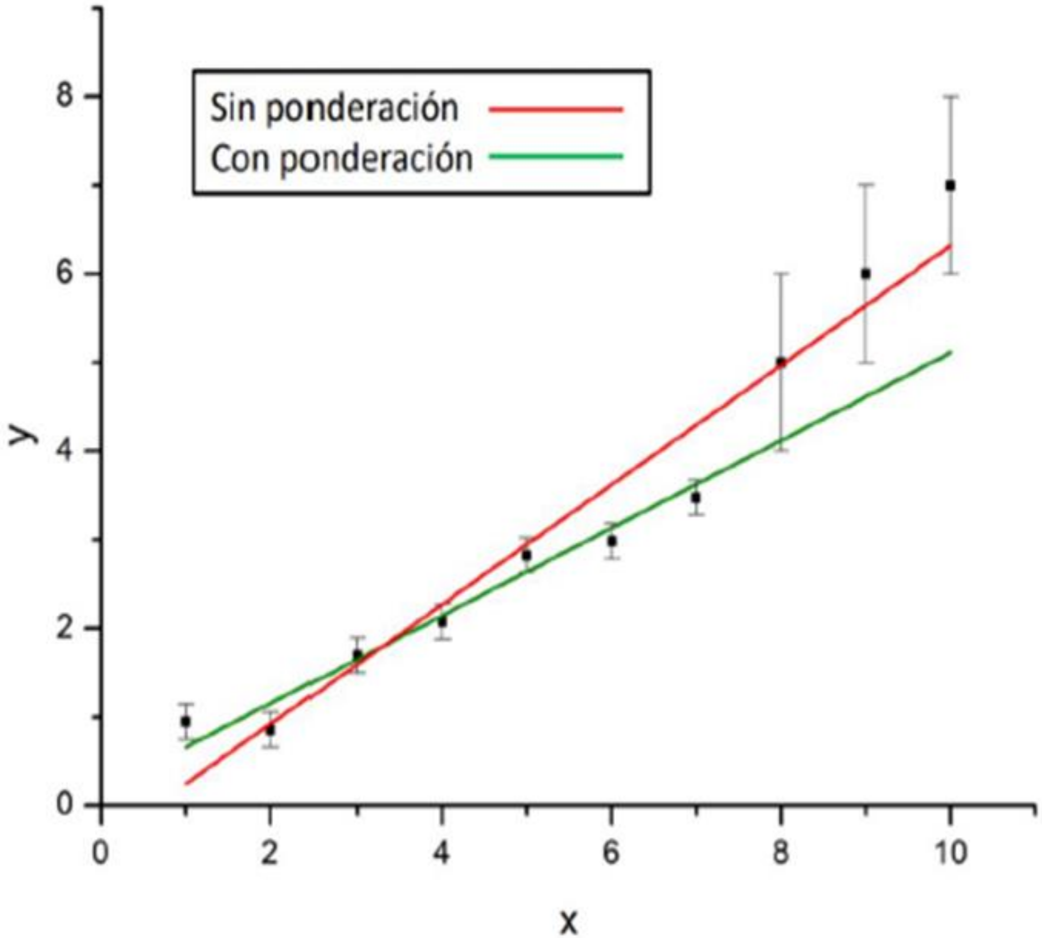


Hipótesis: **Considera a las medidas más precisas las más relevantes**

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos
Normalizados al error de cada medida

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

EXPERIMENTO

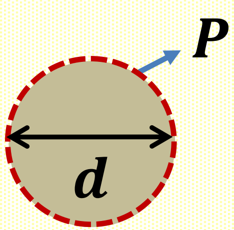
Exp. 5

ACTIVIDAD 1
CUADRADOS MÍNIMOS

CALCULAR EL VALOR DE π A PARTIR DEL PERÍODO DE LA MEDICIÓN DEL PERÍODO Y DEL DIÁMETRO DE DIFERENTES SUPERFICIES CIRCULARES Y UTILIZANDO UN MODELO

CÓMO SE RELACIONAN P y d?

$$\boxed{P = 2\pi r}$$



- Determinar P y D **de 10-12 círculos** diferentes (2 cm hasta lo máximo que puedan!)
- Calcular los ε_r **de** P **y de** D
- Graficar P **en función de**D (o D **en función de** P **según los** ε_r) con las **incertezas en Y**).
- **Discutir:** *¿Qué forma parece tener la función?*

ACTIVIDAD 1
CUADRADOS MÍNIMOS

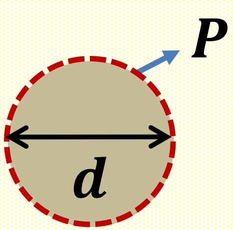
EXPERIMENTO

Exp. 5

CALCULAR EL VALOR DE π A PARTIR DEL PERÍODO DE LA MEDICIÓN DEL PERÍODO Y DEL DIÁMETRO DE DIFERENTES SUPERFICIES CIRCULARES Y UTILIZANDO UN MODELO

CÓMO SE RELACIONAN P y d?

$$\boxed{P = 2\pi r}$$



- Realizar un ajuste usando un modelo lineal:

$$y = mx + b$$

¿Utilizaría el modelo ponderado o no?

¿Tiene sentido físico $b \neq 0$?

- Obtener $\boldsymbol{\pi} = (\bar{\boldsymbol{\pi}} \pm \Delta\boldsymbol{\pi})\ \boldsymbol{Ud.}$ a partir del uso de un **modelo lineal del método de cuadrados mínimos**.

ACTIVIDAD 2
COMPARACIÓN DE RESULTADOS

EXPERIMENTO

Exp. 5

- Comparación de π. Comparar los resultados π obtenido en forma indirecta la Clase pasada con el obtenido mediante el modelo lineal del método de cuadrados mínimos.

✓ *¿Presenta diferencias significativas entre sí?*

✓ *¿Qué resultado es más preciso? ¿A qué cree que se deba?*

✓ *¿Cuál el más exacto?*

✓ *¿Qué método considera más confiable y por qué?*

EXPERIMENTO

Exp. 5

COLOCAR EL GRÁFICO, EL RESULTADO DE π Y LA DISCUSIÓN DE LAS ACTIVIDADES EN EL CAMPUS DURANTE LA CLASE

Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

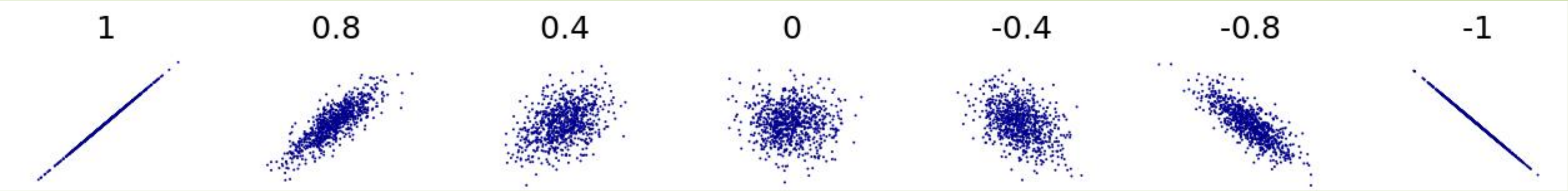
$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$-1 \leq r \leq 1$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$



El coeficiente de correlación de Pearson se puede calcular en Python usando:

corrcoef() método de Numpy

Parámetros de BONDAD

Chi cuadrado reducido (χ_v^2)

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Chi cuadrado reducido ⇒ $$\chi_v^2 = \frac{\chi^2}{N-2}$$

Caso lineal:

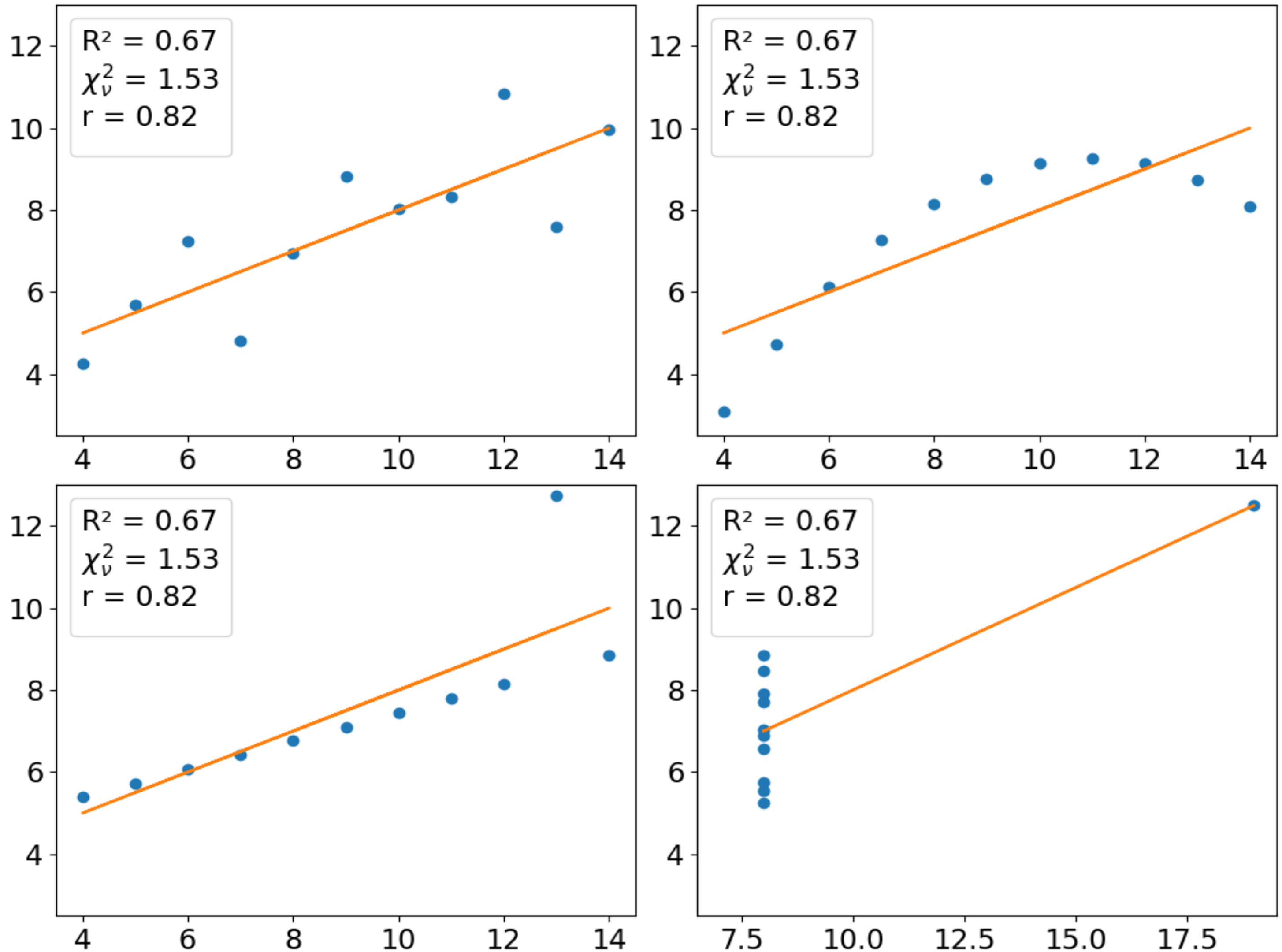
N = número de datos

2: los grado de libertad

Se espera que χ_v^2

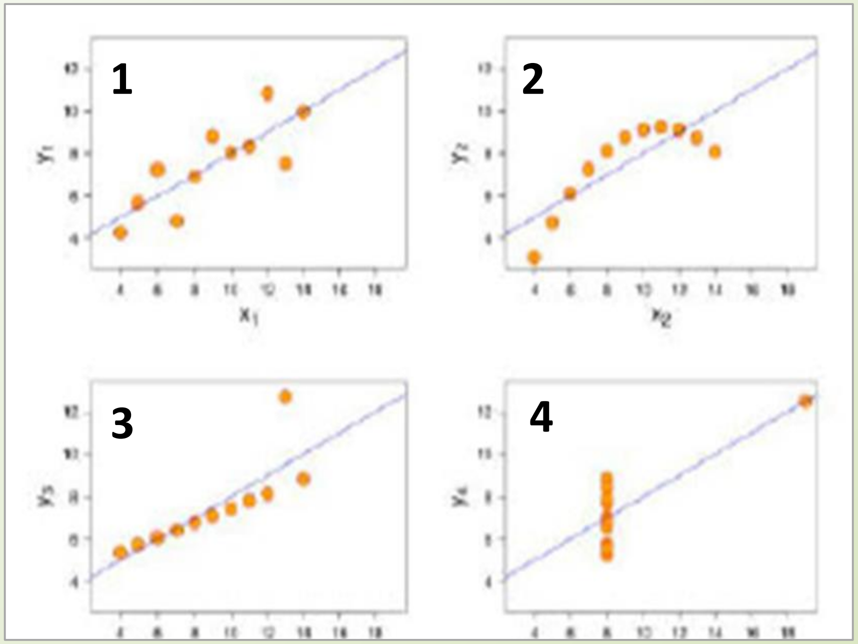
$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi_v^2 \sim 1} \\ \boldsymbol{\chi_v^2 \ll 1} \\ \boldsymbol{\chi_v^2 \gg 1} \end{cases}$$

Pero **OJO!!!!** Estos ejemplos tienen igual valor de R^2, r, χ_v^2



Parámetros de BONDAD

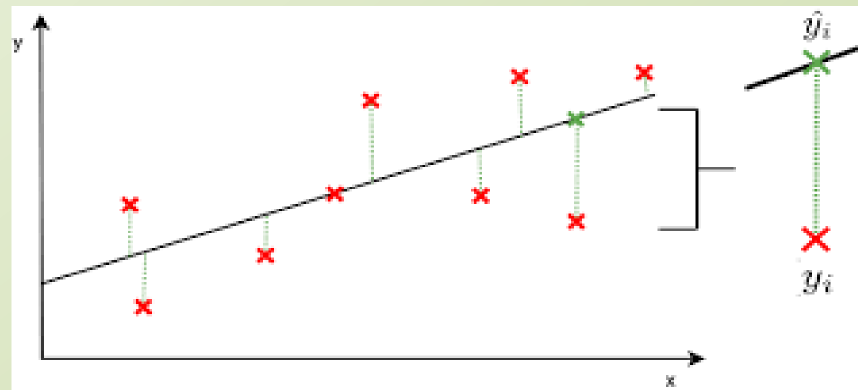
Tienen igual r

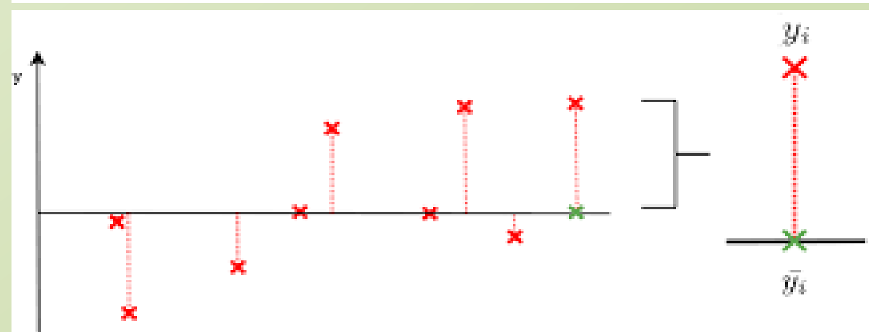


Necesito evaluar algo Más!!

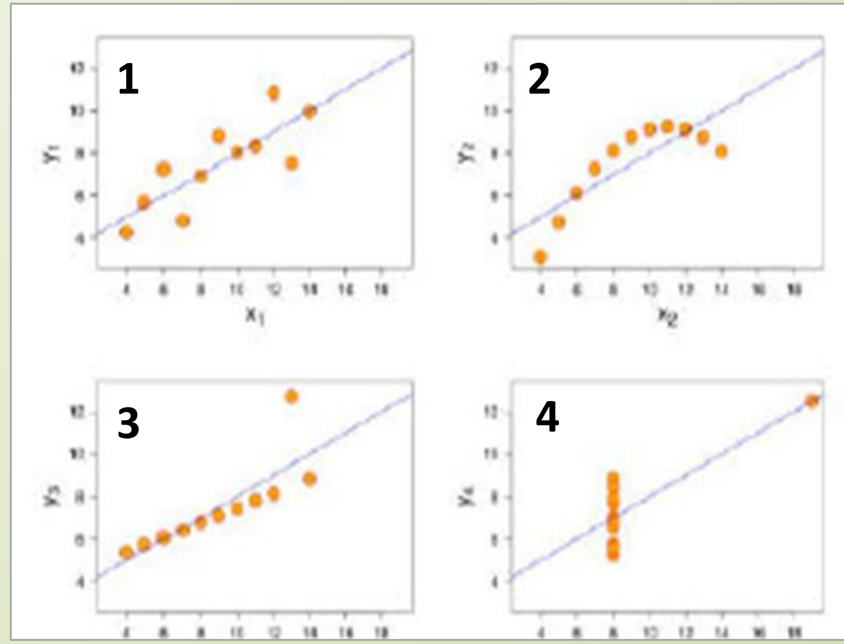
Residuos

Distancia de los puntos experimentales a la recta, en “y”



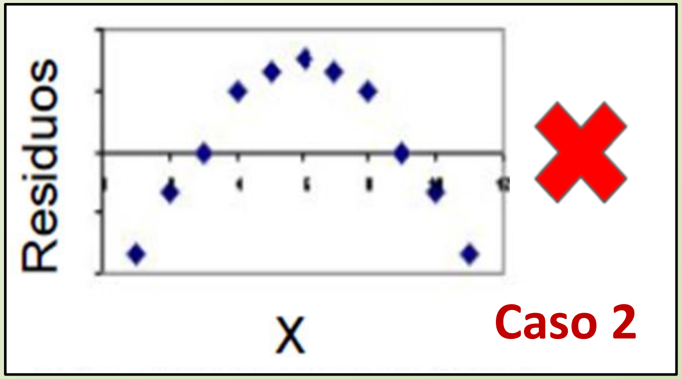


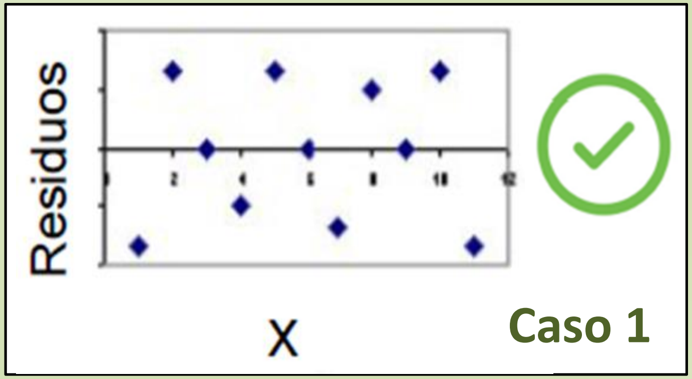
Los residuos NO DEBEN tener ESTRUCTURA



Residuos

En los casos 2, 3 y 4 la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal. **Los residuos tienen estructura**





Parámetros de BONDAD

¿Qué esperamos?

Parámetros e BONDAD que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson r ⇒ $|r| \sim 1$

Chi-cuadrado reducido χ_v^2 ⇒ $\chi_v^2 \sim 1$

Residuos Sin ESRUCTURA ⇒