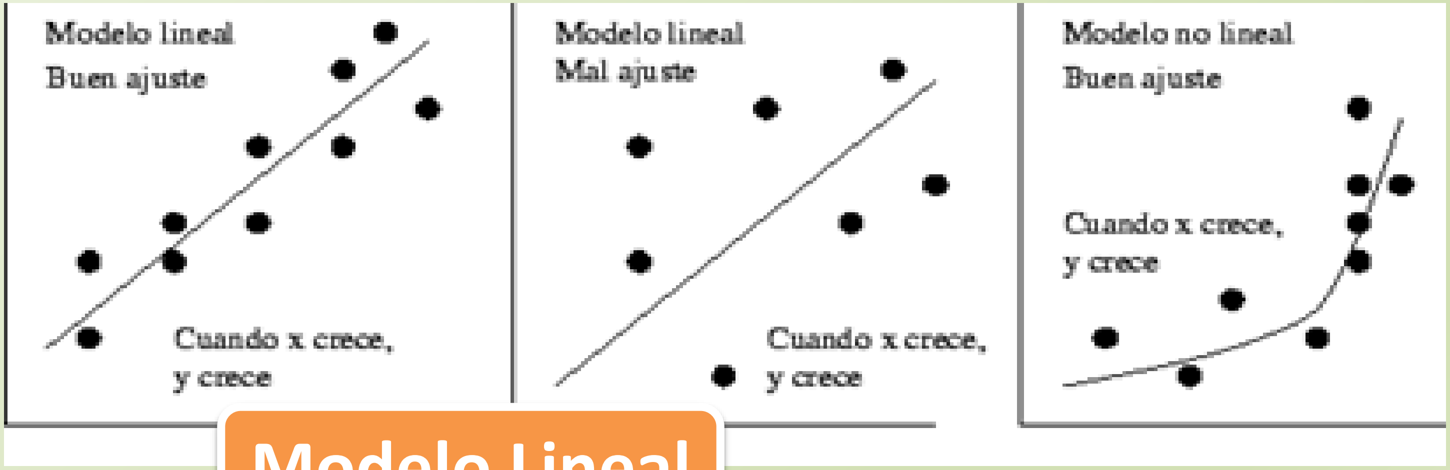
REPASO

CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre dos medidas:

Empleo un modelo que mejor relacione las variables (que mejor aproxime a mis datos experimentales)

Caso más sencillo:

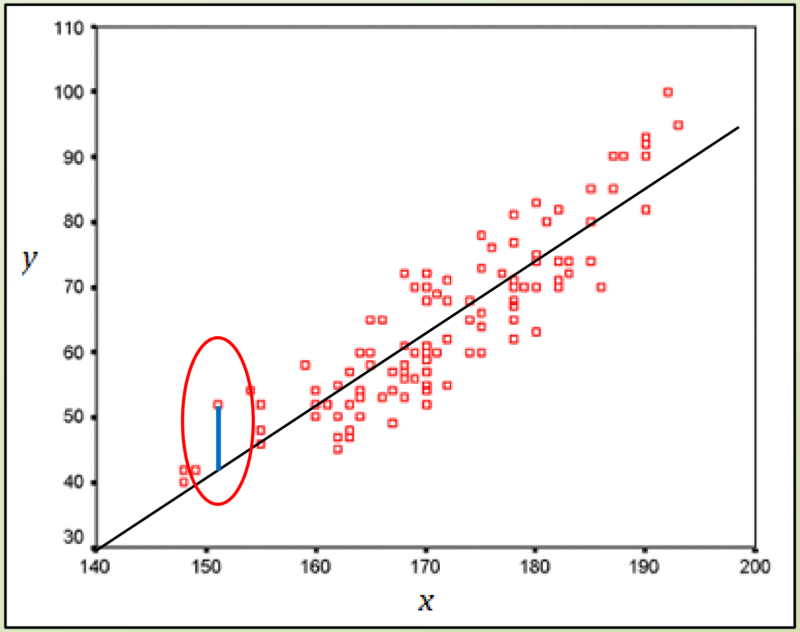


Modelo Lineal

Caso aún más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos experimentales al modelo sólo en el eje "y"

CUADRADOS MÍNIMOS

***BUSCO** un modelo **que** mejor aproxime a mis datos experimentales…*

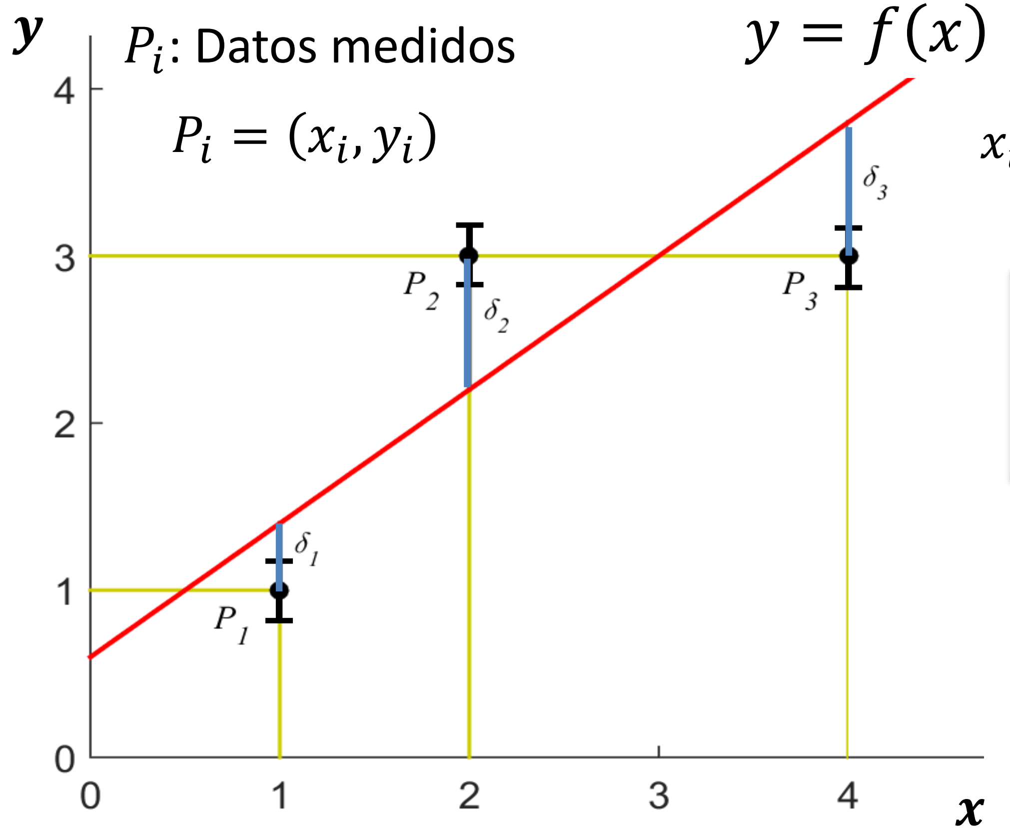
Caso aún más sencillo: Considerando la Distancia en "y"

P_i: Datos medidos

$$P_i = (x_i, y_i)$$

$$y = f(x) = mx + b$$

$$x_i = (\overline{x_i} \pm \Delta x_i) \qquad y_i = (\overline{y_i} \pm \Delta y_i)$$



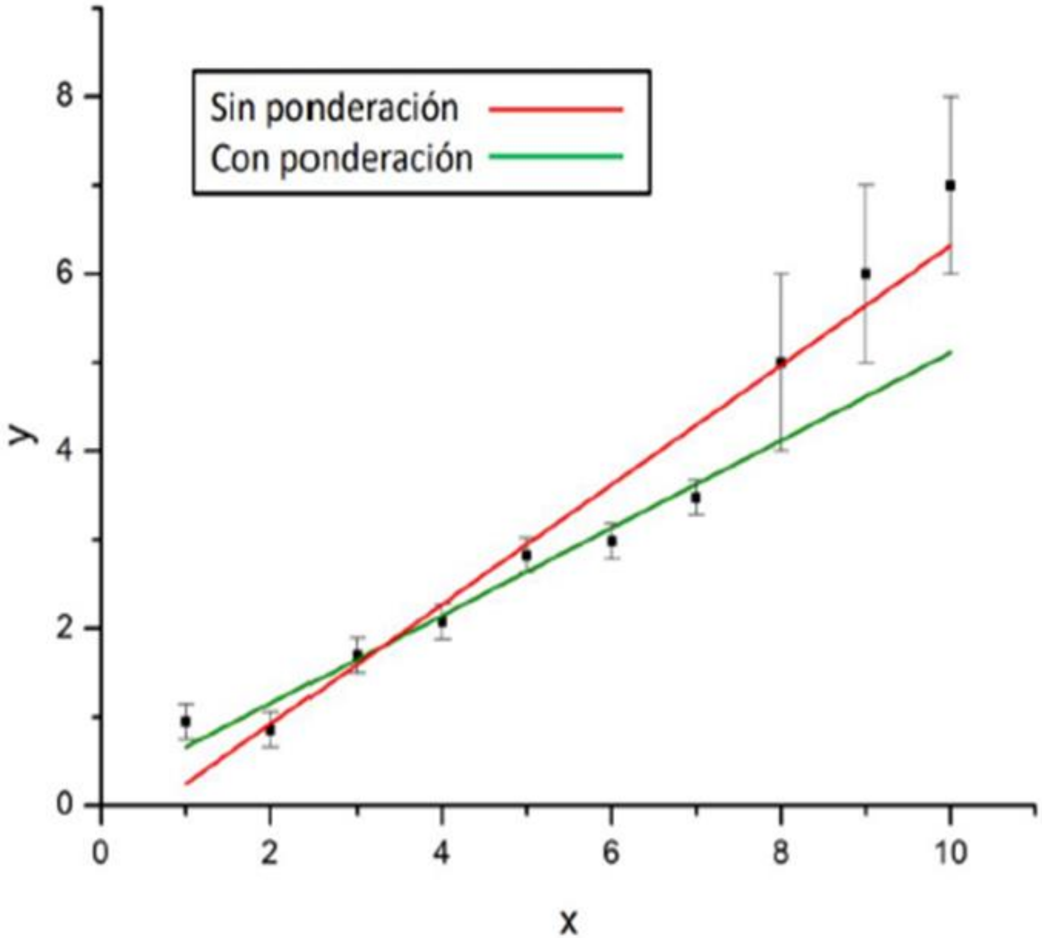
Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left| \frac{\Delta y}{\overline{y}} \right|$$

D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

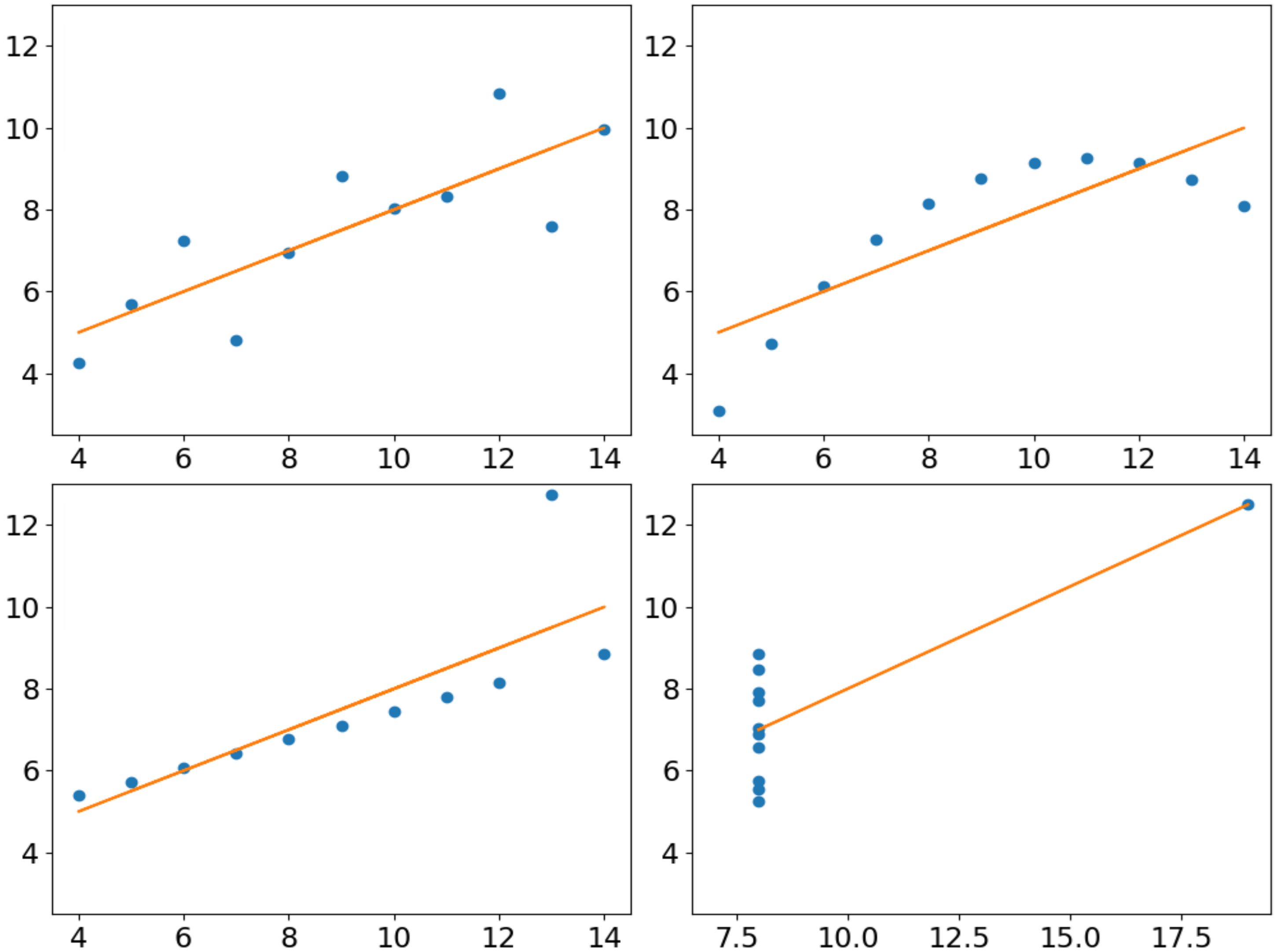
$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

OJO!!!! NO siempre un modelo lineal es el adecuado



Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

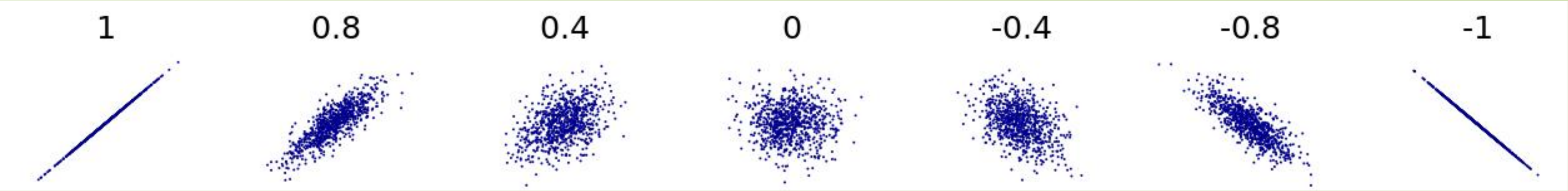
$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{-1 \leq r \leq 1}$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$



El coeficiente de correlación de Pearson se puede calcular en Python usando:

corrcoef() método de Numpy

Parámetros de BONDAD

Chi cuadrado reducido (χ_ν^2)

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Chi cuadrado reducido $\Rightarrow$ $\chi_\nu^2 = \dfrac{\chi^2}{N-2}$

Caso lineal:

N = número de datos

2: los grado de libertad

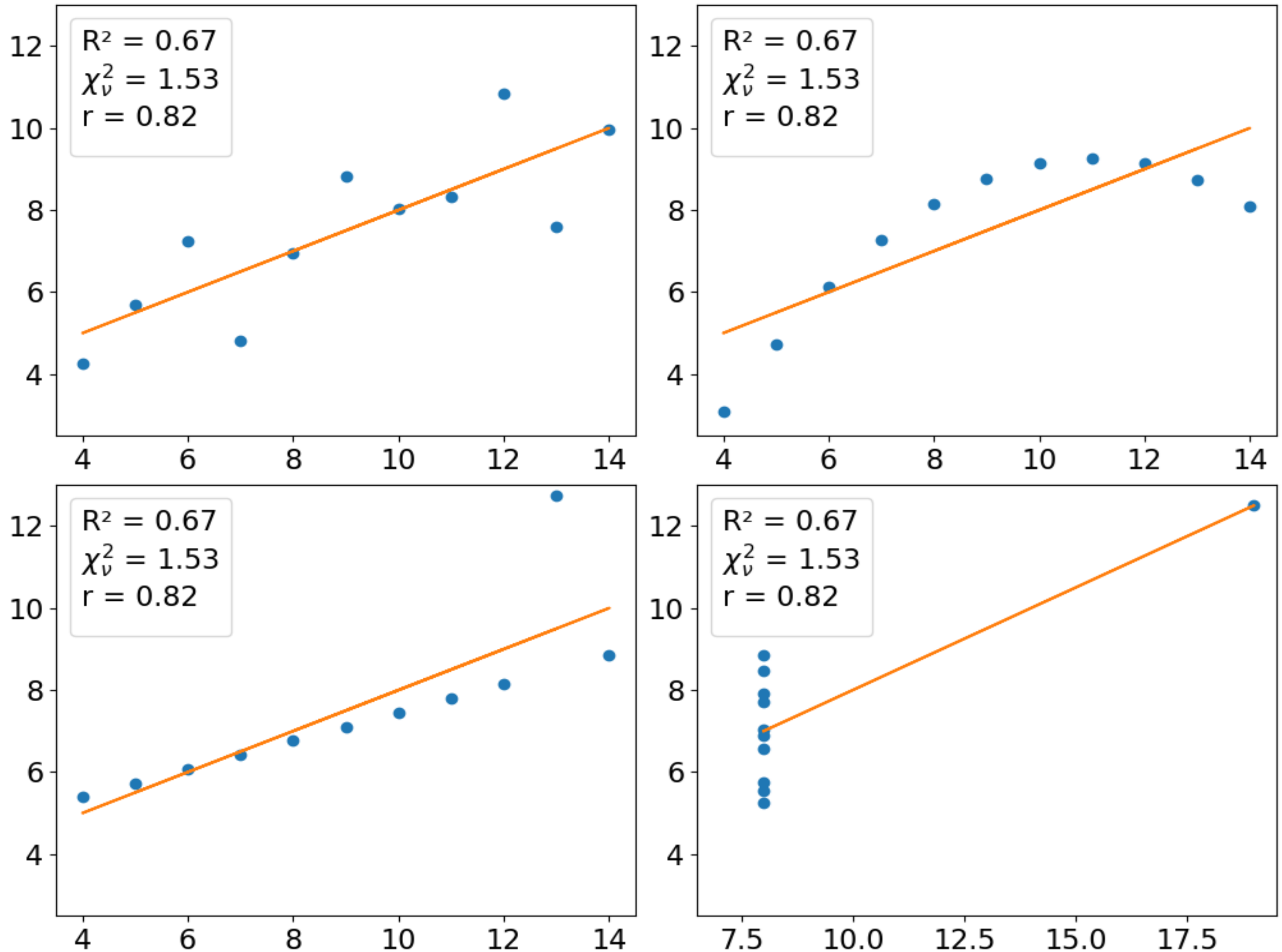
Se espera que χ_ν^2

$$\chi_\nu^2 \sim 1$$

$$\chi_\nu^2 \ll 1$$

$$\chi_\nu^2 \gg 1$$

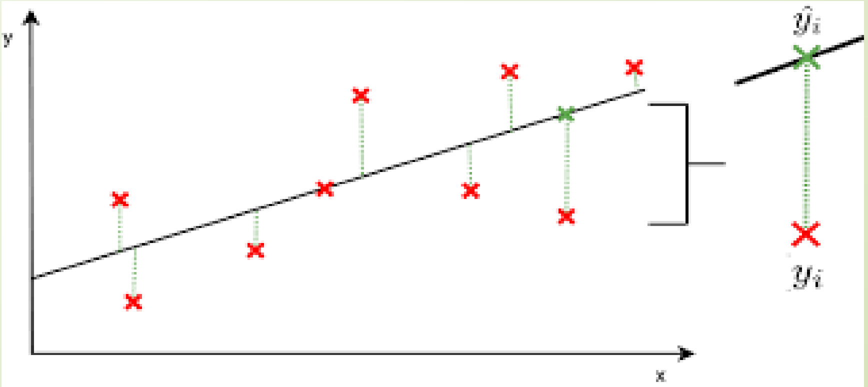
Pero **OJO!!!!** Estos ejemplos tienen igual valor de R^2, r, χ_ν^2

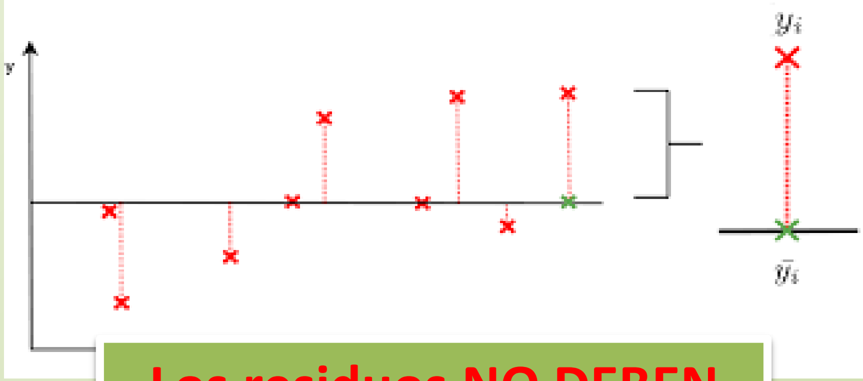


Parámetros de BONDAD

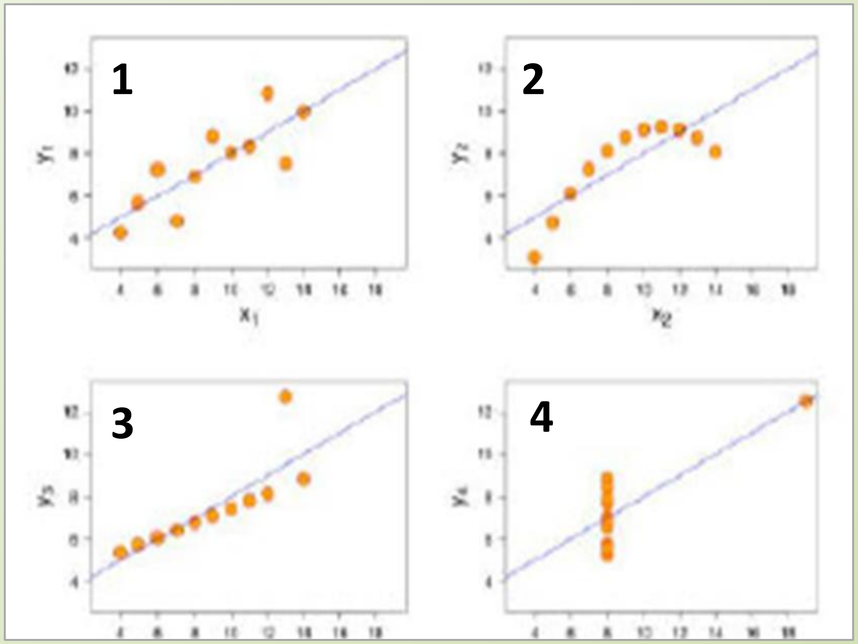
Residuos

Distancia de los puntos experimentales
a la recta, en “y”



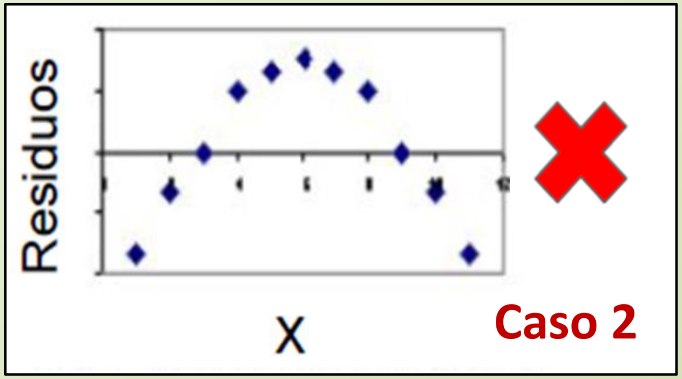


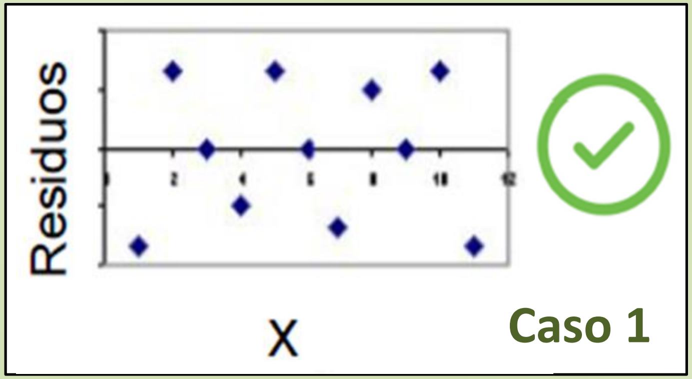
Los residuos NO DEBEN tener ESTRUCTURA



Residuos

En los casos 2, 3 y 4 la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal. **Los residuos tienen estructura**





Parámetros de BONDAD

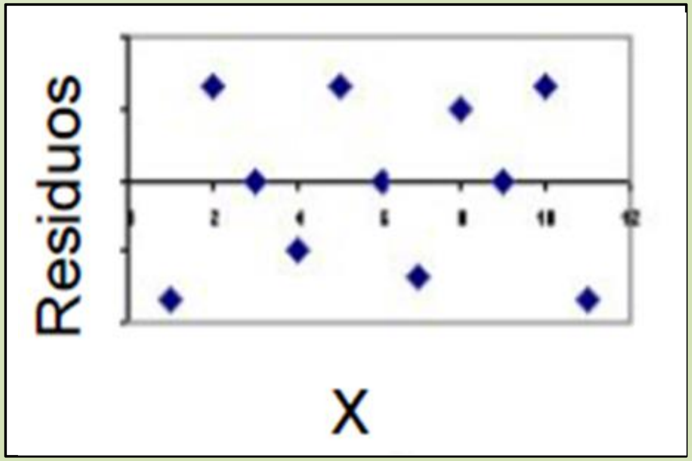
¿Qué esperamos?

Parámetros e BONDAD que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson r ⇒ $|r| \sim 1$

Chi-cuadrado reducido χ_v^2 ⇒ $\chi_v^2 \sim 1$

Residuos Sin ESRUCTURA ⇒



EXPERIMENTO

Exp. 6

Objetivo de la práctica de hoy y …. Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo (T) y la Longitudes (l)

$$\boxed{\boldsymbol{g} = (\overline{\boldsymbol{g}} \pm \Delta \boldsymbol{g})\ \boldsymbol{Ud}.}$$

EXPERIMENTO

Exp. 6

ACTIVIDAD 1
MEDICIÓN INDIRECTA

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T DE UNA DADA LONGITUD l

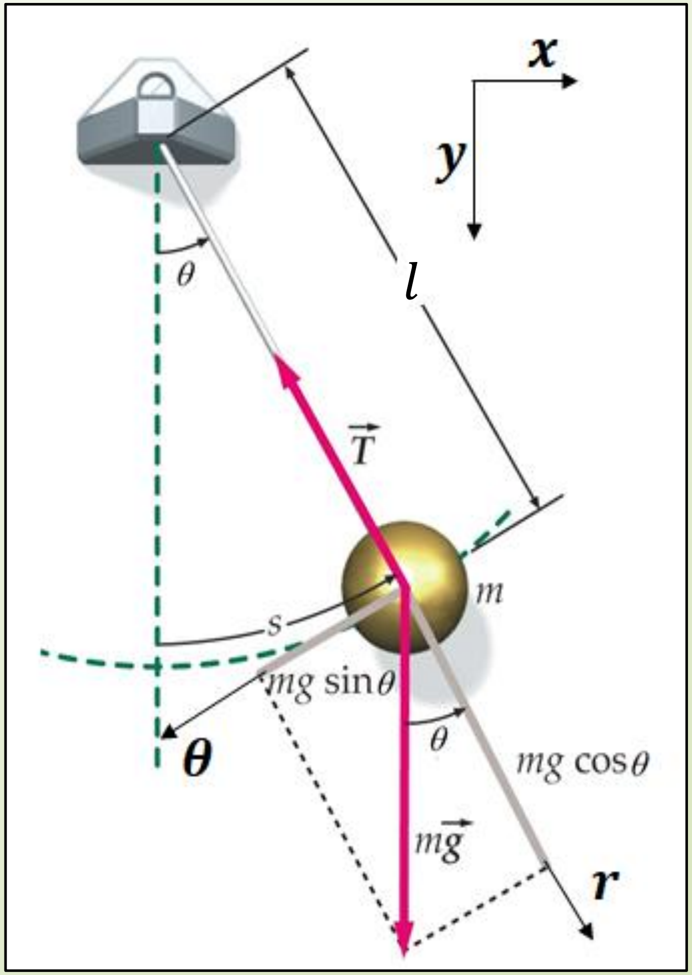
- Determinar el valor de la aceleración de la gravedad ($\boldsymbol{g}$) a partir del resultado de $\boldsymbol{T}$ **de la CLASE 4** (*el resultado de N = 160*).

BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE g con T

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g)\, Ud.$$

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}: mgcos\theta - T = ma_r \rightarrow a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \rightarrow a_\theta = -gsen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

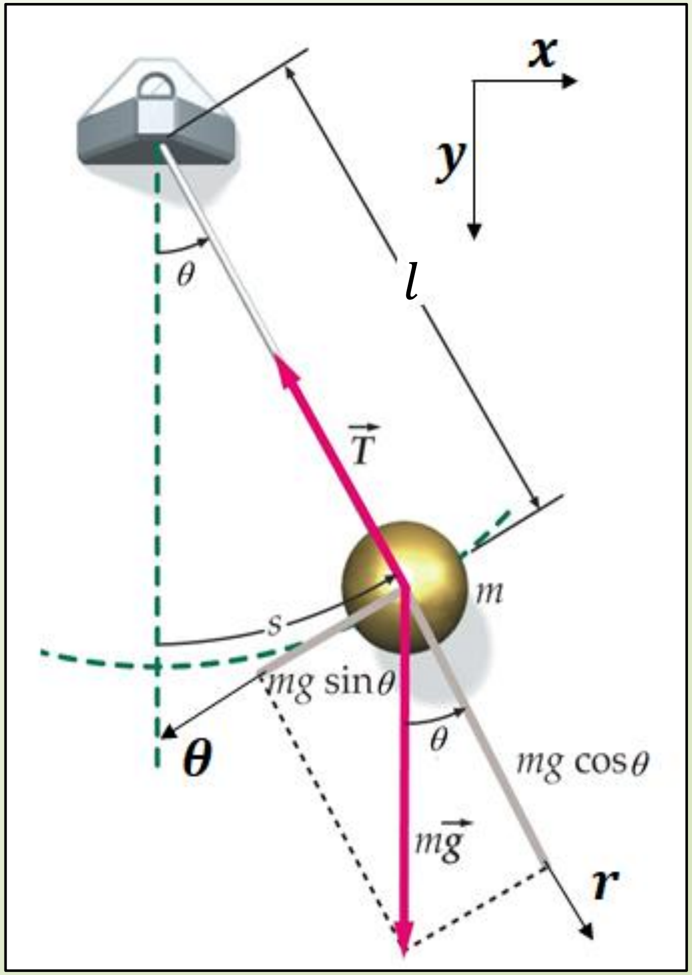
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

$$\theta \ll 1 \;\Rightarrow sen\theta \approx \theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Solución: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)}$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi}$ $\quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

Período de un Péndulo Simple

- Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2do orden

$$l\,\ddot{\theta} + g sen\theta = 0$$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

ACTIVIDAD 1
MEDICIÓN INDIRECTA

EXPERIMENTO

Exp. 6

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T DE UNA DADA LONGITUD l

- Determinar el valor de la aceleración de la gravedad ($\boldsymbol{g}$) a partir del resultado de $\boldsymbol{T}$ **de la CLASE 4** (*el resultado de N = 160*).

BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE g con T

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g)\, Ud.$$

EXPERIMENTO

Exp. 6

ACTIVIDAD 2
CUADRADOS MÍNIMOS

CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T CON DIFERENTES LONGITUDES l Y EL USO DE UN MODELO LINEAL

- Determinar el **período del péndulo (T) para 10 longitudes (l)** diferentes en el rango 30 cm hasta lo máximo que puedan!

- Graficar T **en función de** l (**gráfico de puntos con incertezas**).

  Para la Figura 1: $T = \bar{T} \pm \Delta T$ y $l = \bar{l} \pm \Delta l$

- **Discutir:** *¿Qué forma parece tener la función graficada?*

Van a poder obtener g usando un modelo lineal a la gráfica $\boldsymbol{T(l)}$?

ACTIVIDAD 2
CUADRADOS MÍNIMOS

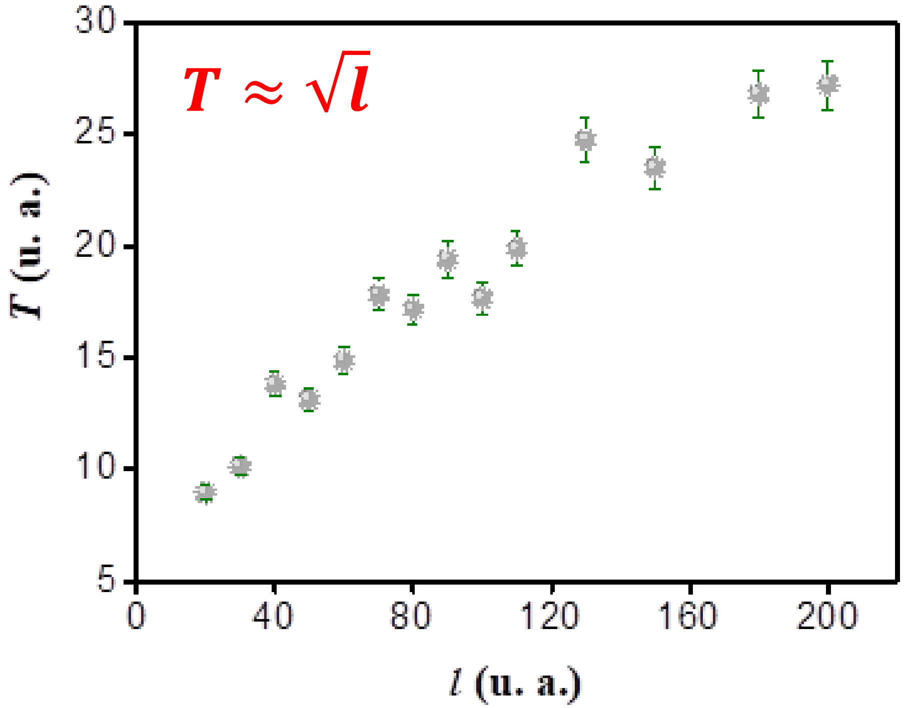
EXPERIMENTO

Exp. 6

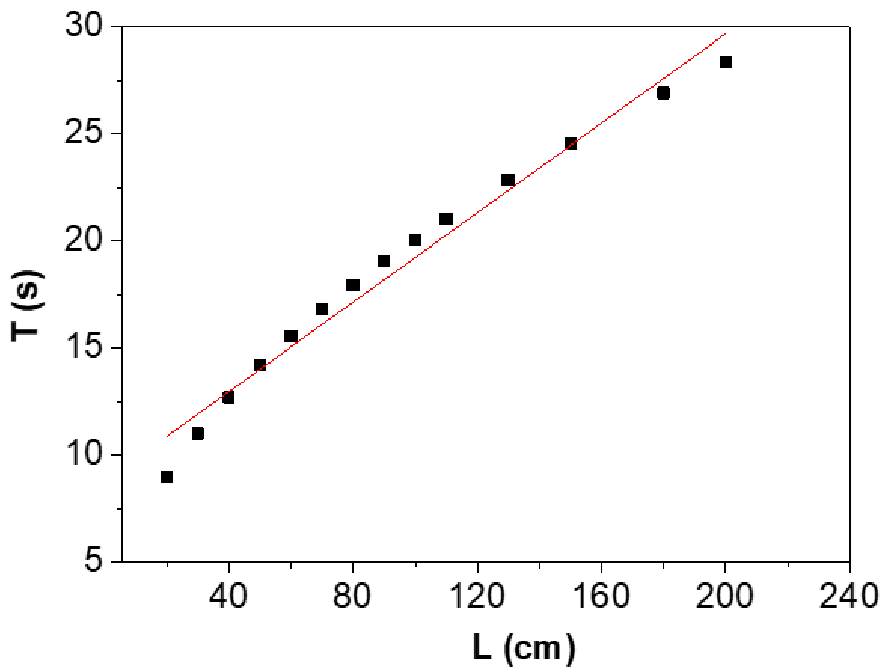
CALCULAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD g A PARTIR DEL PERÍODO DEL PÉNDULO T CON DIFERENTES LONGITUDES l Y EL USO DE UN MODELO LINEAL

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

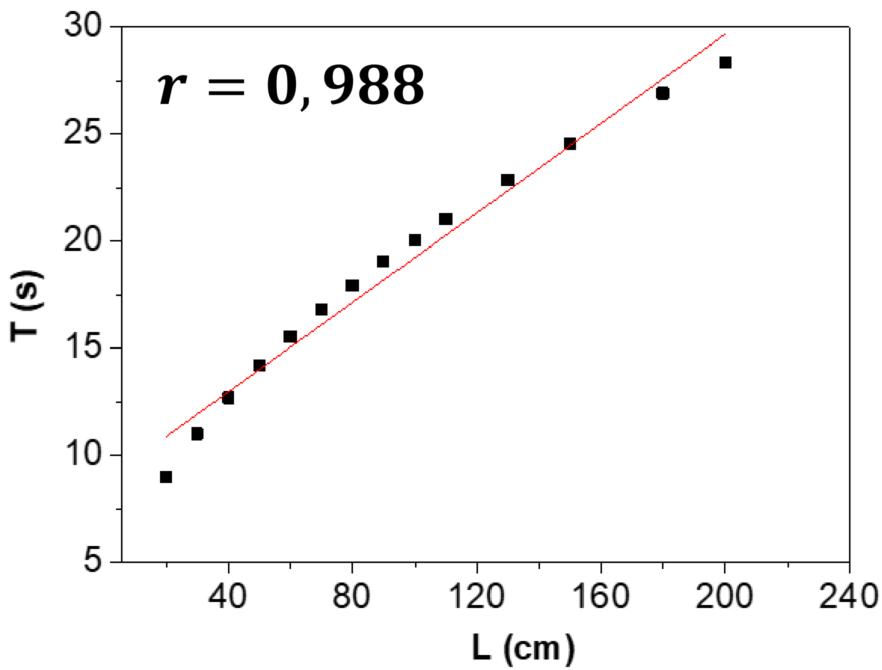
T NO ESTÁ RELACIONADO LINEALMENTE CON l

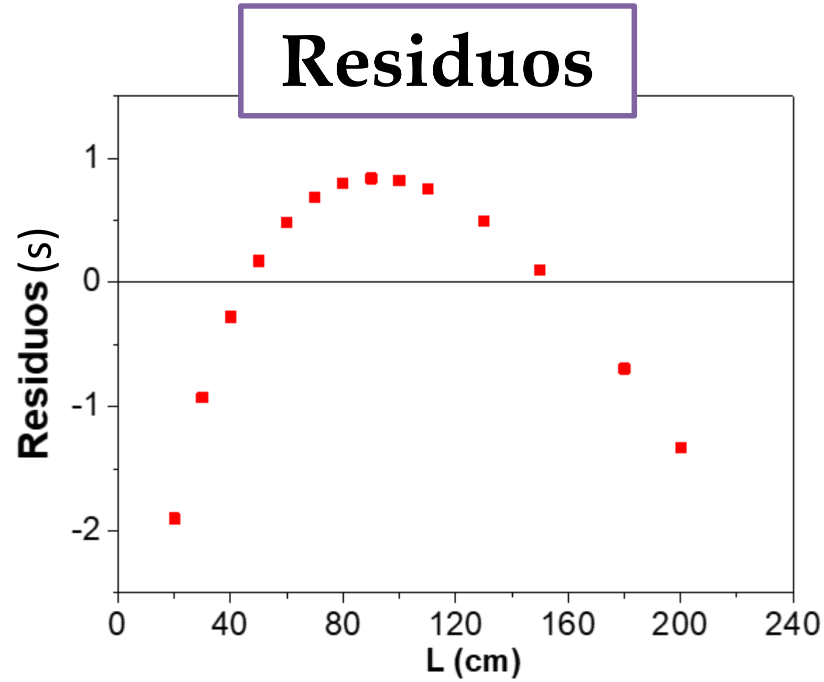


Está bien usar el modelo lineal en este caso?



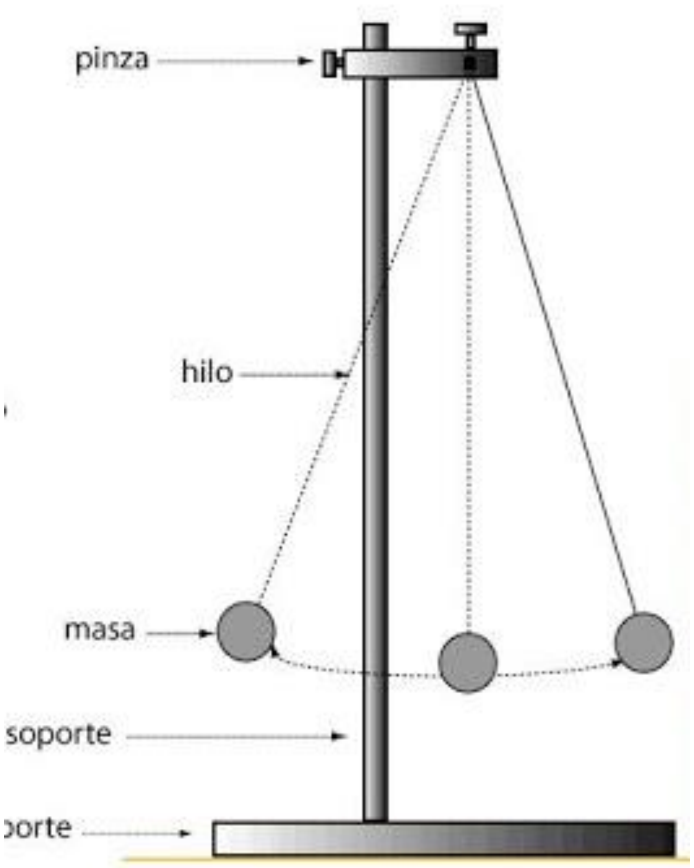
Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l!!



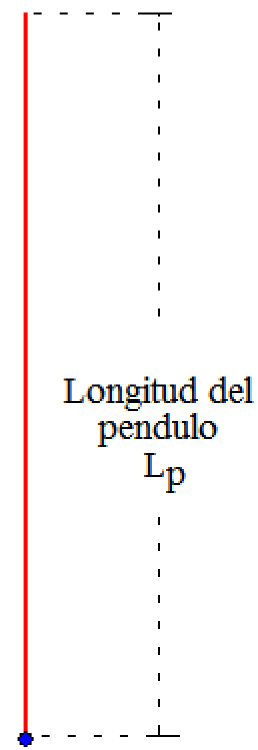


NOOOOOO es lineal!!

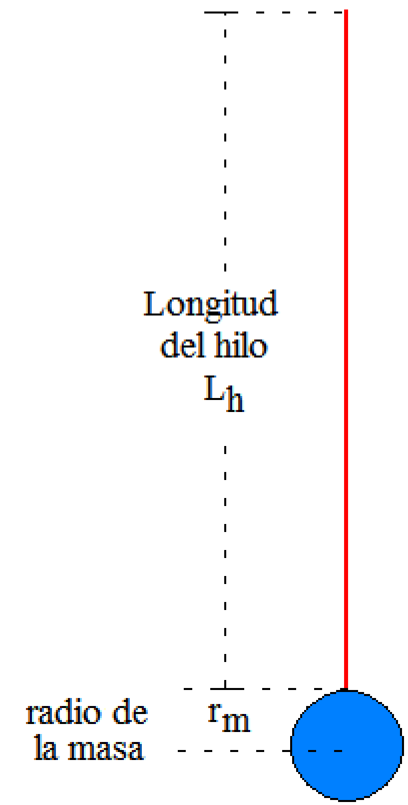
PÉNDULO



Caso ideal



Caso real



MIDO 1 VEZ N PERÍODOS JUNTOS

EXPERIMENTO

Exp. 6

¿Cuál será el resultado de T?

N períodos juntos (T'): $T' = N.T$ → $T = \frac{T'}{N}$ ⇒ $\boxed{\bar{T} = \frac{\overline{T'}}{N}}$

¿Y la incerteza de T?

Propagando!

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 \Delta T'^2} = \frac{1}{N} \Delta T'$$

La incerteza de una medida → $\Delta T' = S \ o \ \sigma$

$$\boxed{\Delta T = \frac{S}{N}} \rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{\sigma}{N}}$$

$S\ (\sigma)$ → Y ya la calculamos antes!!

¿Variará si cambiamos la longitud del hilo?

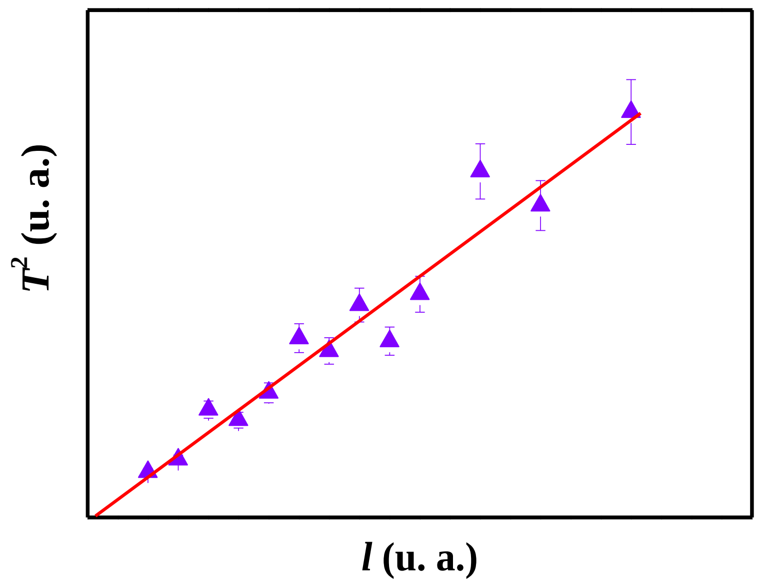
ACTIVIDAD 2
CUADRADOS MÍNIMOS

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\overset{T}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\overset{\tilde{l}}{\sqrt{l}}$$

$$\underset{\widetilde{T}}{T^2} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\underset{l}{l}$$



- ✓ $y = mx$
- ✓ $y = mx + b$

EXPERIMENTO

Exp. 6

RESUMEN

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ y $l = l$:

  1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $T^2 \rightarrow \Delta T^2$) y Δl

  Propago!!

  2- Obtenga los errores relativos de $\tilde{T}$ y l ($\varepsilon_{r_{\tilde{T}}}$ y ε_{rl}) y compárelos

- Graficar T^2 en función de l con las incertezas (o l en función de T^2 dependiendo de los $\varepsilon_{r_{T^2}}$ y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje "y".

- Realizar un ajuste por dos modelos lineales:
  ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?
  - ✓ $y = mx$
  - ✓ $y = mx + b$

- Graficar los residuos de ambos ajustes y discutirlos.

AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y x

Pendiente $m = \overline{m} + \Delta m$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\boxed{\overline{g} = \frac{4\pi^2}{\overline{m}}}$$

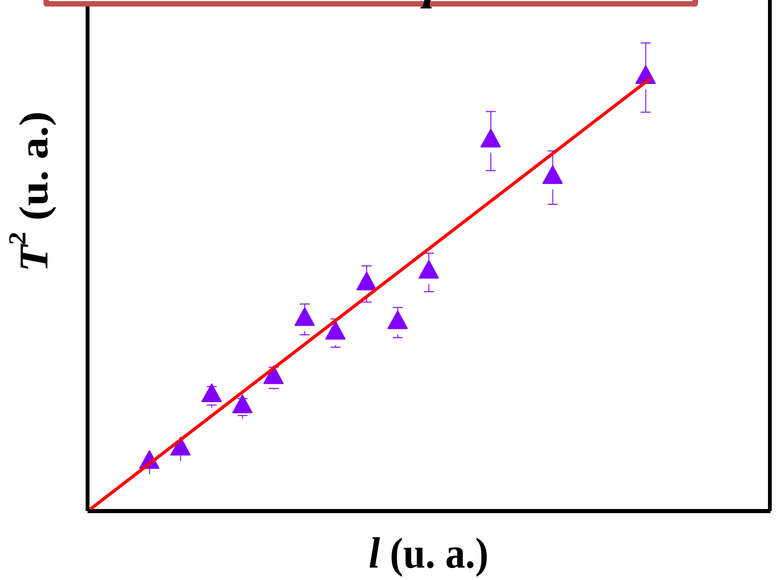
¿Δg?

Propago!!

$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta \pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π?

Ejemplo Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \gg \varepsilon_{r_l}$



AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r\ l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \Rightarrow l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

y $\quad$ x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \longrightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿ Δg?

Propago!!

EXPERIMENTO

Exp. 6

ACTIVIDAD 2
CUADRADOS MÍNIMOS

- Ralizar un ajuste por dos modelos lineales
  - ✓ $y = mx$
  - ✓ $y = mx + b$
- Reportar m y b (con incertezas y unidades!). Discutir qué podría representar b en su experiencia. *¿Es distinto de cero?*
- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud$. a partir de los resultados de los ajustes.

ACTIVIDAD 3

- Comparación de g:

¿Presentan diferencias significativas entre sí?

¿Cuál resultó más exacto?

¿Cuál más preciso?

EXPERIMENTO

Exp. 6

INFORME EN CAMPUS

MIERCOLES 10 DE MAYO HASTA LAS 14 HS

CON LA PRÁCTICA DE HOY