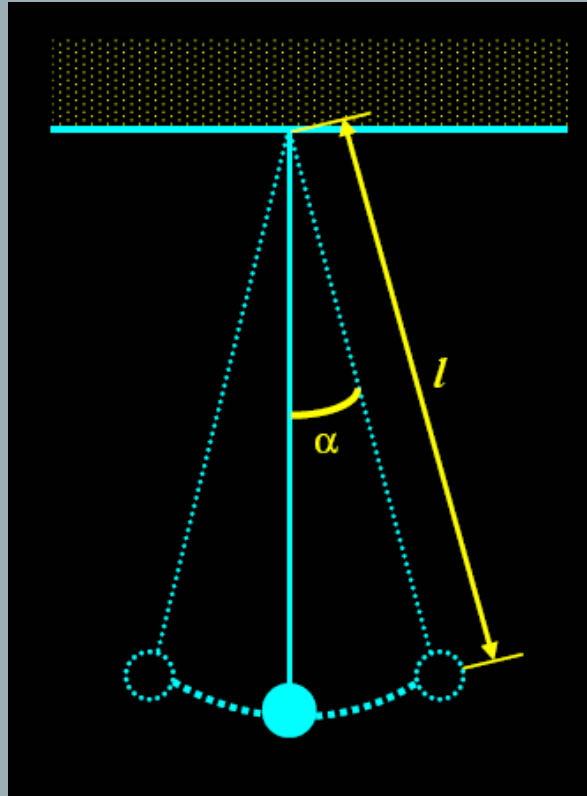


# PÉNDULO SIMPLE CUADRADOS MÍNIMOS

Laboratorio I

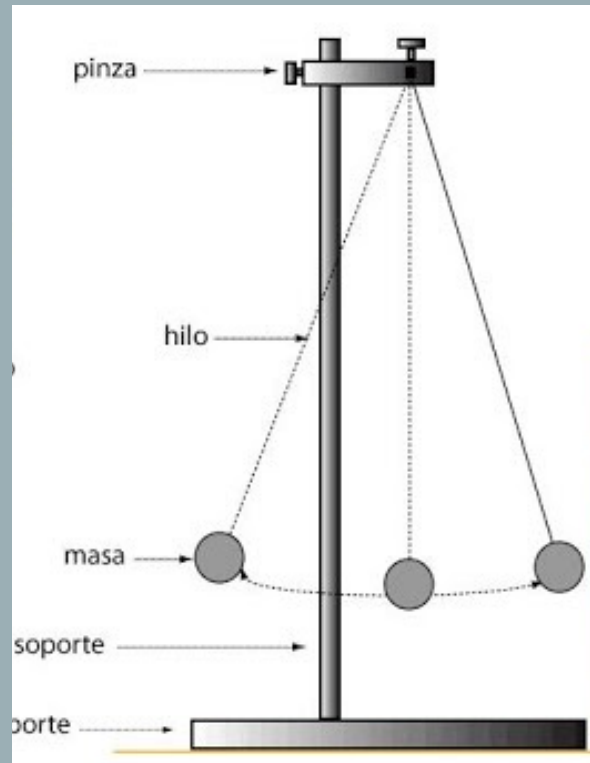
Departamento de Física –FCEyN - UBA

# PÉNDULO

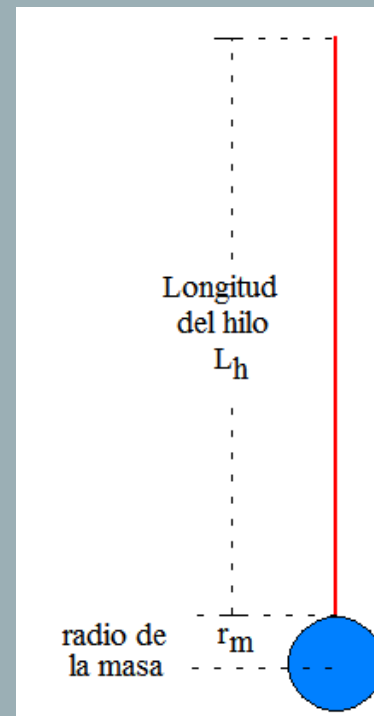


El **péndulo simple** (también llamado **péndulo ideal**) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa  $m$  que está suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

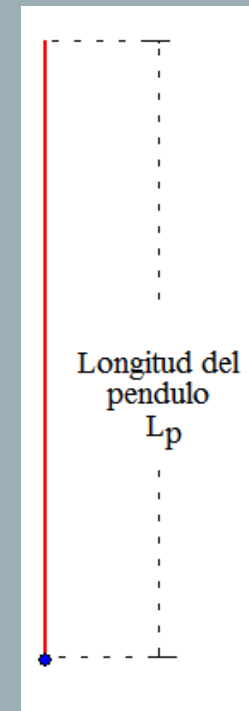
# PÉNDULO



Caso real



Caso ideal



# PÉNDULO:

## aproximación de pequeñas oscilaciones

Según el modelo desarrollado, el período de oscilación  $T$  es igual a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde  $L$  es la longitud de la cuerda y  $g$  es la aceleración de la gravedad

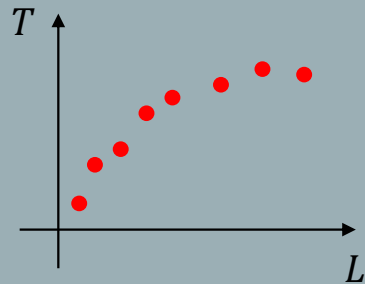
Queremos  
refutar o validar  
este modelo  
mediante  
experimentos.

**¿Qué podemos  
hacer?**

# PÉNDULO:

¿Cómo varía  $T$  a medida que varía  $L$  ?

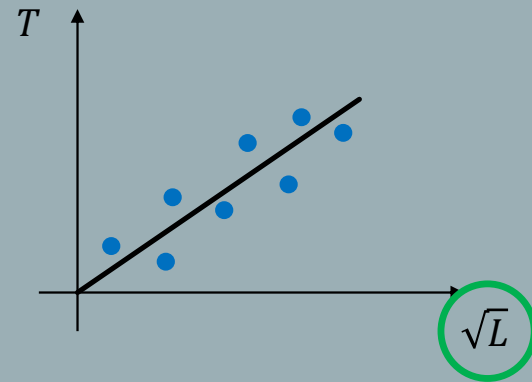
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L}$$

$$T = A \sqrt{L}$$

$$\text{siendo } A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

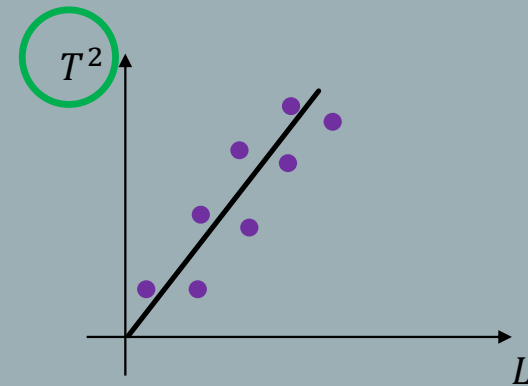


$$u = \sqrt{L}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

$$T^2 = B L$$

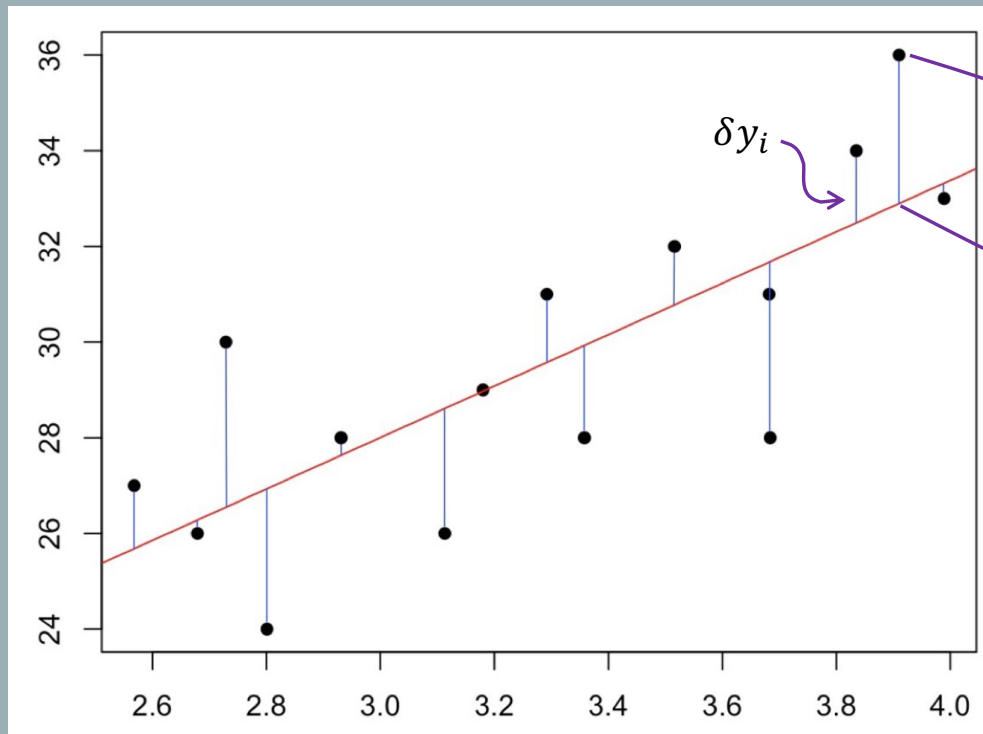
$$\text{siendo } B = \frac{4\pi^2}{g}$$



$$v = T^2$$

# ¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

**Idea:** buscamos la recta que minimice la distancia a los puntos medidos



$$y = mx + b$$

Punto medido      Punto sobre la recta

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b)$$

$$(\delta y_i)^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

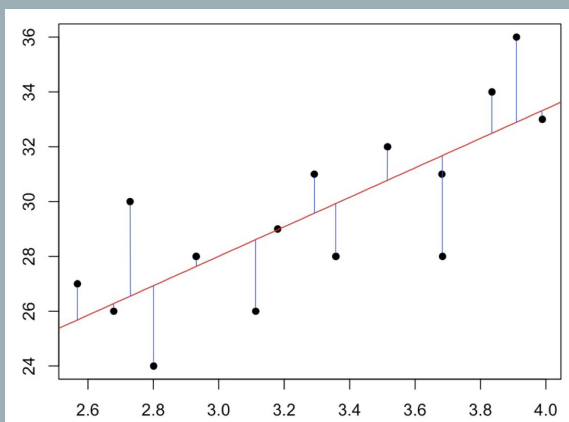
$$= y_i^2 + (mx_i + b)^2 - 2y_i(mx_i + b)$$

$$M = \sum_i (\delta y_i)^2$$

$$= \sum y_i^2 + m^2 \sum x_i^2 + nb^2 + 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i - 2b \sum y_i$$

# ¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

$$y = mx + b$$



**Mejor recta: la que minimice  $M$**

$$\begin{aligned} M &= \sum_i (\delta y_i)^2 \\ &= \sum y_i^2 + m^2 \sum x_i^2 + nb^2 + 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i \\ &\quad - 2b \sum y_i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \longrightarrow 2m \sum x_i^2 + 2b \sum x_i - 2 \sum (x_i y_i) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0 \longrightarrow 2nb + 2m \sum x_i - 2 \sum y_i = 0$$

Obtengo  $m$  y  $b$  despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$m = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

# ¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

Obtengo  $m$  y  $b$  despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}}$$

$$\Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}}$$

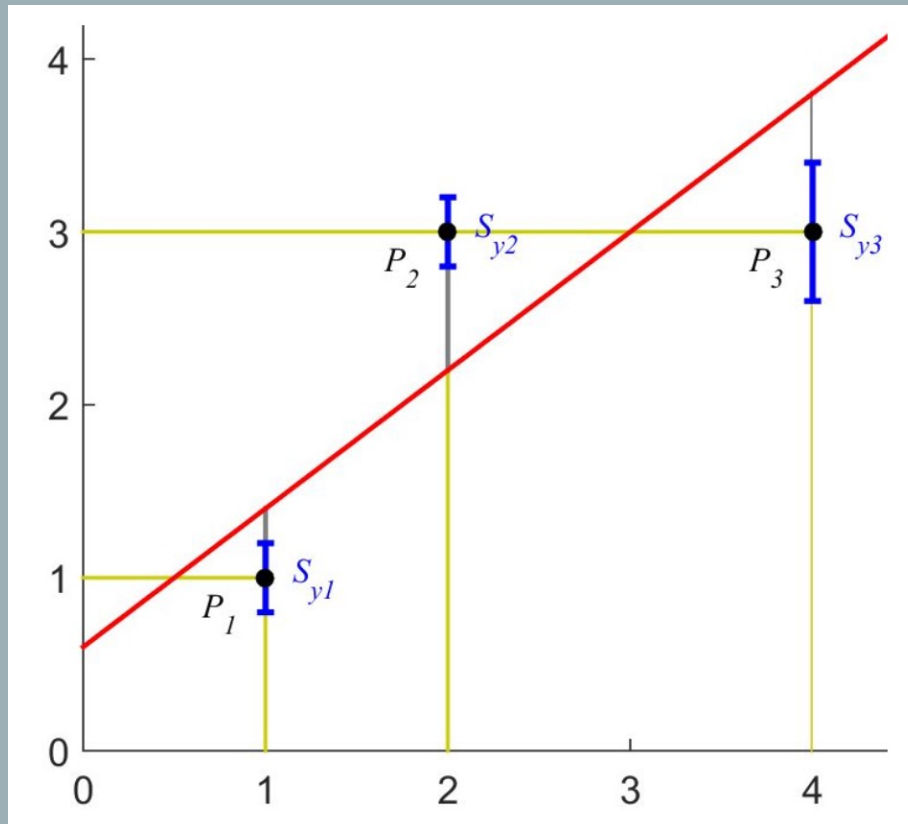
siendo  $S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\delta y_i)^2}{N-2}}$

Lo importante es que  
puedo calcular estos  
valores de manera  
**EXACTA**



Si confiamos más en algunos puntos que en otros

## Cuadrados mínimos ponderados

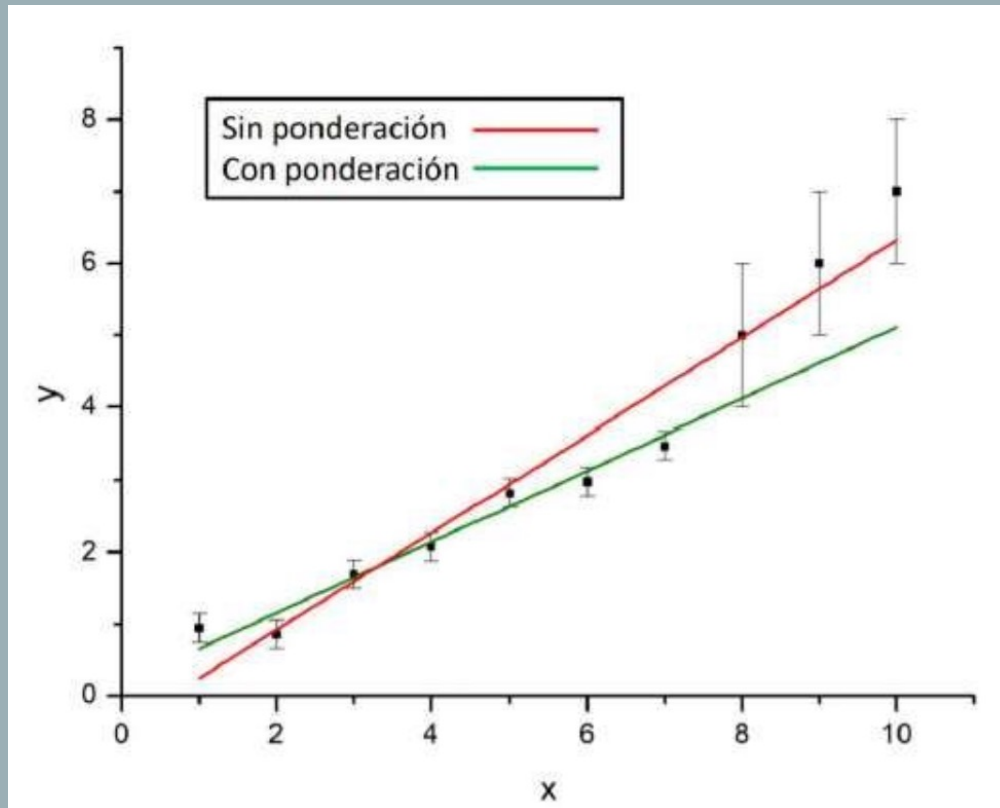


Mejor recta: la que minimice  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$

Si confiamos más en algunos puntos que en otros

## Cuadrados mínimos ponderados



### C.M. Ponderados

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$

### C.M. No Ponderados

$$M = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Si confiamos más en algunos puntos que en otros

## Cuadrados mínimos ponderados

Obtengo  $m$  y  $b$  despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$b = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \left( \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \right)^2}$$

$$m = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} (x_i y_i) - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \left( \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \right)^2}$$

$$S_m^2 = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i^2}{(S_{yi})^2} - \left( \sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2} \right)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{\sum \frac{x_i y_i}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i^2}{(S_{yi})^2} - \left( \sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2} \right)^2}$$

Lo importante es que  
puedo calcular estos  
valores de manera  
**EXACTA**

# Cuadrados mínimos con Origin

The screenshot displays the Origin software interface. The 'Analysis' menu is open, with 'Fitting' selected. The 'Fitting' submenu is also open, showing options like 'Linear Fit', 'Fit Linear with X Error', and 'Polynomial Fit...'. The 'Linear Fit' option is highlighted, and its 'Open Dialog...' option is visible. In the background, a graph window titled 'Péndulo relación T vs L' is visible, showing a scatter plot of data points with error bars. The x-axis is labeled 'l (u. a.)'. The status bar at the bottom indicates 'FitLinear: linear regression on XY data' and 'AU: ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]!4 Radian'.

File Edit View Graph Data Analysis Gadgets Tools Format Window Help

Statistics  
Mathematics  
Data Manipulation  
Fitting  
Signal Processing  
Peaks and Baseline

1 Linear Fit: <Last used> ...  
2 Linear Fit: <default> ...  
3 Peak Analyzer: <Last used> ...  
4 Peak Analyzer: <default> ...  
5 Single Peak Fit: <default> ...  
6 Integrate: <default> ...  
7 Polygon Area: <Last used> ...  
8 Polygon Area: <default> ...  
9 Integrate: <Last used> ...  
10 Horizontal Translate

Linear Fit  
Fit Linear with X Error  
Polynomial Fit...  
Nonlinear Curve Fit  
Nonlinear Surface Fit...  
Simulate Curve...  
Simulate Surface...  
Exponential Fit...  
Sigmoidal Fit...  
Compare Datasets...  
Compare Models...

1 <Last used>  
Open Dialog...

Péndulo relación T vs L

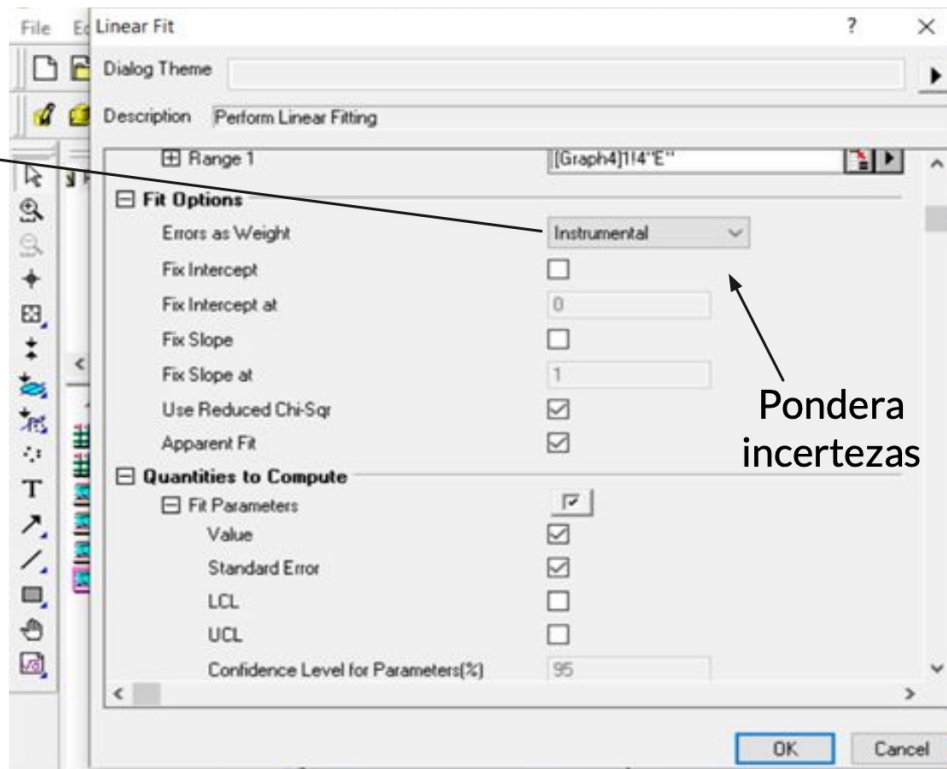
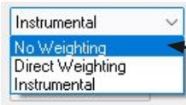
l (u. a.)

Graph1  
Book2  
Graph3 - C...  
Graph2 - C...  
Book1

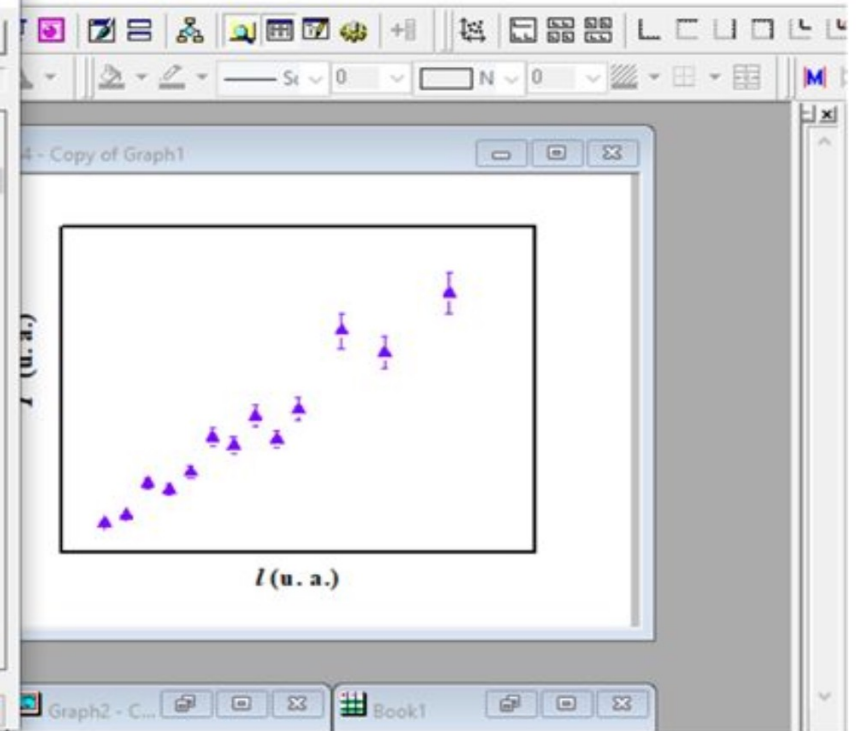
FitLinear: linear regression on XY data AU: ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]!4 Radian

# Cuadrados mínimos con Origen

No ponderados



Pondera incertezas

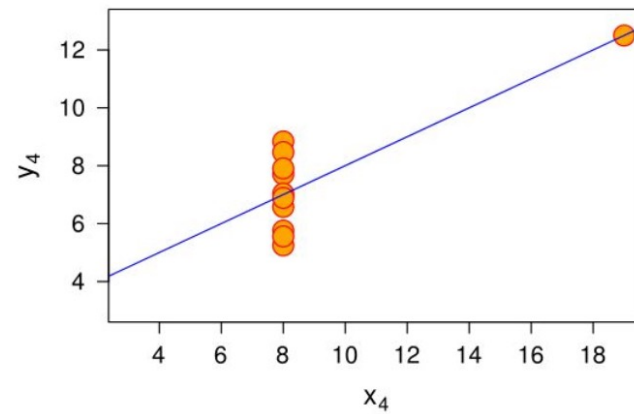
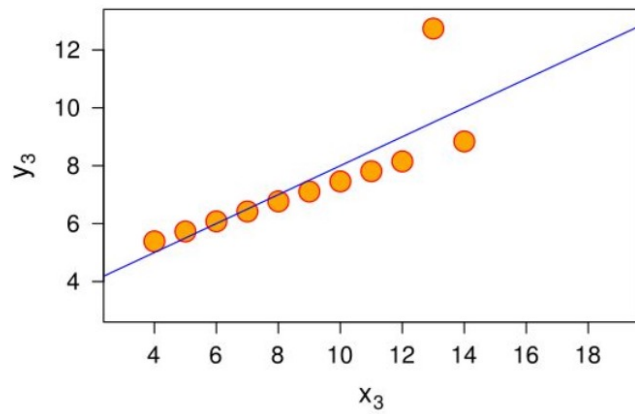
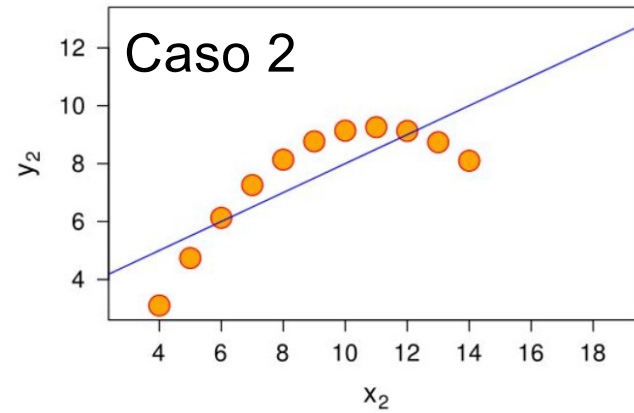
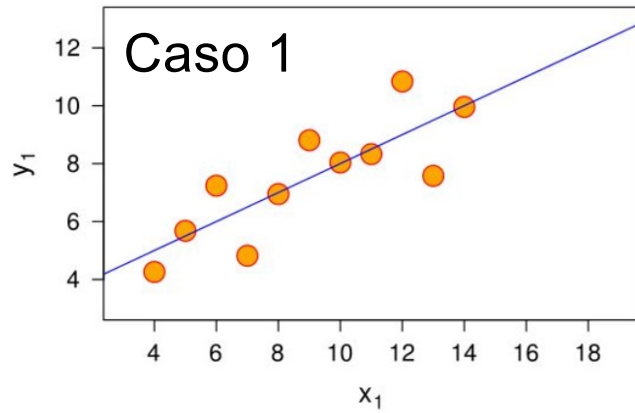


## Bondad del ajuste

$R^2$  cercano a 1

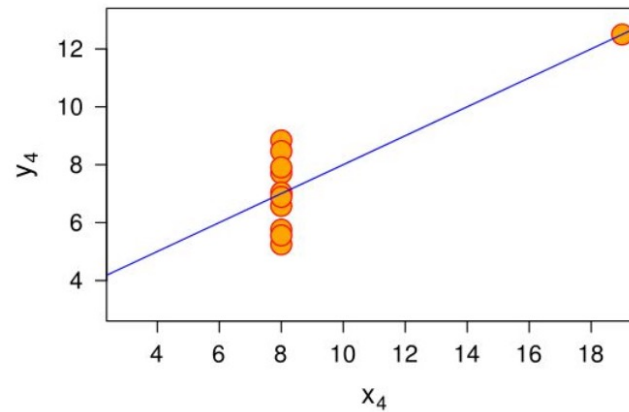
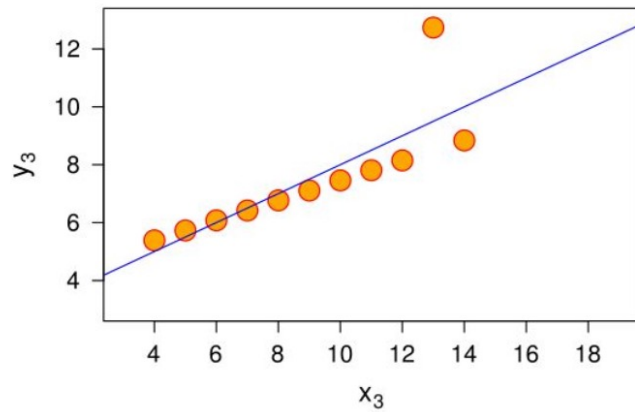
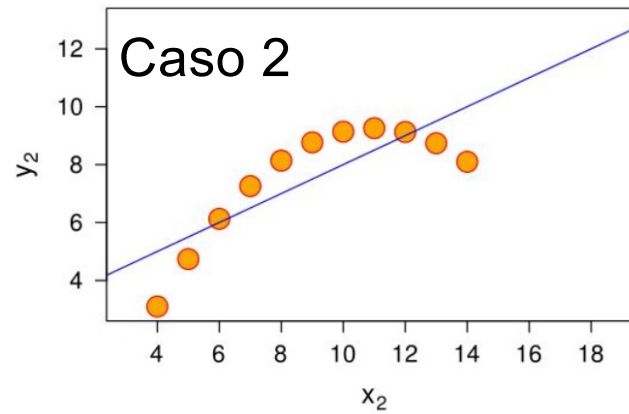
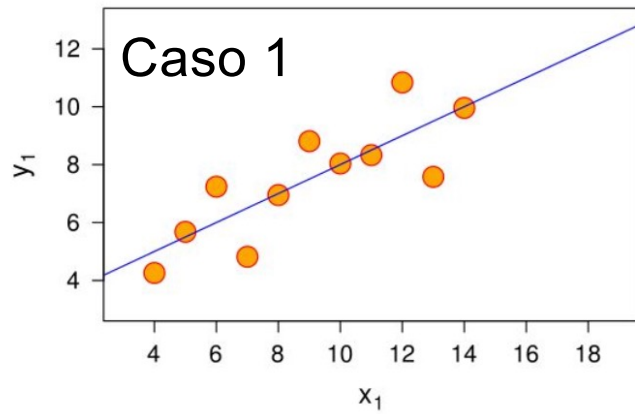
# Bondad del ajuste

El cuarteto de Anscombe (  $R^2 = 0.666$  )

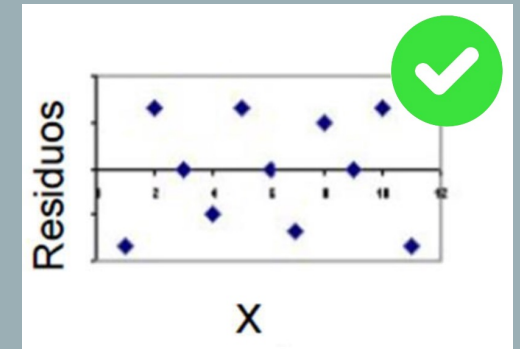


# Bondad del ajuste

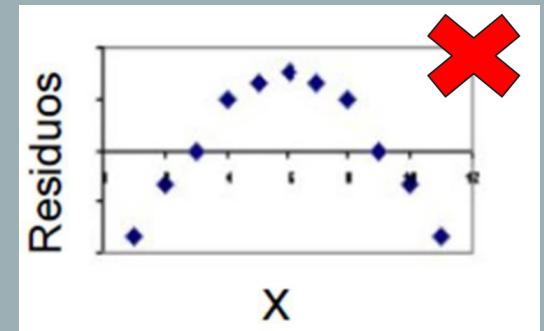
## El cuarteto de Anscombe ( $R^2 = 0.666$ )



Caso 1

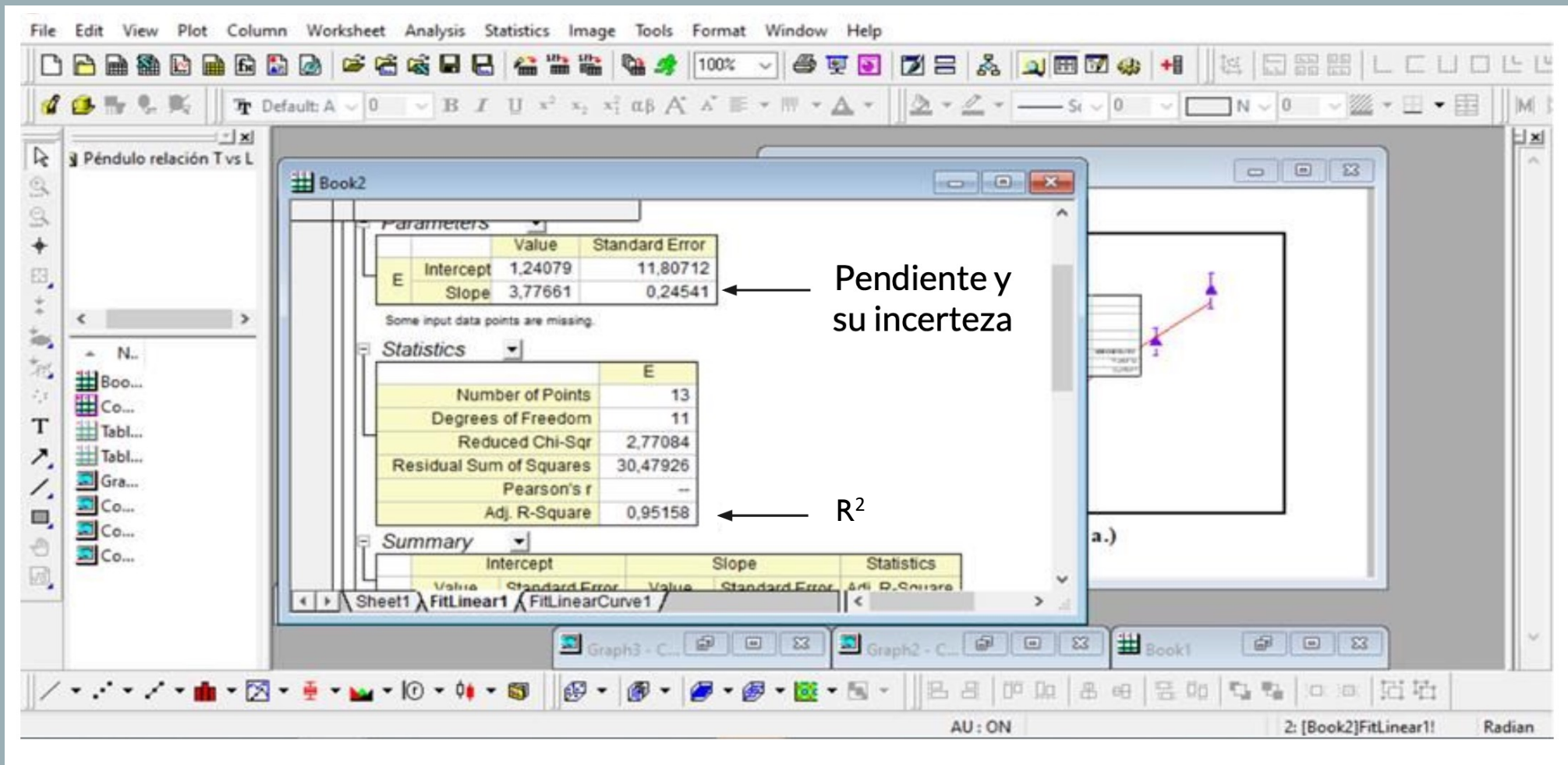


Caso 2





# Cuadrados mínimos con Origin



# Cuadrados mínimos con Origen

