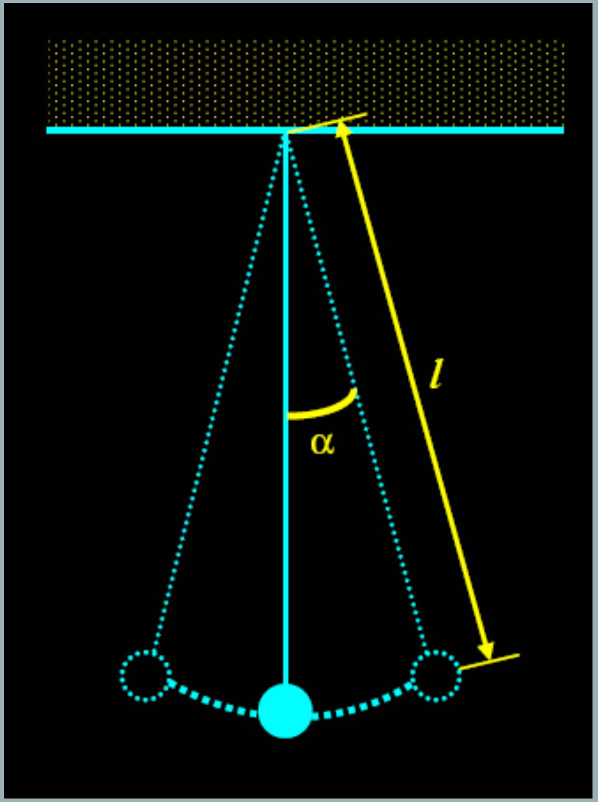
PÉNDULO SIMPLE
CUADRADOS MÍNIMOS

Laboratorio 1

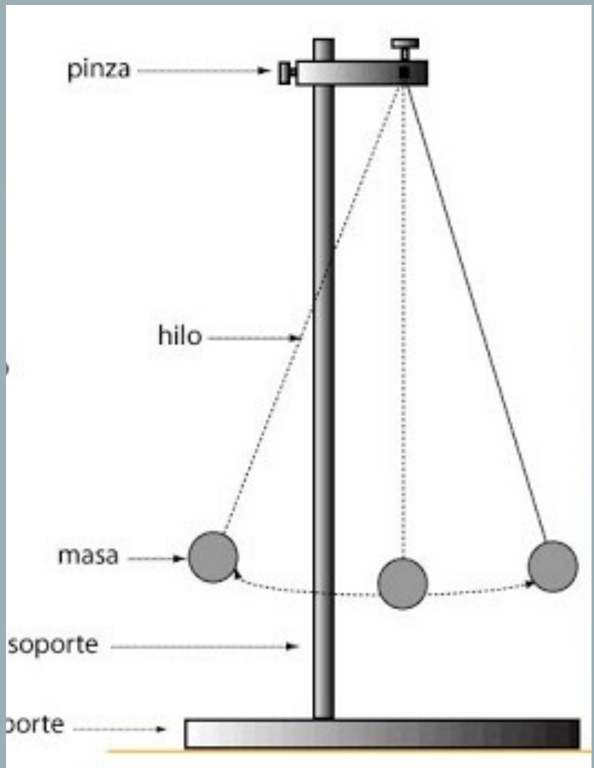
Departamento de Física –FCEyN - UBA

PÉNDULO

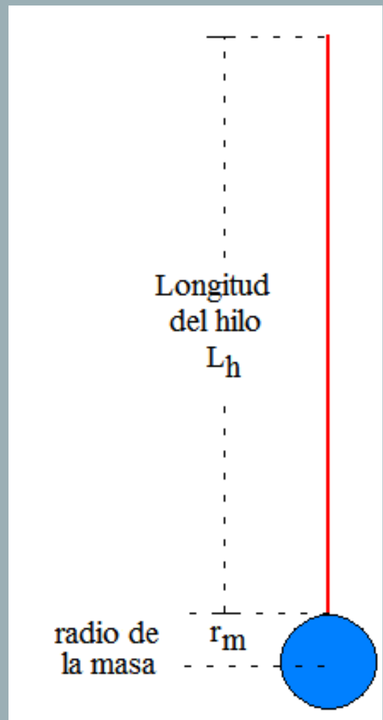


El **péndulo simple** (también llamado **péndulo ideal**) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa ***m*** que está suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

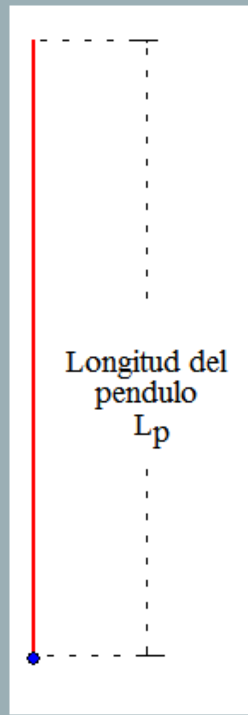
PÉNDULO



Caso real



Caso ideal



PÉNDULO:

aproximación de pequeñas oscilaciones

Según el modelo desarrollado, el período de oscilación T es igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud de la cuerda y g es la aceleración de la gravedad

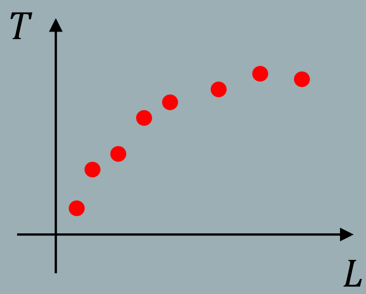
Queremos refutar o validar este modelo mediante experimentos.

¿Qué podemos hacer?

PÉNDULO:

¿Cómo varía T a medida que varía L ?

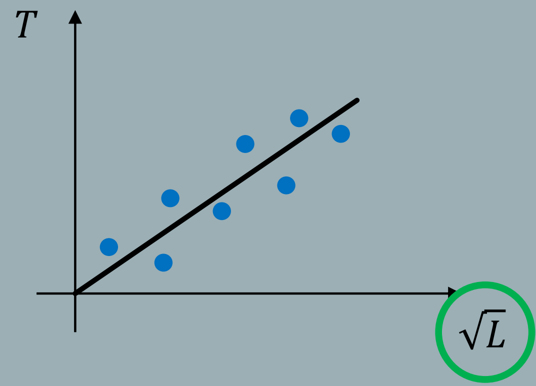
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L}$$

$$T = A\sqrt{L}$$

siendo $A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$

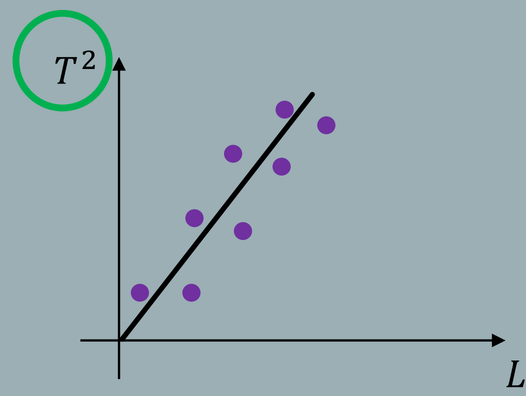


$u = \sqrt{L}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

$$T^2 = B\ L$$

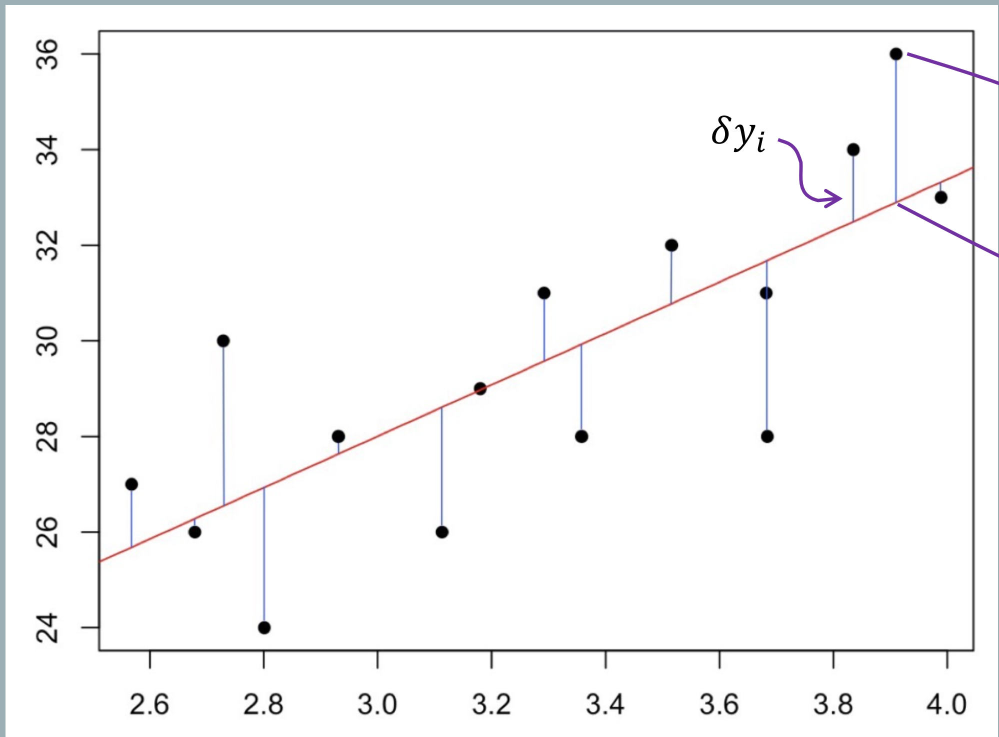
siendo $B = \frac{4\pi^2}{g}$



$v = T^2$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

Idea: buscamos la recta que minimice la distancia a los puntos medidos



$$y = mx + b$$

Punto medido

Punto sobre la recta

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b)$$

$$(\delta y_i)^2 = [y_i - (mx_i + b)\ ]^2$$

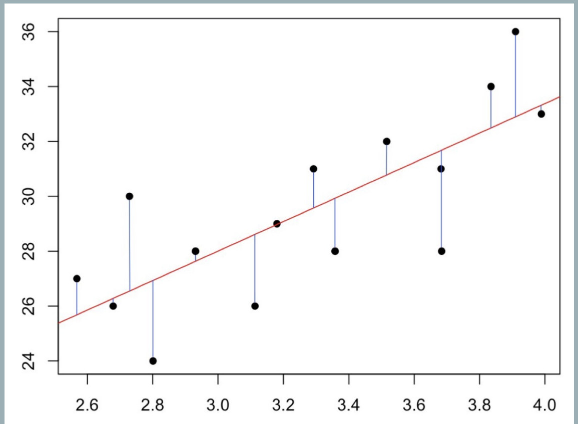
$$= {y_i}^2 + (mx_i + b)^2$$
$$-2y_i(mx_i + b)$$

$$M = \sum_i (\delta y_i)^2$$

$$= \sum {y_i}^2 + m^2 \sum {x_i}^2 + nb^2$$
$$+ 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i$$
$$- 2b \sum y_i$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

$$y = mx + b$$



Mejor recta: la que minimice M

$$M = \sum_i (\delta y_i)^2$$
$$= \sum {y_i}^2 + m^2 \sum {x_i}^2 + nb^2 + 2mb\sum x_i - 2m\sum x_i y_i$$
$$- 2b\sum y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \longrightarrow 2m\sum {x_i}^2 + 2b\sum x_i - 2\sum(x_i y_i) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0 \longrightarrow 2nb + 2m\sum x_i - 2\sum y_i = 0$$

Obtengo m y b despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

Obtengo m y b despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$\boxed{m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}$$

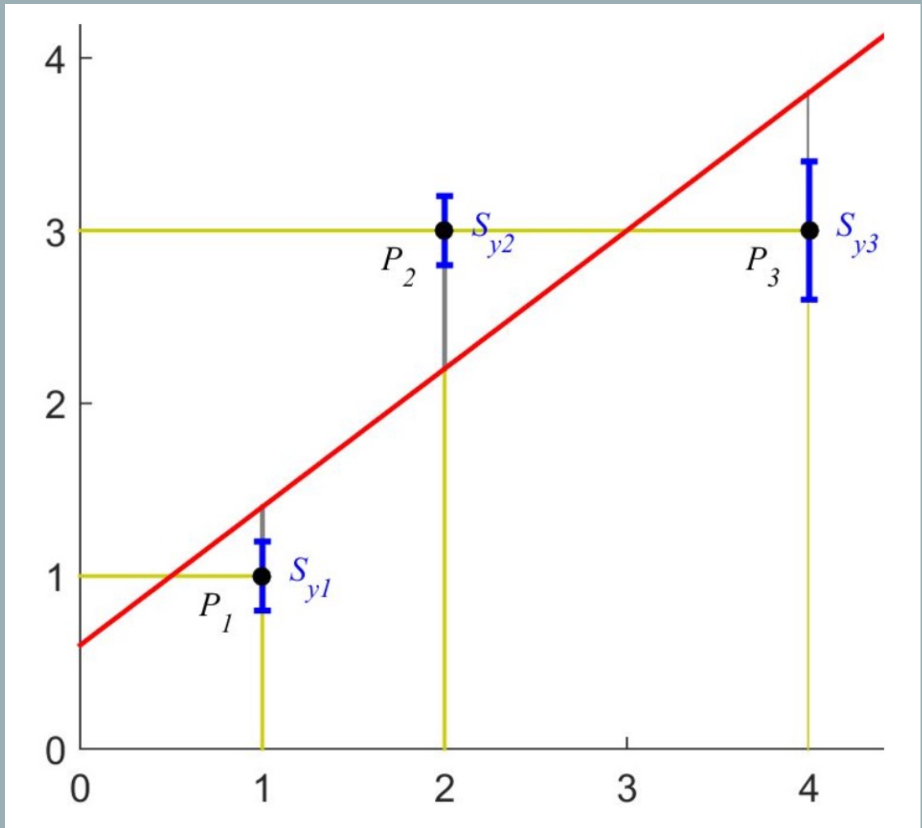
$$\Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}$$

siendo $S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\delta y_i)^2}{N-2}}$

Lo importante es que puedo calcular estos valores de manera **EXACTA**

Si confiamos más en algunos puntos que en otros

Cuadrados mínimos ponderados

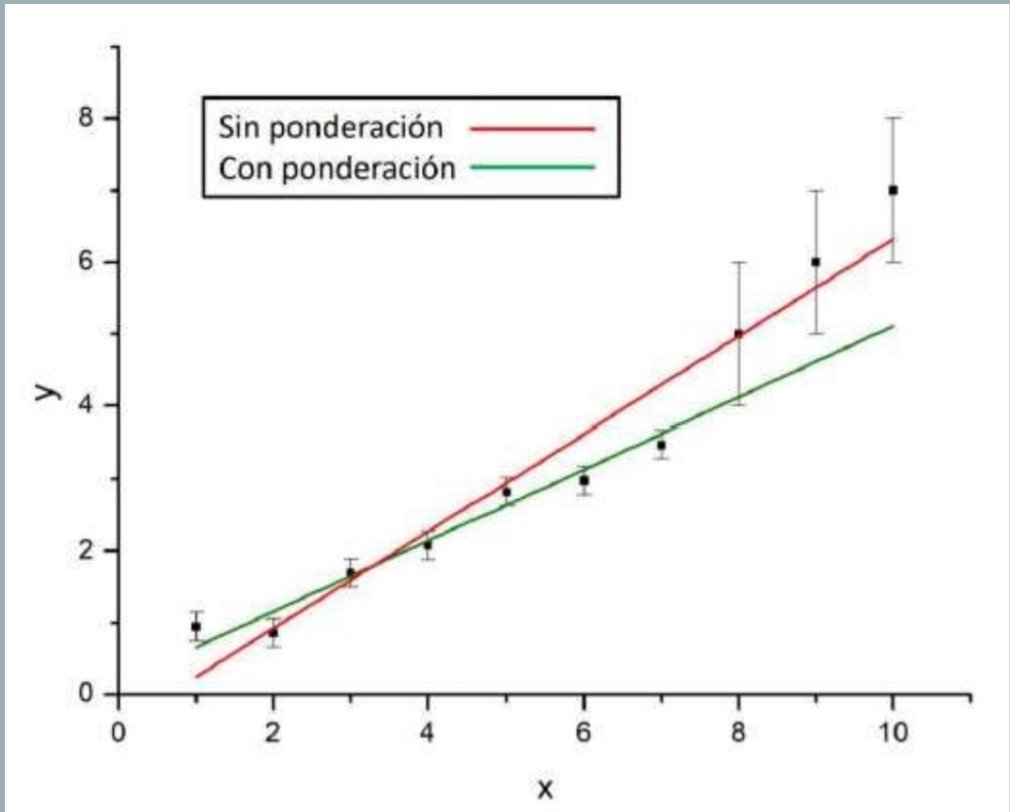


Mejor recta: la que minimice χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$

Si confiamos más en algunos puntos que en otros

Cuadrados mínimos ponderados



C.M. Ponderados

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$

C.M. No Ponderados

$$M = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Si confiamos más en algunos puntos que en otros

Cuadrados mínimos ponderados

Obtengo m y b despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$b = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i{}^2 - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i{}^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i\right)^2}$$

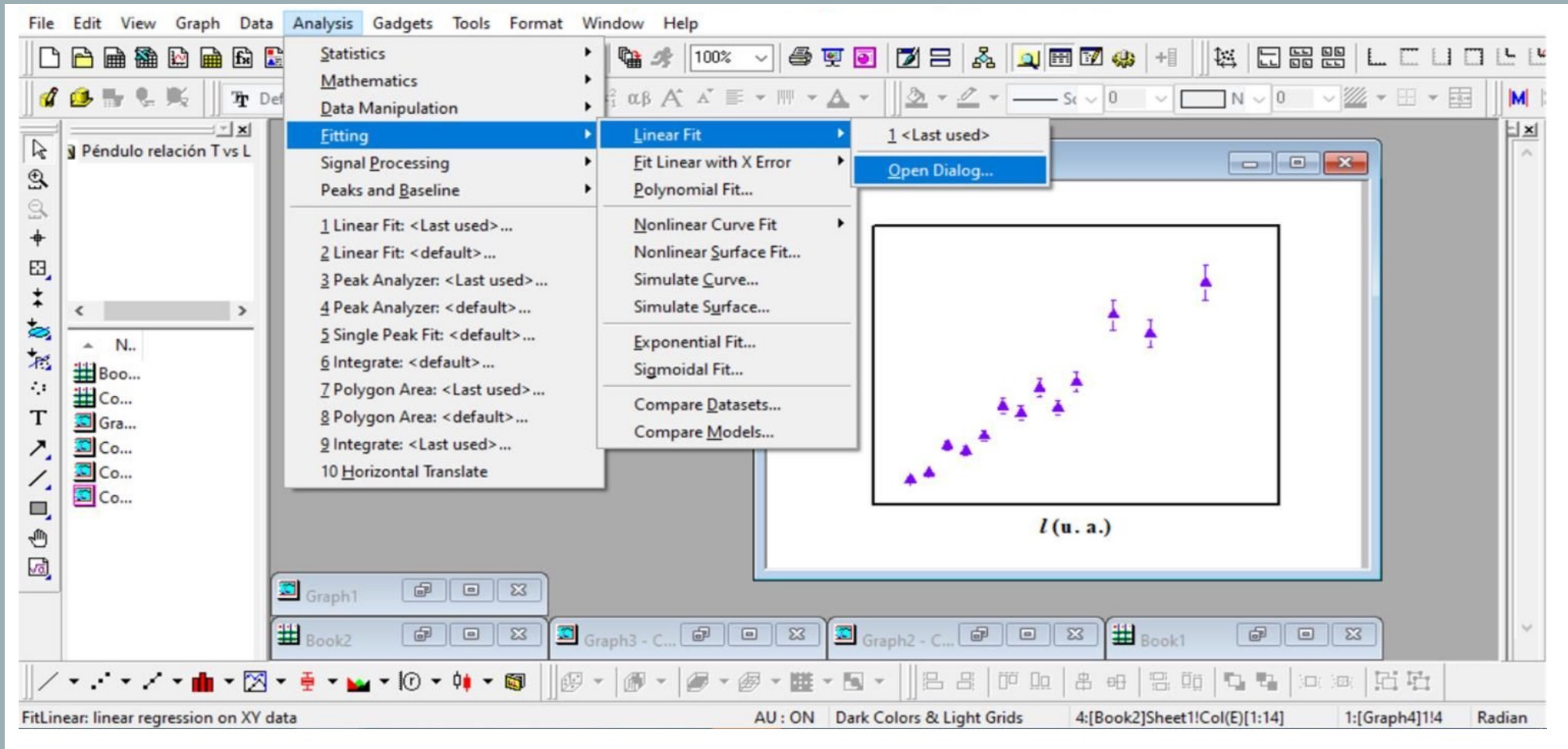
$$m = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} (x_i y_i) - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i{}^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i\right)^2}$$

$$S_m{}^2 = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

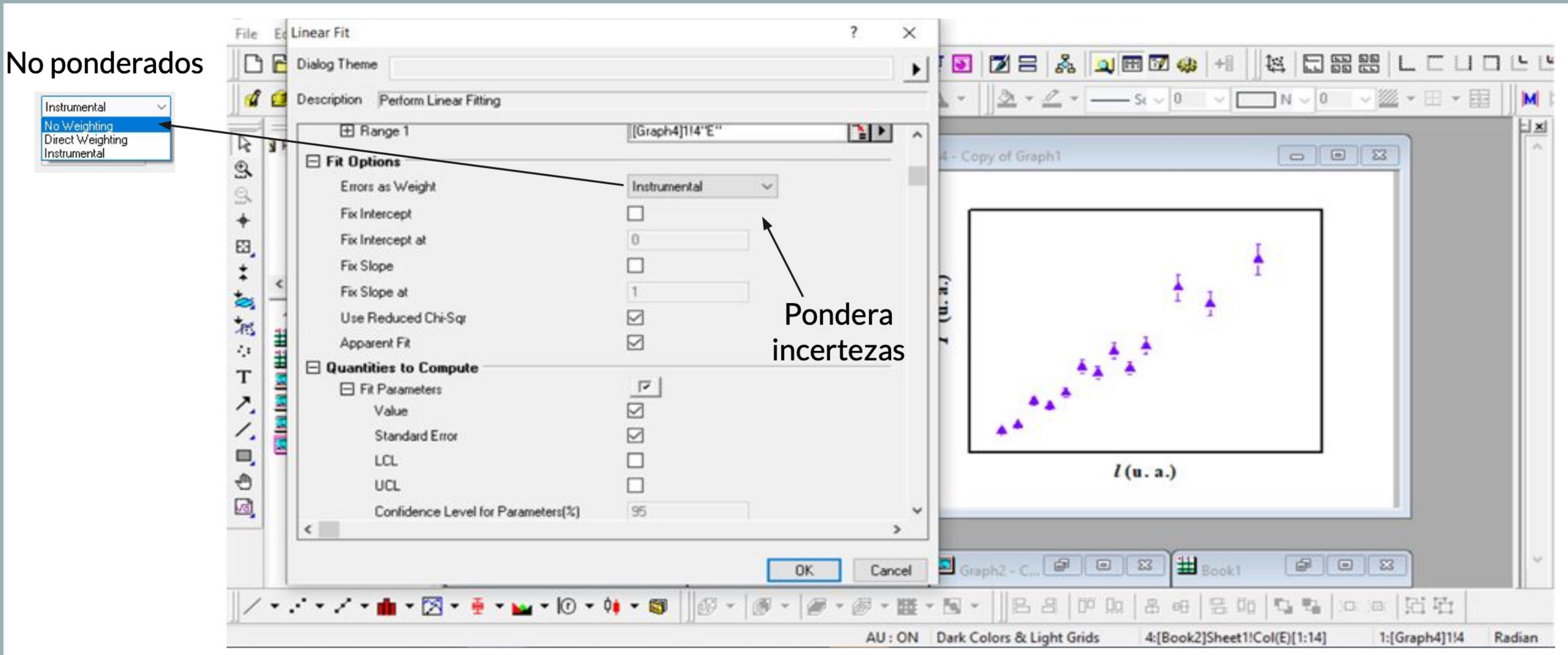
$$S_b{}^2 = \frac{\sum \frac{x_i y_i}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

Lo importante es que puedo calcular estos valores de manera **EXACTA**

Cuadrados mínimos con Origin



Cuadrados mínimos con Origin

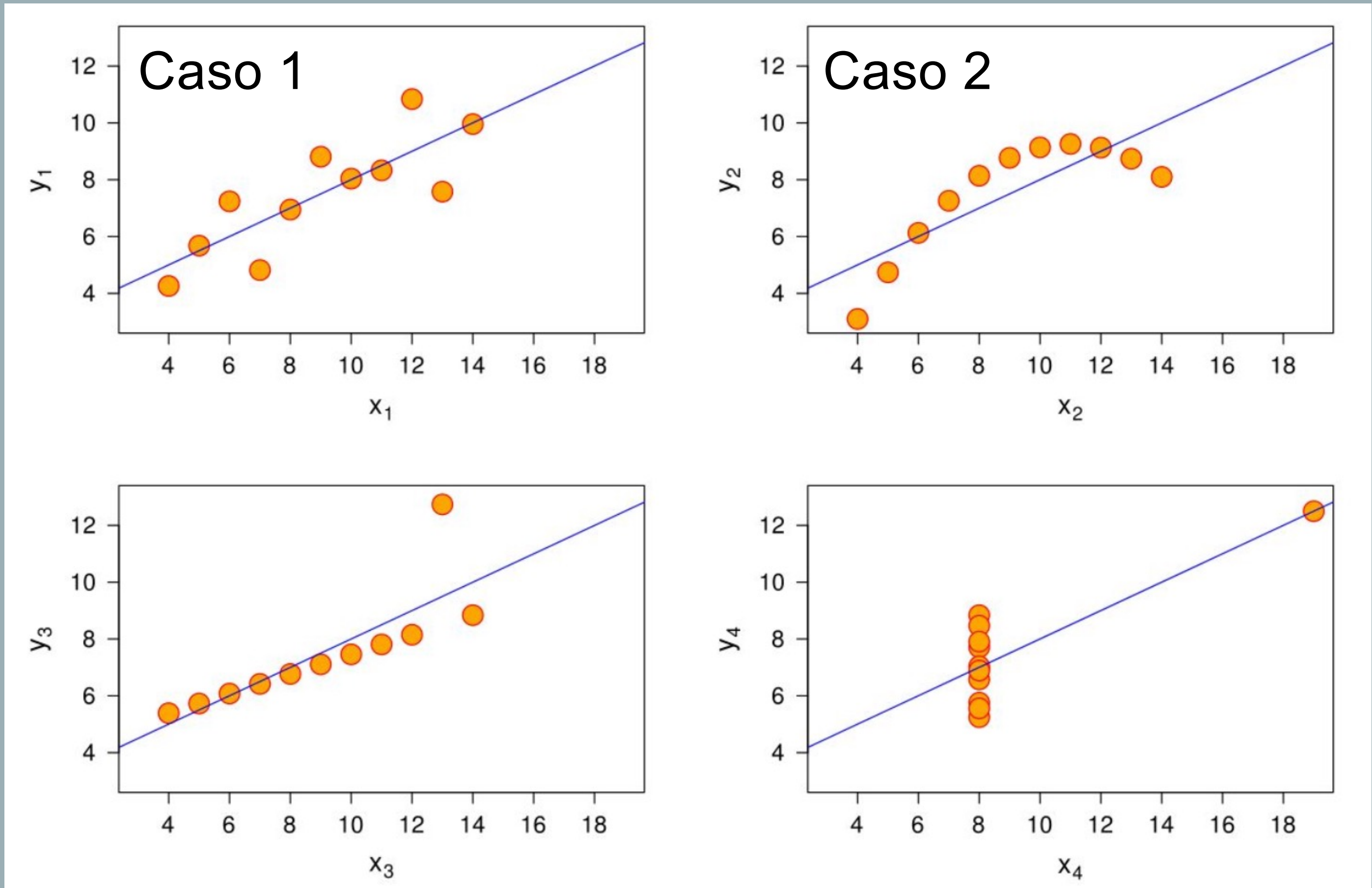


Bondad del ajuste

R^2 cercano a 1

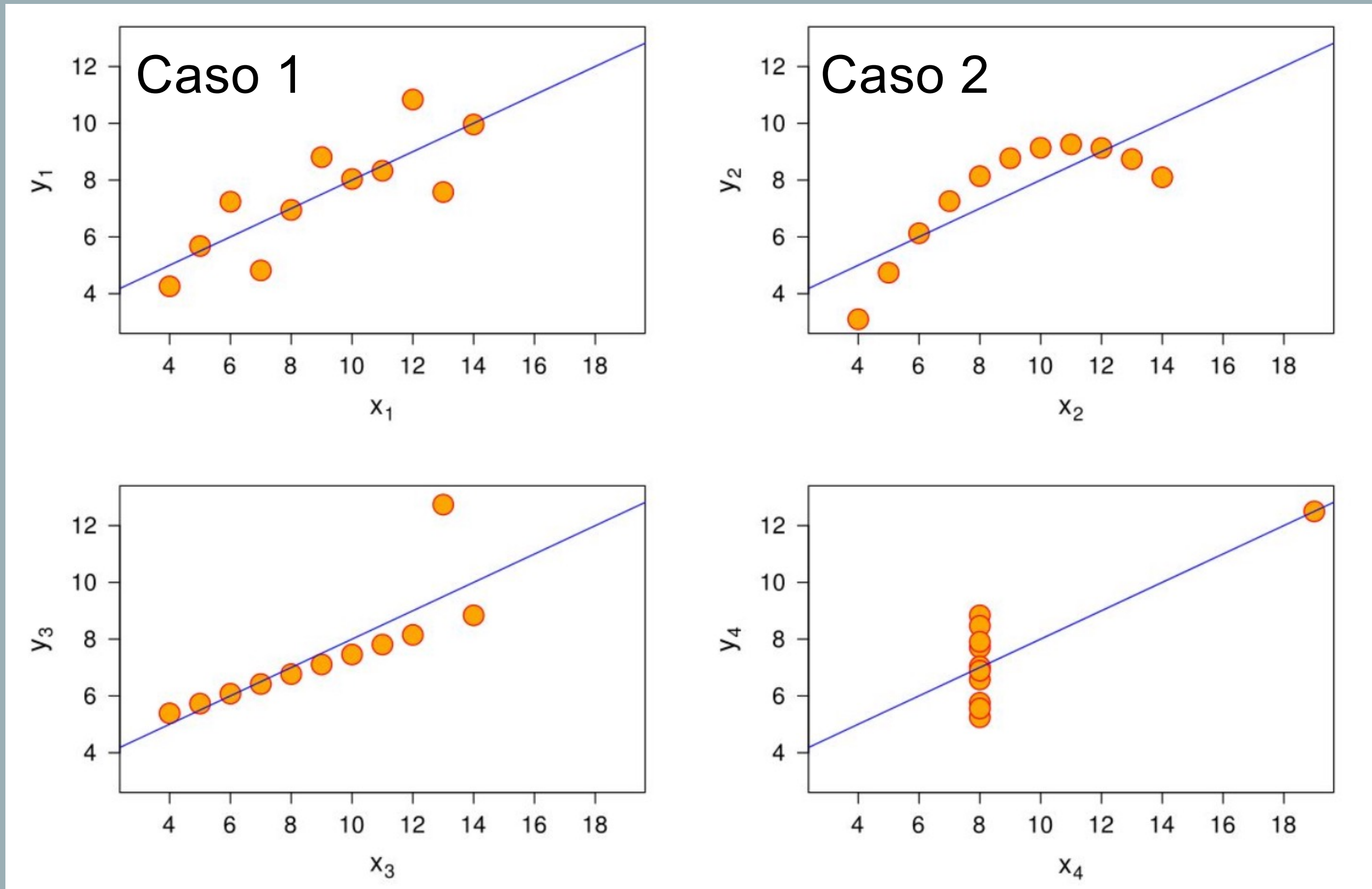
Bondad del ajuste

El cuarteto de Anscombe ($R^2 = 0.666$)

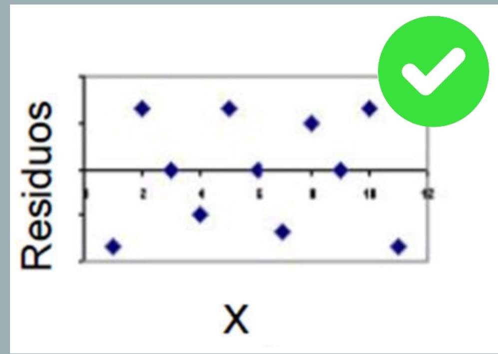


Bondad del ajuste

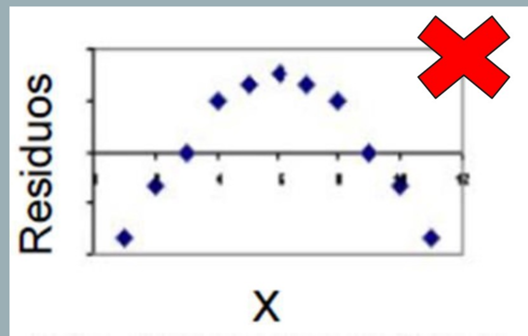
El cuarteto de Anscombe ($R^2 = 0.666$)



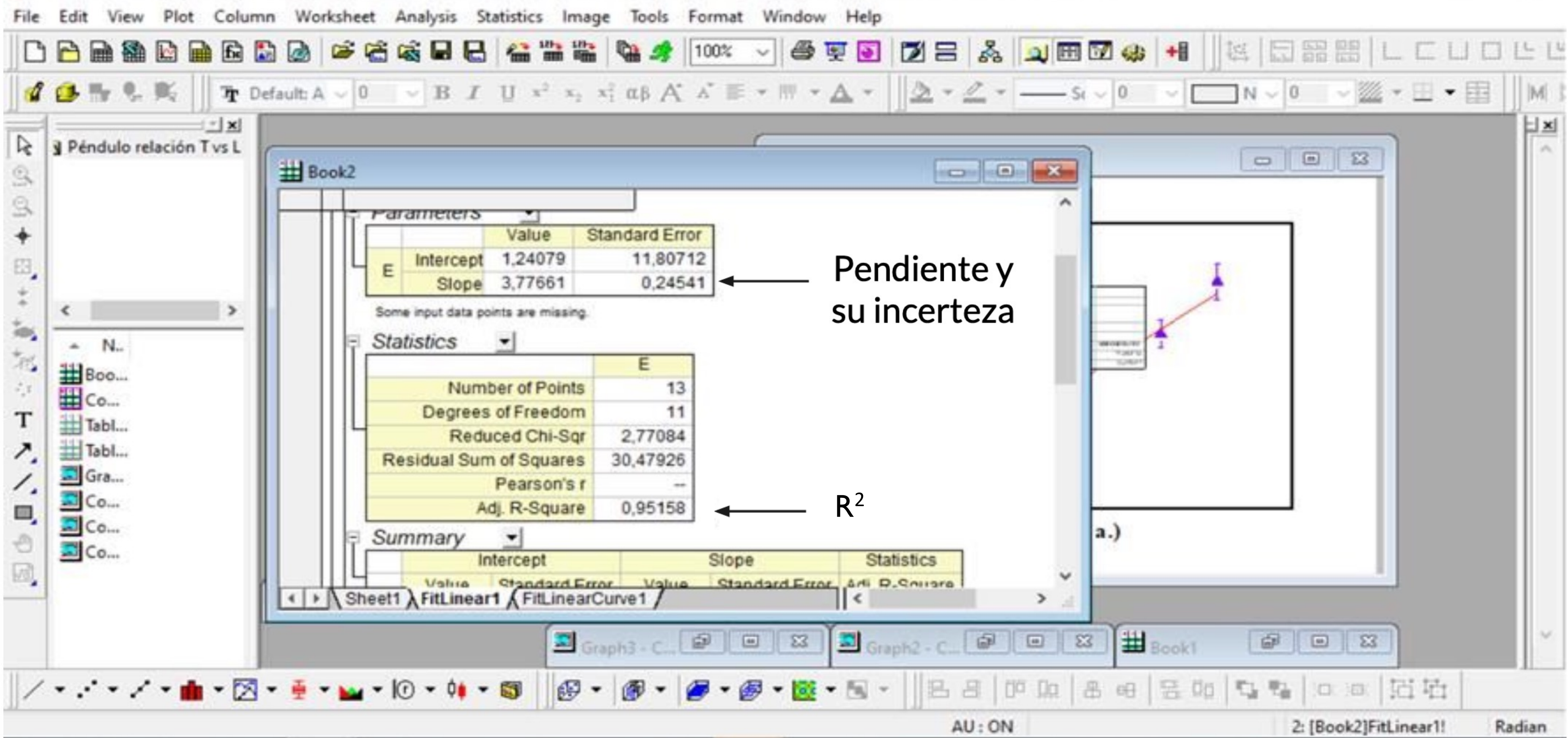
Caso 1



Caso 2



Cuadrados mínimos con Origin



Pendiente y su incerteza

R^2

Cuadrados mínimos con Origin