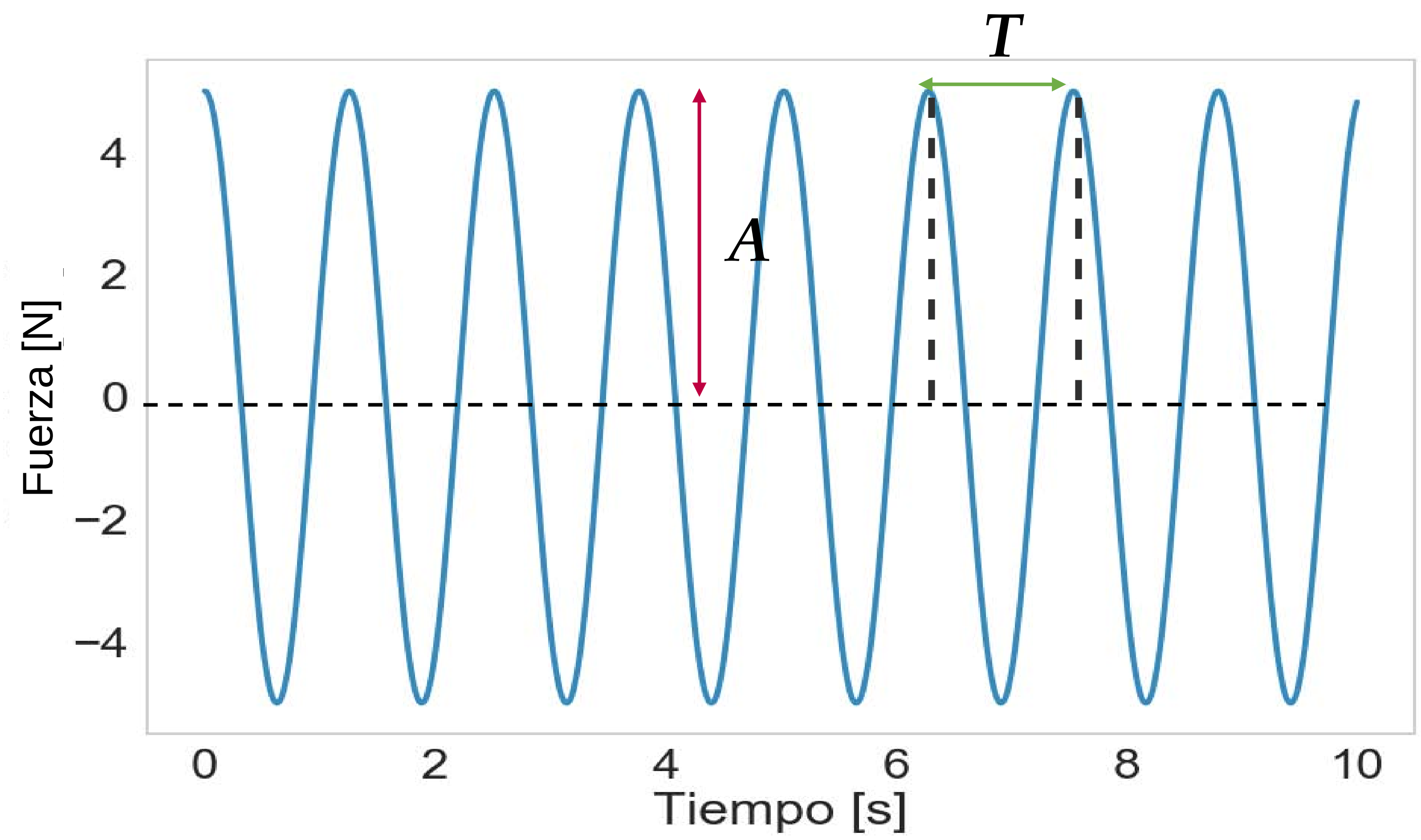
Movimiento oscilatorio

Parte 2: movimiento oscilatorio armónico amortiguado

Movimiento oscilatorio sin amortiguamiento

$$\ddot{y} + w_0^2 y = 0 \rightarrow y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi) \rightarrow F(t) \propto y(t)$$

$$F(t) = F_A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$



Frecuencia angular natural de oscilación

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(sistema masa – resorte)

Sistemas reales $\rightarrow$ mov. oscilatorio está amortiguado debido a la acción de fuerzas disipativas.

¿ Cómo será el amortiguamiento? $\rightarrow$ Depende de la relación funcional de la fuerza disipativa con las variables del problema.

Consideremos un sistema masa – resorte que se mueve en el seno de un fluido viscoso

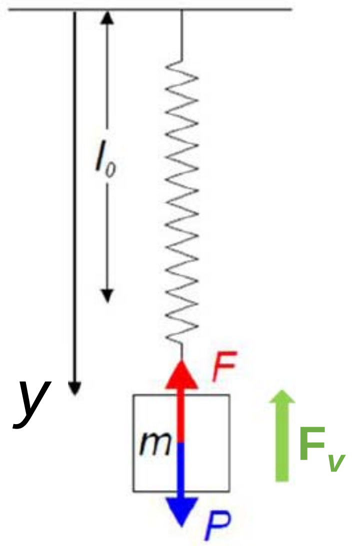
$\downarrow$

Habrá una fuerza que intenta frenar el movimiento

Supongamos esa fuerza de la forma:

$$\boxed{F_v = -b\,v = -b\,\dot{y}}$$

(fuerza viscosa o de fricción viscosa)



v: velocidad del cuerpo
b: constante que mide el grado de viscosidad del fluido

Movimiento oscilatorio amortiguado

- ¿varía la amplitud?
- ¿varía el período de oscilación a lo largo del movimiento?
- ¿como será el período respecto del movimiento sin amortiguamiento?

Aplicando la 2da Ley de Newton

$$mg - k(y - l_0) - b\,\dot{y} = m\ddot{y} \xrightarrow{\text{reagrupando}} \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega_0^2} y = g + \frac{kl_0}{m}$$

Definimos la **cte. de amortiguamiento del fluido:** $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

$$y = y_H + y_P$$

Se obtiene resolviendo

Ecuación homogénea: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + w_0^2 y = 0$

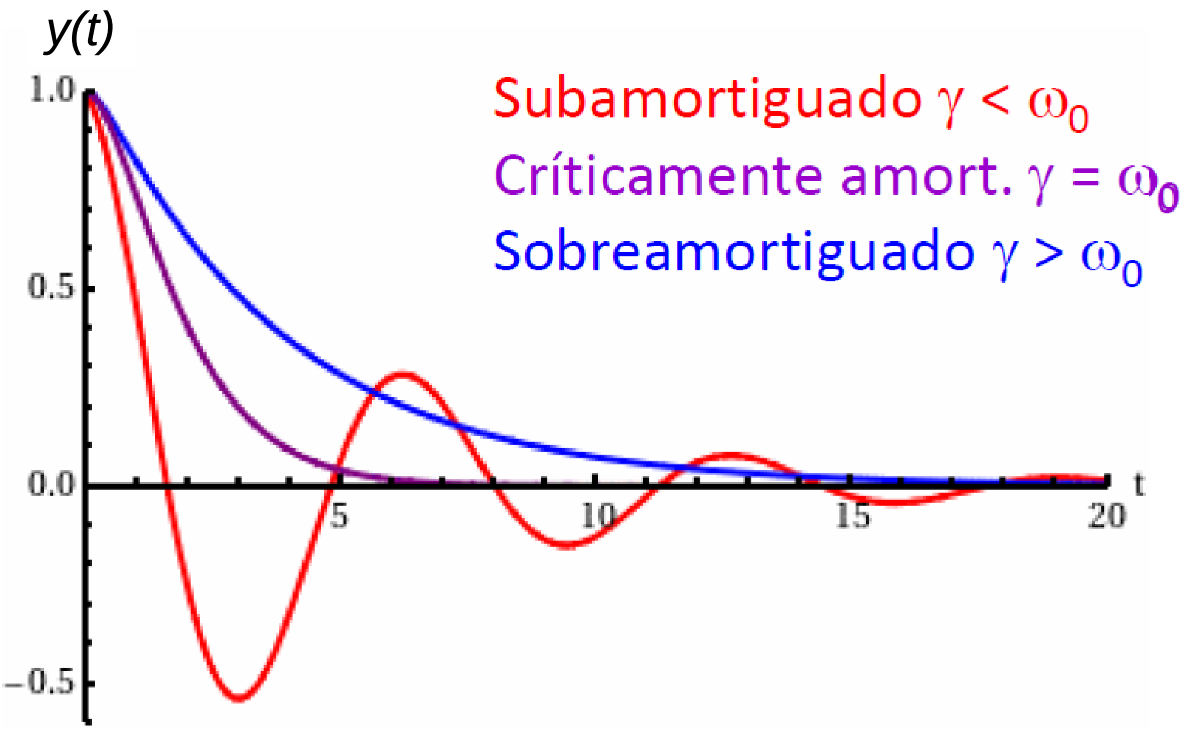
Solución particular: $y_P = l_0 + \dfrac{mg}{k}$

Movimiento oscilatorio amortiguado

Ecuación homogénea:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + w_0^2 y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Tres casos}$$

- Sobreamortiguado $\rightarrow \gamma^2 > w_0^2$
  (no oscila)
- Amortiguamiento crítico $\rightarrow \gamma^2 = w_0^2$
  (no oscila)
- $\boxed{\text{Subamortiguado} \rightarrow \gamma^2 < w_0^2 \text{ (oscila)}}$



Vamos a trabajar en el régimen **subamortiguado** $\gamma^2 < w_0^2$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + w_0^2 y = 0} \xrightarrow{\text{solución}} \boxed{y(t) = A\, e^{-\gamma t}\ \cos(\omega t + \phi)}$$

Cte. de amortiguamiento del fluido $\rightarrow$ $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

Frecuencia angular de la oscilación $\rightarrow$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

(representa la velocidad de cambio de la fase del movimiento)

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(sistema masa - resorte)

Unidades de $\boldsymbol{\varpi} \rightarrow$ **1/s**

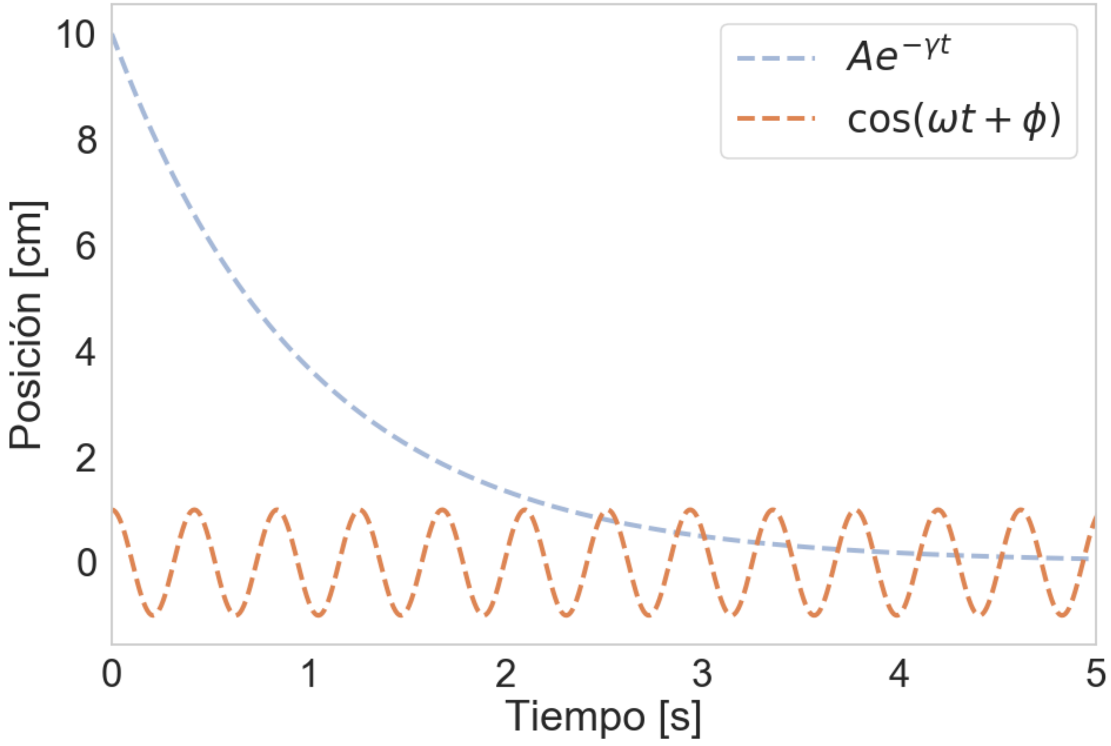
Relación entre ϖ y el período T $\rightarrow$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

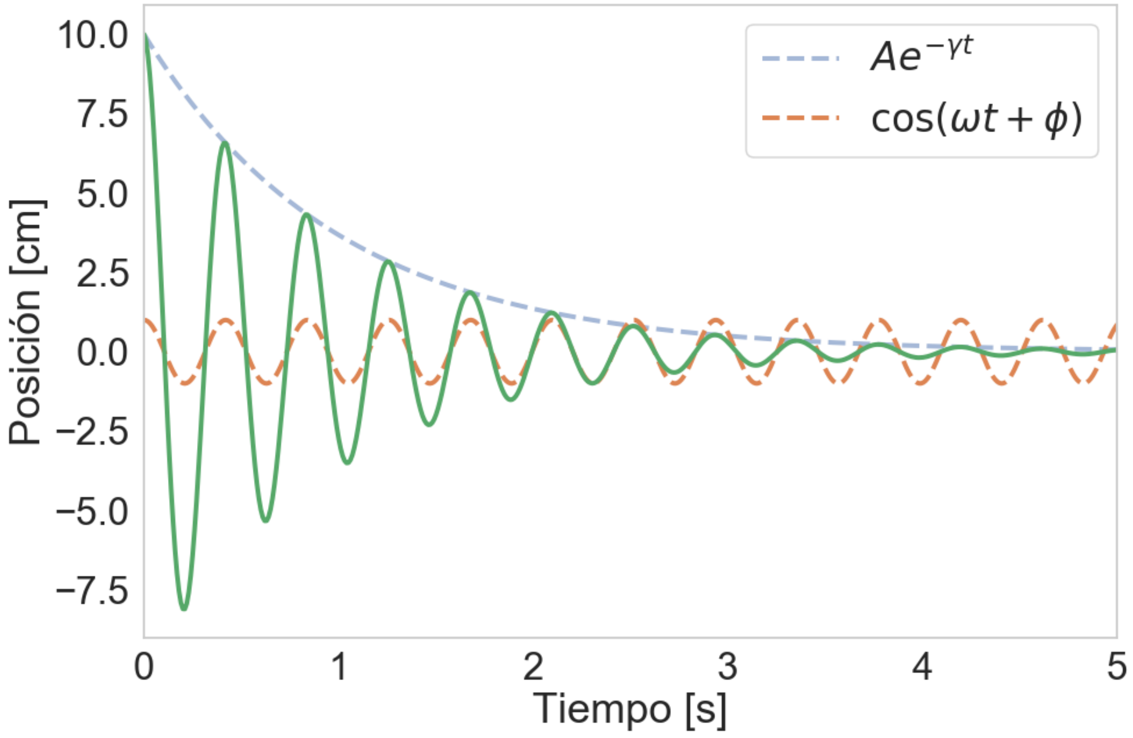
Grafiquemos las soluciones

$$\boxed{y(t) = A\, e^{-\gamma\, t}\, \cos(\omega\, t + \phi)}$$

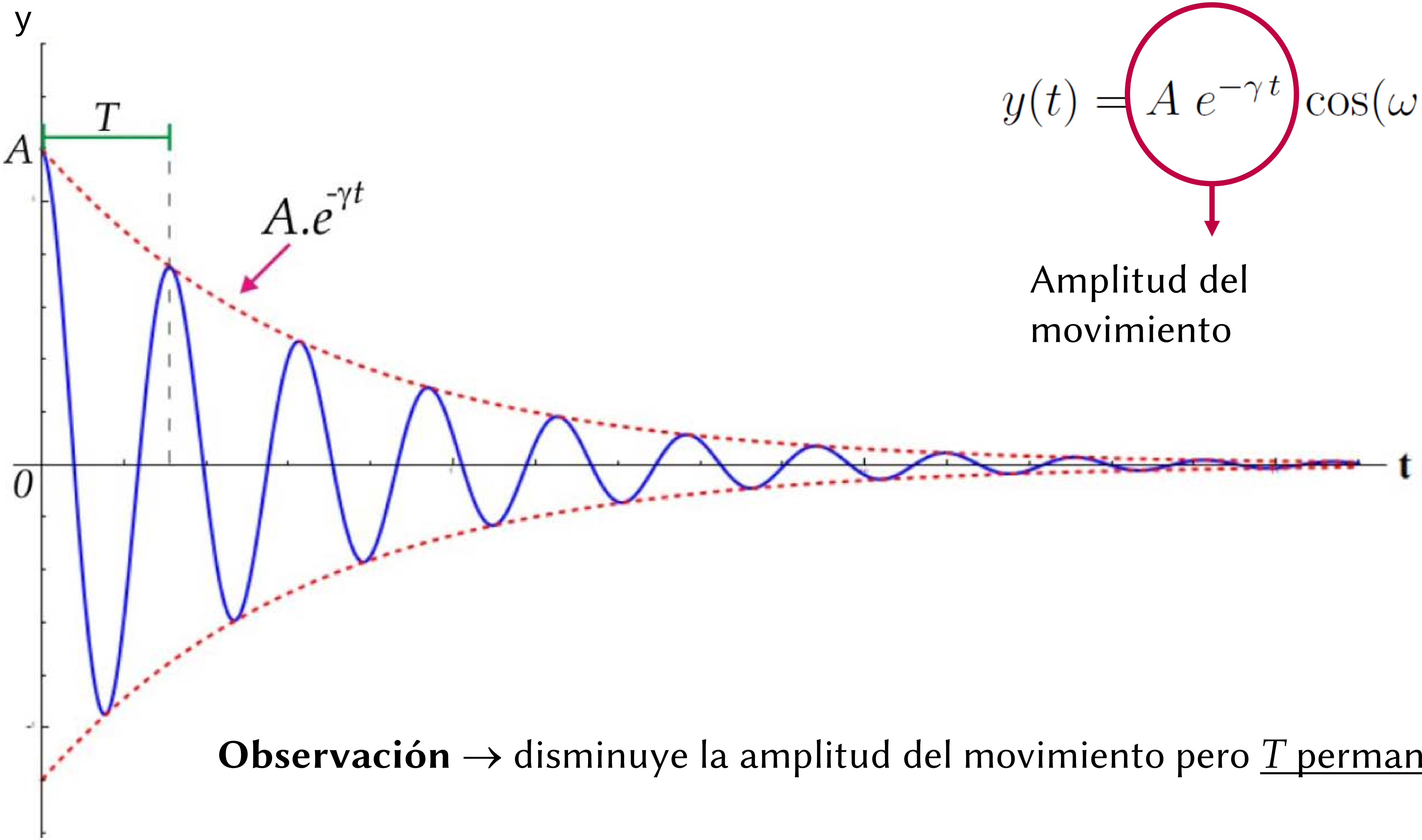
$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A\, e^{-\gamma\, t} \\ g(t) &= \cos(\omega\, t + \phi) \end{aligned}\right\}$$

Si las multiplicamos





Movimiento oscilatorio amortiguado



$$y(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitud del movimiento

Observación → disminuye la amplitud del movimiento pero T permanece constante.

Actividades → medir con el sensor de fuerza el movimiento de un sistema masa – resorte con amortiguamiento

1- Calibración el sensor de fuerza → El sensor entrega a la PC un valor de tensión. Para que el sensor arroje un valor de fuerza en Newton lo tenemos que calibrar.

Respuesta del sensor: lineal ⇒ necesito 2 valores de fuerza conocidas para la calibración.

$$Fuerza = K0 + K1.Voltaje \qquad K0, K1 = ctes$$

F1 y F2: fuerzas conocidas
V1 y V2: lecturas del voltaje.

Chequear calibración.

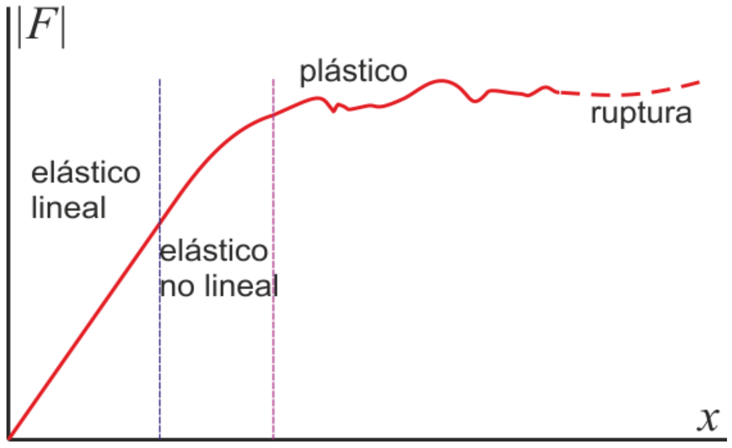
Fuerza	Voltaje
F1	V1
F2	V2

→ Determino *K0 y K1*

2- Determinar la contante elástica *k* del resorte

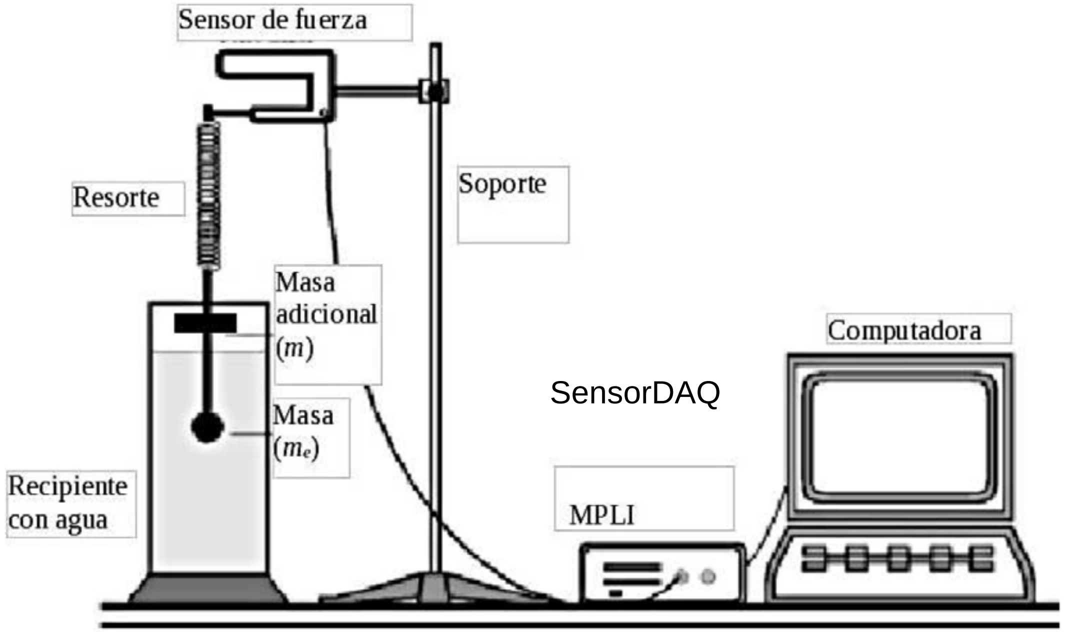
Resorte → **colgar masas ≤ 800 g** → régimen elástico lineal
Sensor de fuerza → Rango: 10 N

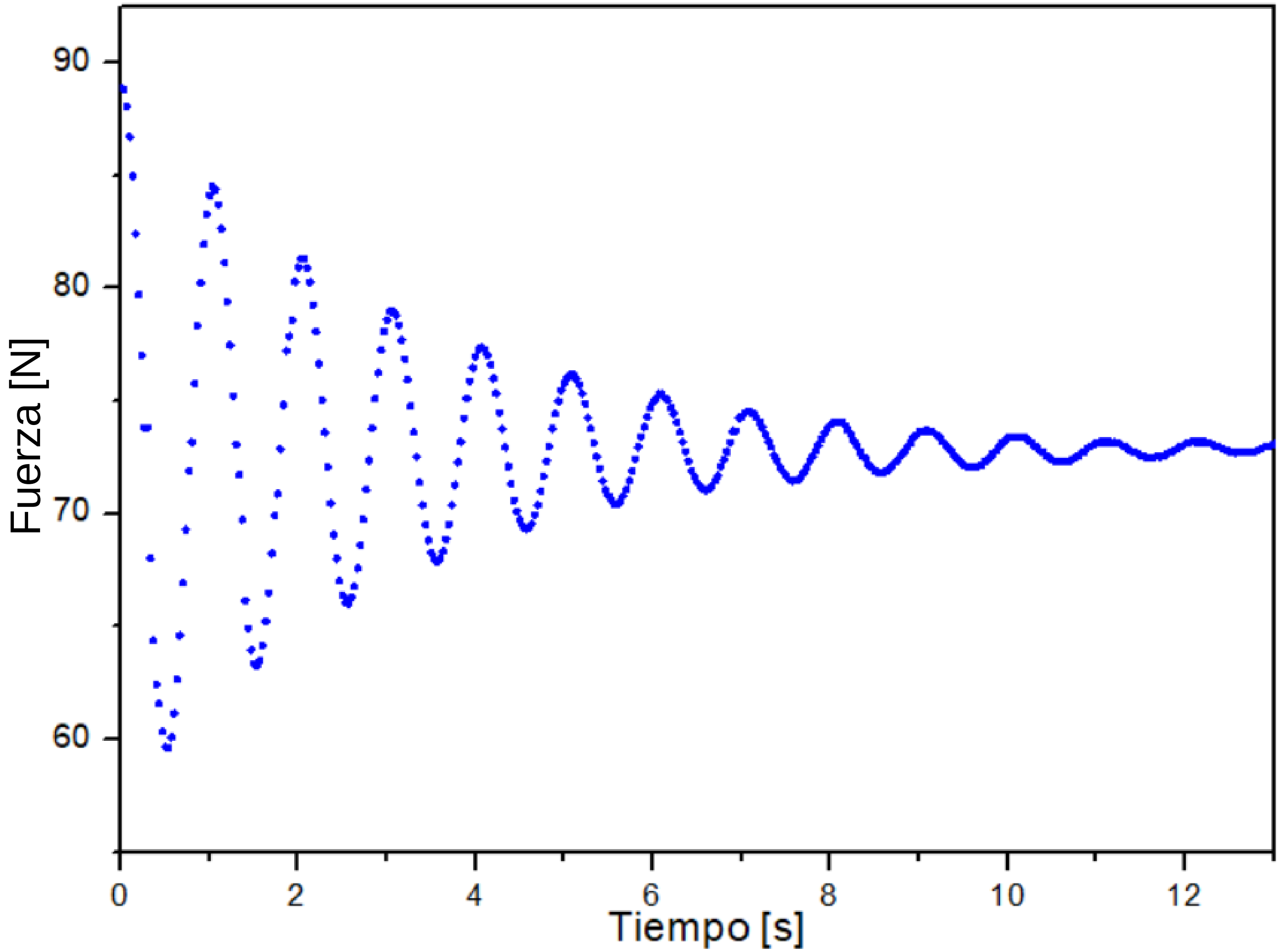
Medir Fuerza vs. Tiempo para 5 masas y calcular k con el método dinámico.
Importante: elegir las masas para cubrir todo el rango de trabajo



3- Medir con el sensor de fuerza el movimiento de un sistema masa – resorte con amortiguamiento

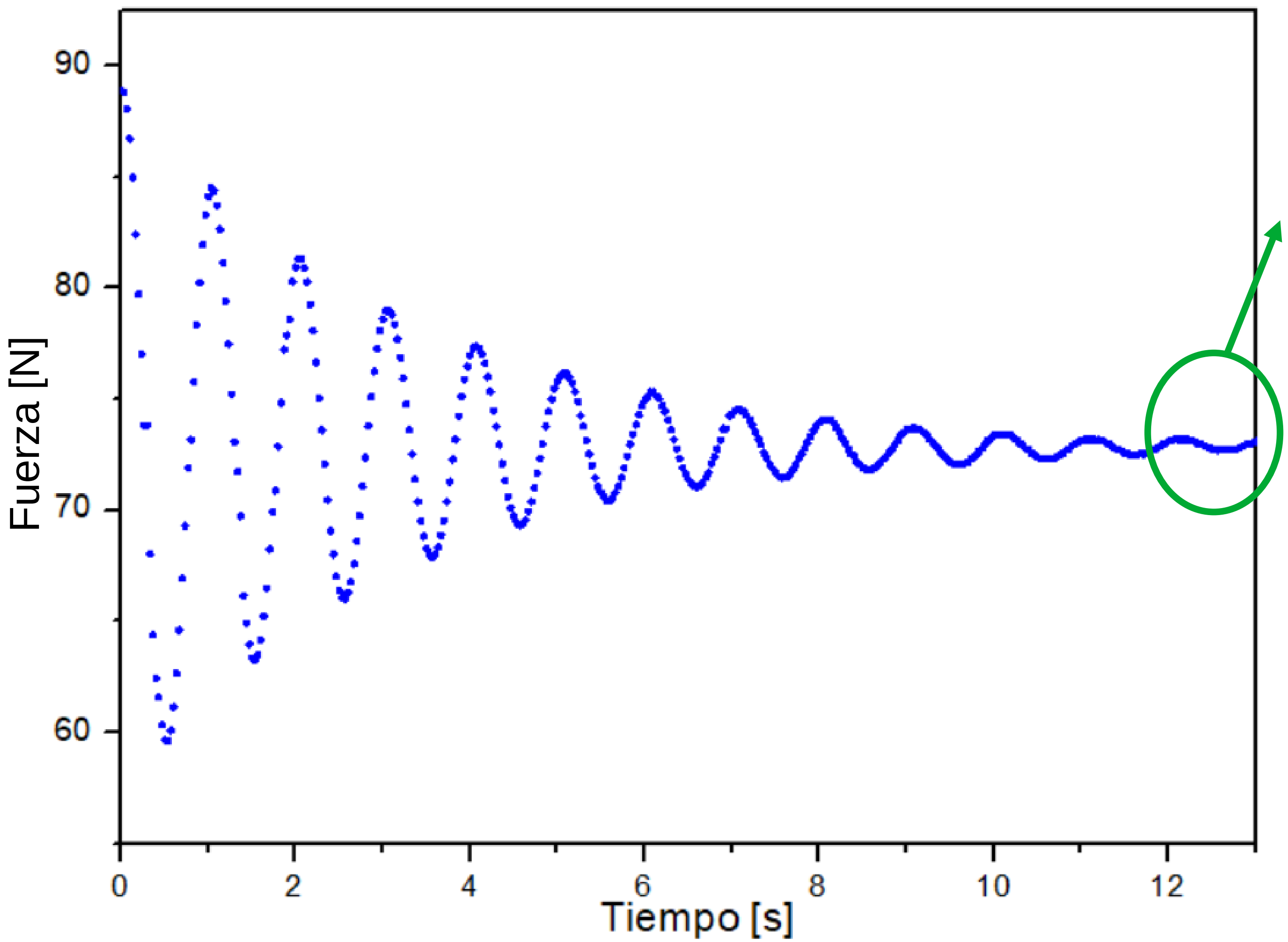
$$F(t) = F_A\, e^{-\gamma t}\, \cos(\omega\, t + \phi) + F_0$$





Observación → hay que incluir las incertezas en el gráfico.

Objetivo → Hallar el coeficiente de amortiguamiento γ por distintos métodos y determinar otros parámetros del movimiento.



Si no se observan oscilaciones eliminar los últimos datos para el análisis. No aportan información.

¿Cómo encuentro el valor γ de a partir de estos datos?

Veremos 4 métodos de análisis.

Método 1 →

Sabemos que vale $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

$$F(t) = F_A\, e^{-\gamma t}\ \cos(\omega\, t + \phi) + F_0$$

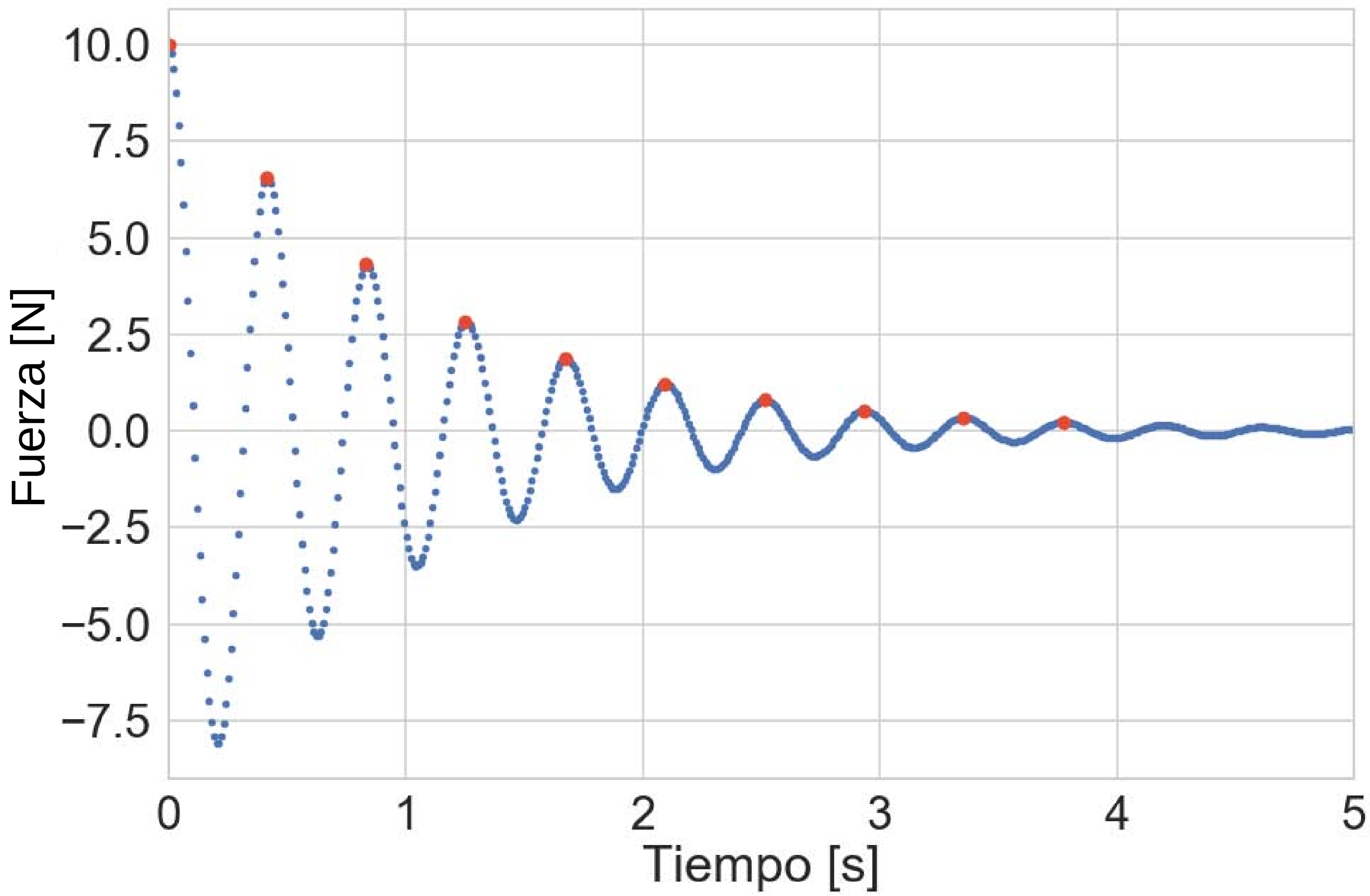
Aquí T es el período de la oscilación

¿Cómo encuentro el valor γ?

↓

1- Busco máximos
2- Obtengo T (promedio varios períodos)
3- Comparo ω y ω_0.

Para determinar el período T con Origin ver tutorial en la página de la materia**(Material adicional)**



Método 2 →

¿Cómo encuentro el valor γ?

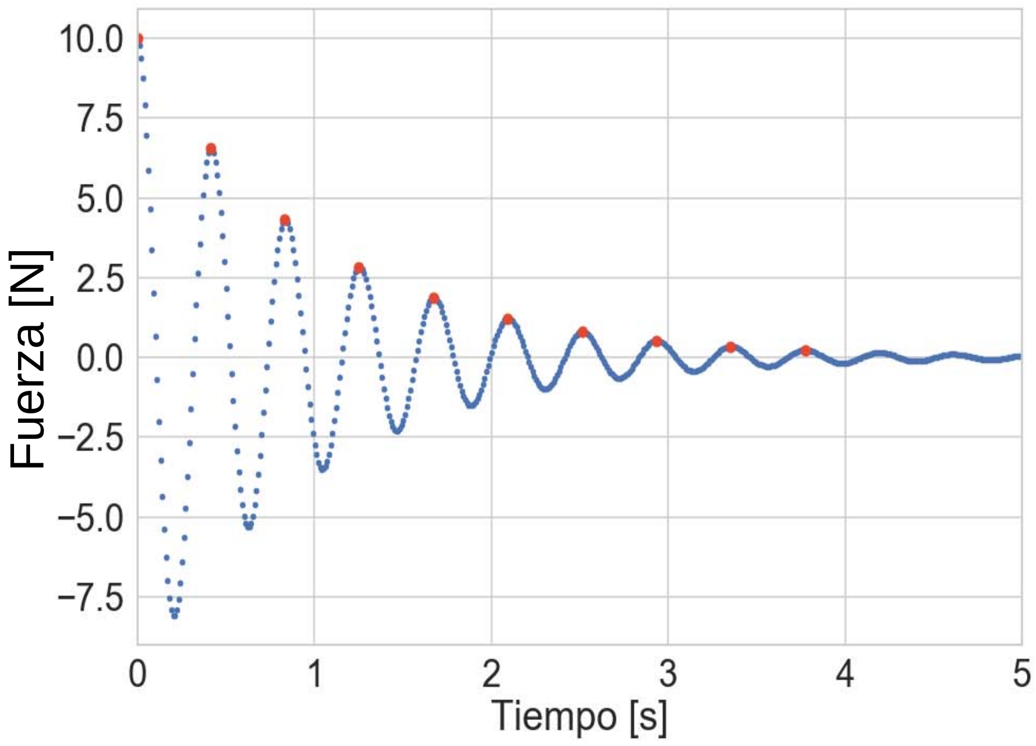
1- Busco máximos

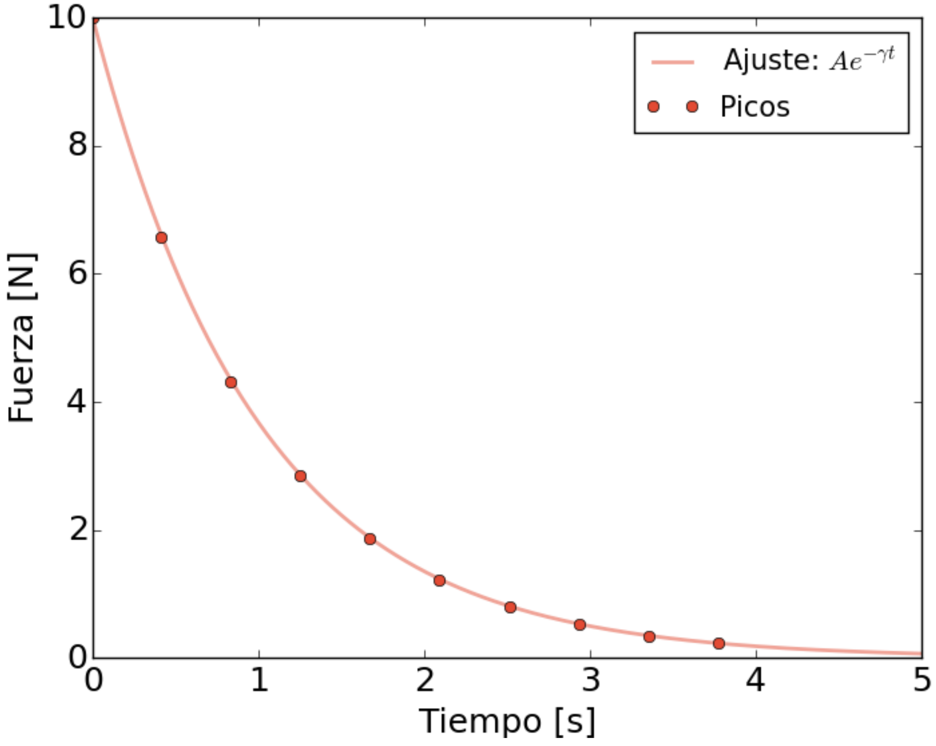
2- Ajuste **no lineal**

$$F(t) = F_A\, e^{-\gamma\, t} \cos(\omega\, t + \phi) + F_0$$

Amplitud del movimiento

$$F_{max}(t) = F_A\, e^{-\gamma\, t} + F_0$$





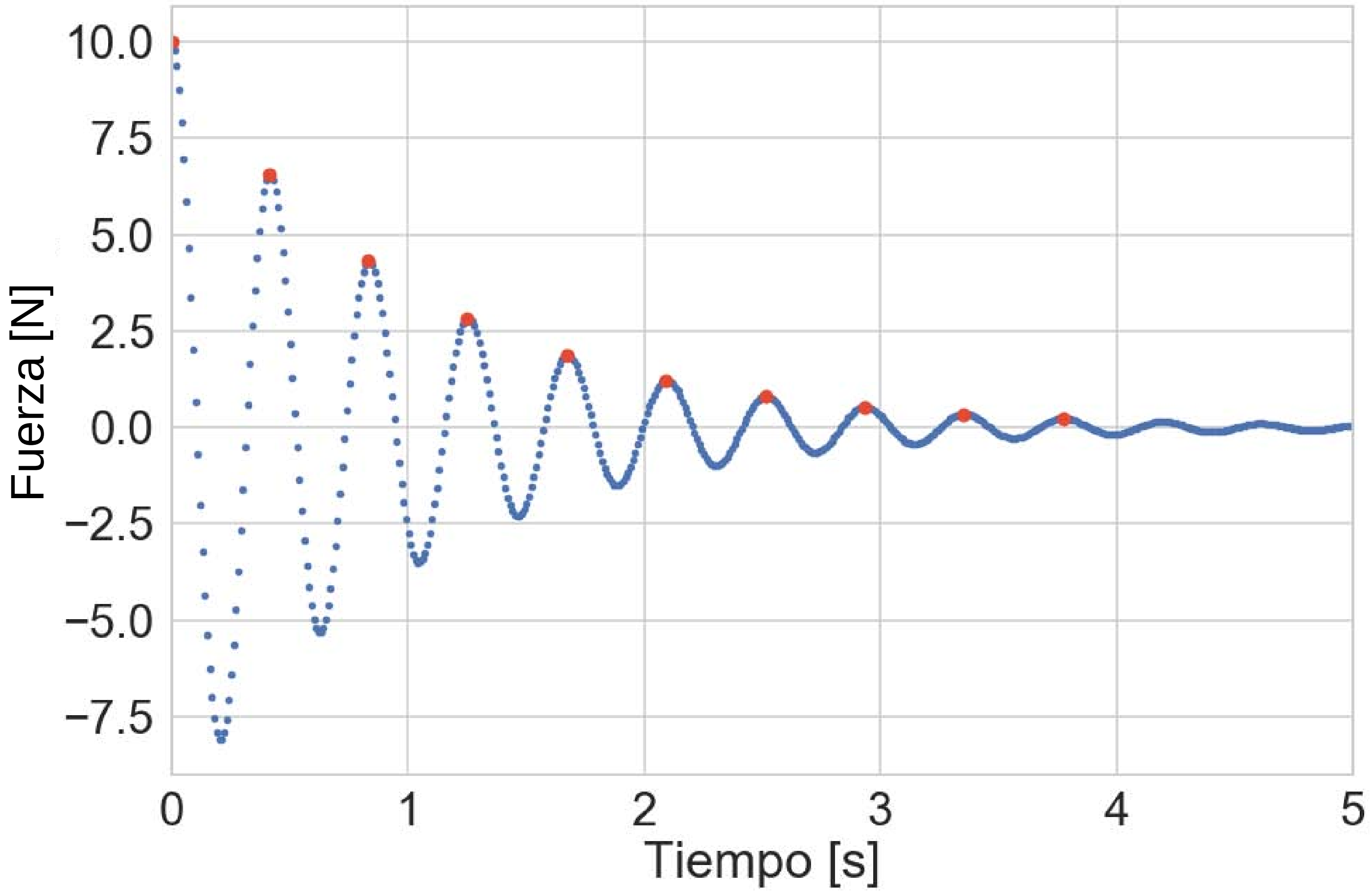
Método 3 →

$$F(t) = F_A\, e^{-\gamma\, t}\, \cos(\omega\, t + \phi) + F_0$$

Amplitud del movimiento

¿Cómo encuentro el valor γ?

1- Busco máximos
2- linealizo
3- Ajuste **lineal** por cuadrados mínimos ponderados



Vimos que en general

$$F_{max}(t) = F_A\, e^{-\gamma\, t} + F_0$$

¿Cómo hago la linealización?

¿Cómo hago la linealización?

Importante → linealización ≠ regresión lineal

$$F_{max}(t) = F_A\, e^{-\gamma\, t} + F_0$$

$$F_{max}(t) - F_0 = F_A\, e^{-\gamma\, t}$$

(podemos aplicar logaritmo natural)

$$ln(F_{max}(t) - F_0) = ln(F_A\, e^{-\gamma\, t})$$

$$ln(F_{max}(t) - F_0) = ln(F_A) + ln(\, e^{-\gamma\, t})$$

$$\boxed{ln(F_{max}(t) - F_0) = ln(F_A) - \gamma\, t}$$

Es de la forma

$$y = m\, x + B$$

Expresado de esta manera
Pendiente → relacionado con γ
Ordenada al origen → asociado con $\ln(F_A)$

Si graficamos $\rightarrow$

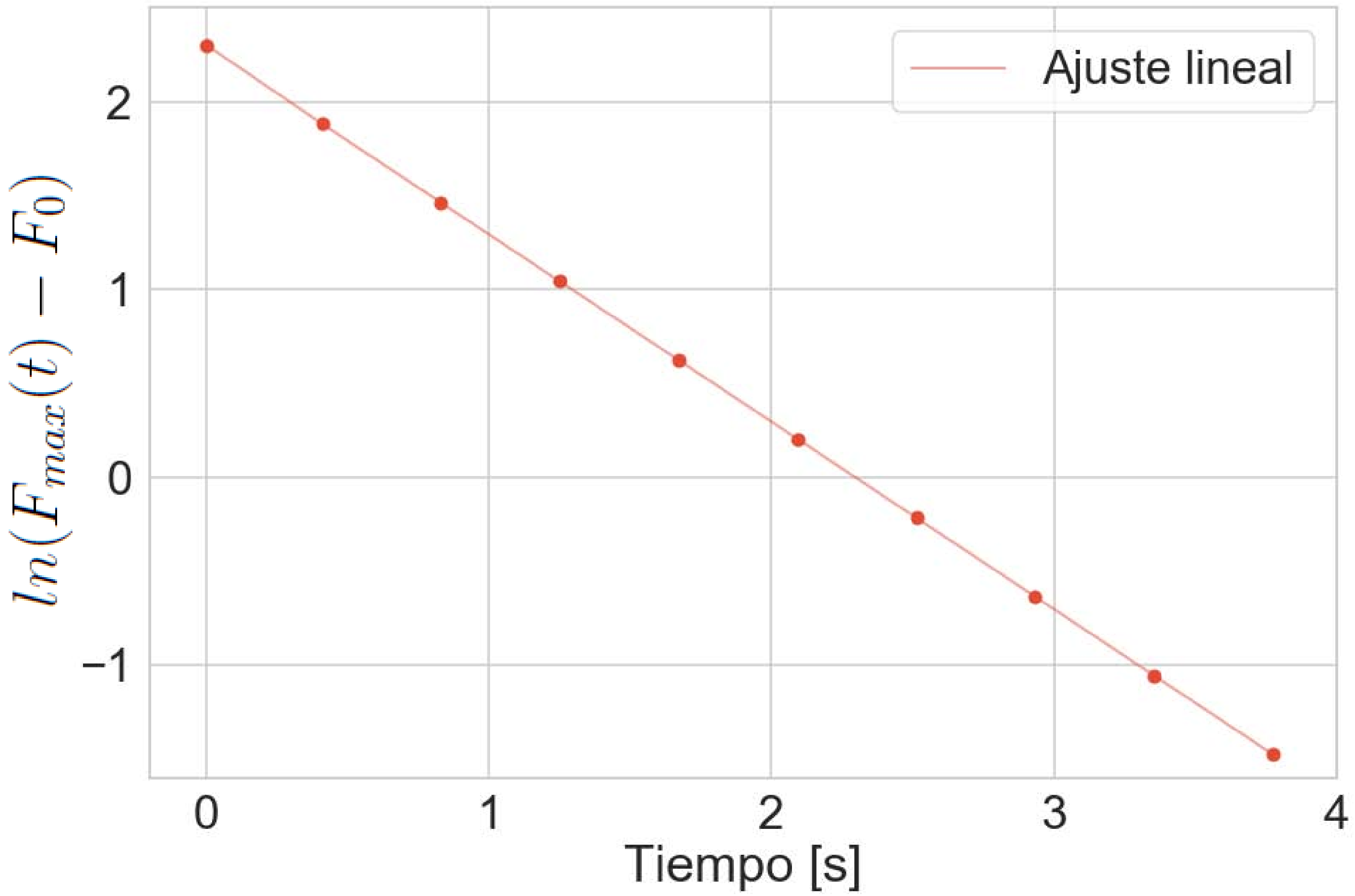
Relación linealizada

$$\downarrow$$

$$ln(F_{max}(t) - F_0) = ln(F_A) - \gamma\, t$$

$$\downarrow$$

Puedo hacer un **ajuste lineal** por cuadrados mínimos para determinar los valores de la pendiente y la ordenada al origen de la recta que mejor describe los datos experimentales.



Observación $\rightarrow$ comparar los errores relativos de las magnitudes medidas para decidir la variable que va en el eje x. **Aplicar *ln* representa un cambio de escala en el gráfico.**

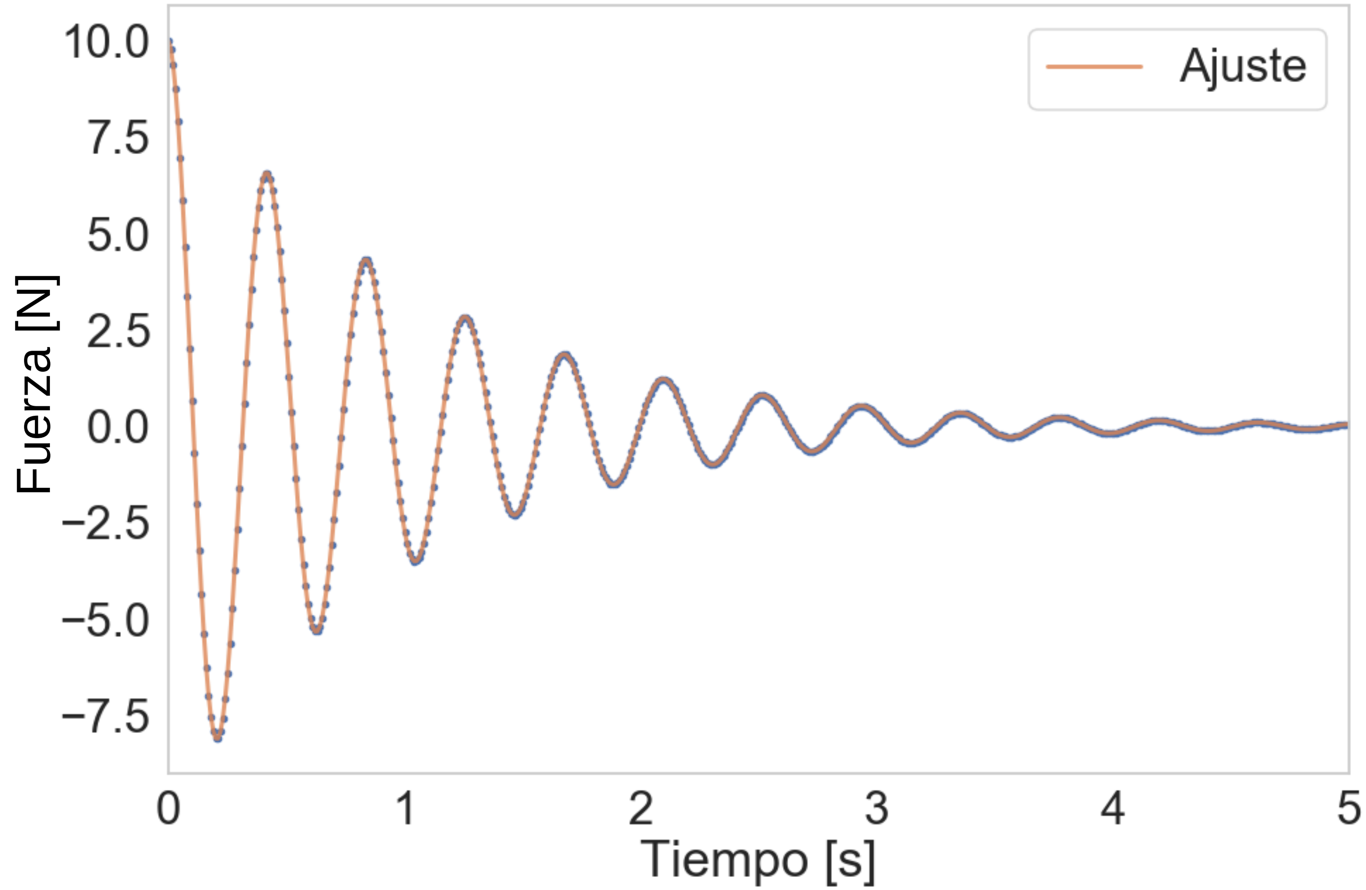
Método 4 →

¿Cómo encuentro el valor γ?

↓

Ajuste **no lineal**

$$F(t) = F_A\, e^{-\gamma t}\ \cos(\omega\, t + \phi) + F_0$$



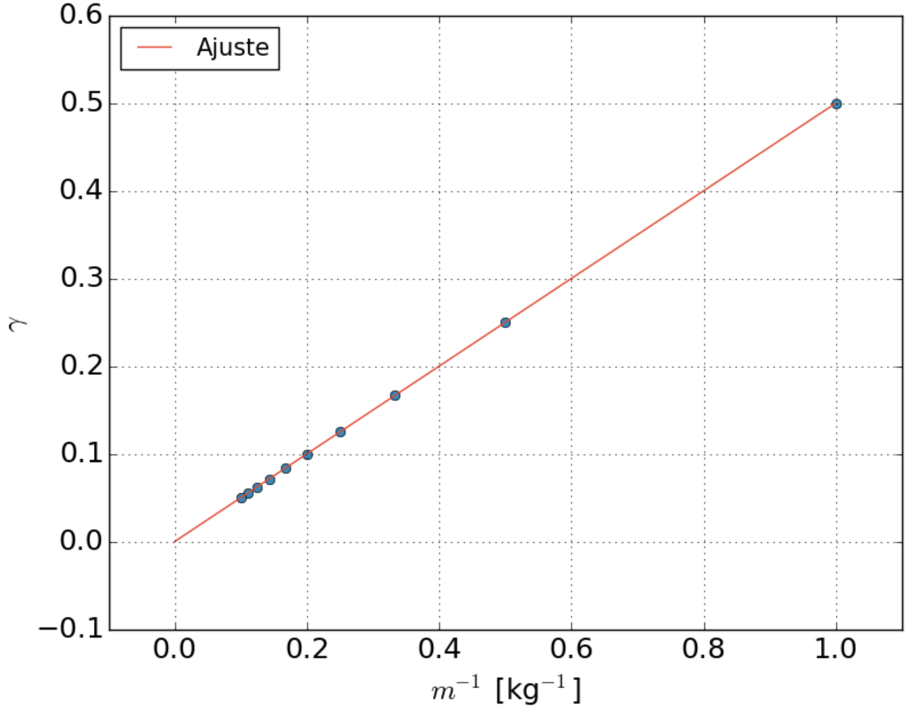
Ajuste por la función completa → necesito estimar previamente los valores de los parámetros.

Ver tutoriales en Material Adicional

Otros análisis → Midiendo Fuerza vs. Tiempo para distintas masas

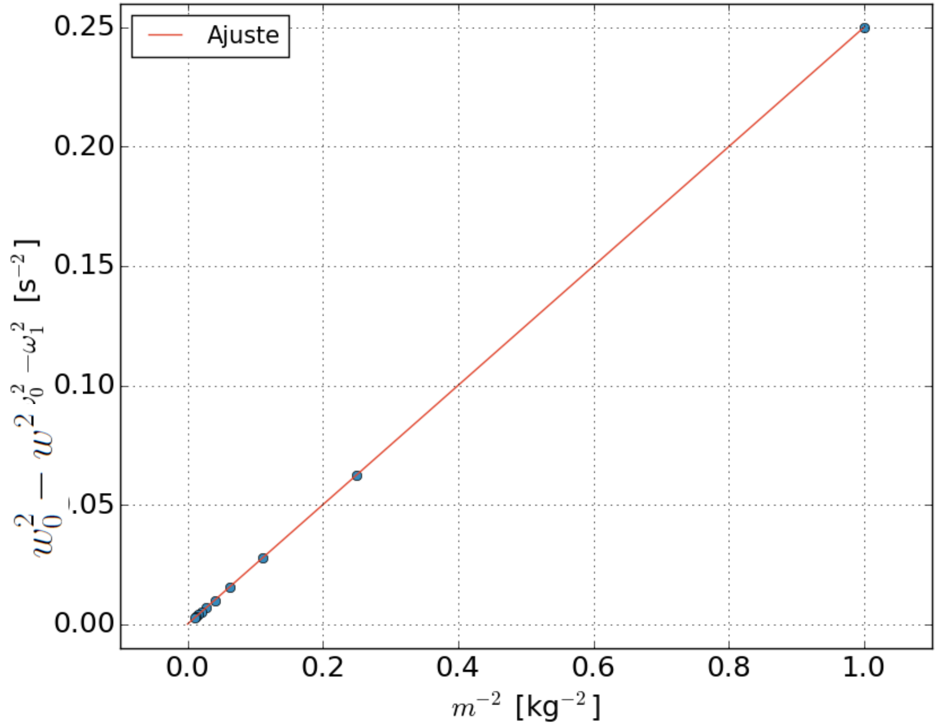
Encontrar γ para distintas masas y obtener el coeficiente b con algún método de análisis.

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$



Evaluar si se puede determinar el coeficiente b con esta propuesta

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \longrightarrow \frac{b^2}{4m^2} = w_0^2 - w^2$$



La diferencia entre ω0 y ω es muy chica y puede ser difícil de medir.

Resumen del análisis

- **Queremos obtener el valor de γ:**

- **Método 1: a partir de la medición del período de la oscilación** $\rightarrow$ La diferencia entre ω y ω_0 puede que no sea significativa. Evaluar si se llega a un resultado confiable del valor de γ.

- **Método 2: a partir de un ajuste no lineal de los máximos de la oscilación**

- **Método 3: a partir de un ajuste lineal de los máximos de la oscilación** (previa linealización)

- **Método 4: a partir de un ajuste no lineal usando todos los datos** $\rightarrow$ necesito estimar previamente los valores de los parámetros.

Comentarios finales

- Asignar error al tiempo, a la masa y a la fuerza.
- Comparar los valores de γ obtenidos por distintos métodos. ¿Son indistinguibles? Algún método no es apropiado para hallar γ?
- ¿ Con qué método de análisis se obtiene el resultado más preciso?
- **Importante:** $\boldsymbol{\gamma}$ **tiene unidades!** ¿Cuál es?
- **Influencia de la masa del resorte:** El efecto de la masa del resorte m_r en la frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte, ha sido estudiado por varios autores.

$m_r \rightarrow$ Masa del resorte
$m_d \rightarrow$ Masa del dispositivo oscilando dentro del agua
$m_p \rightarrow$ Masa extra que se puede añadir al sistema

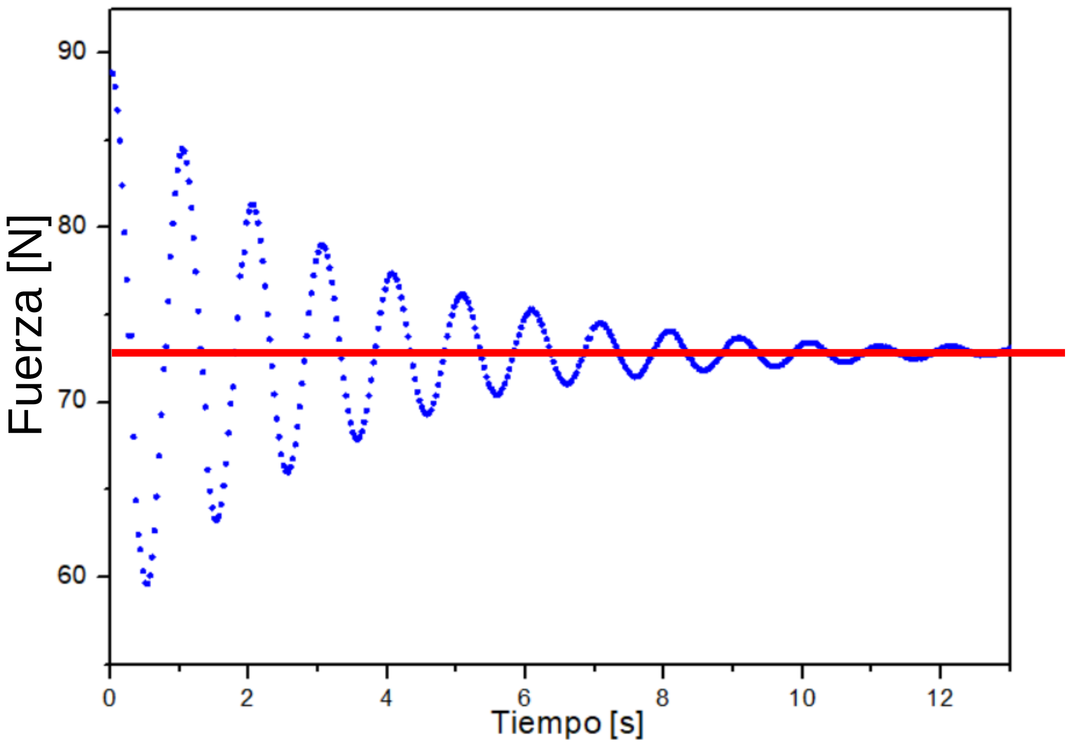
Masa total efectiva del sistema:

$$\boxed{m = \frac{m_r}{3} + m_d + m_p}$$

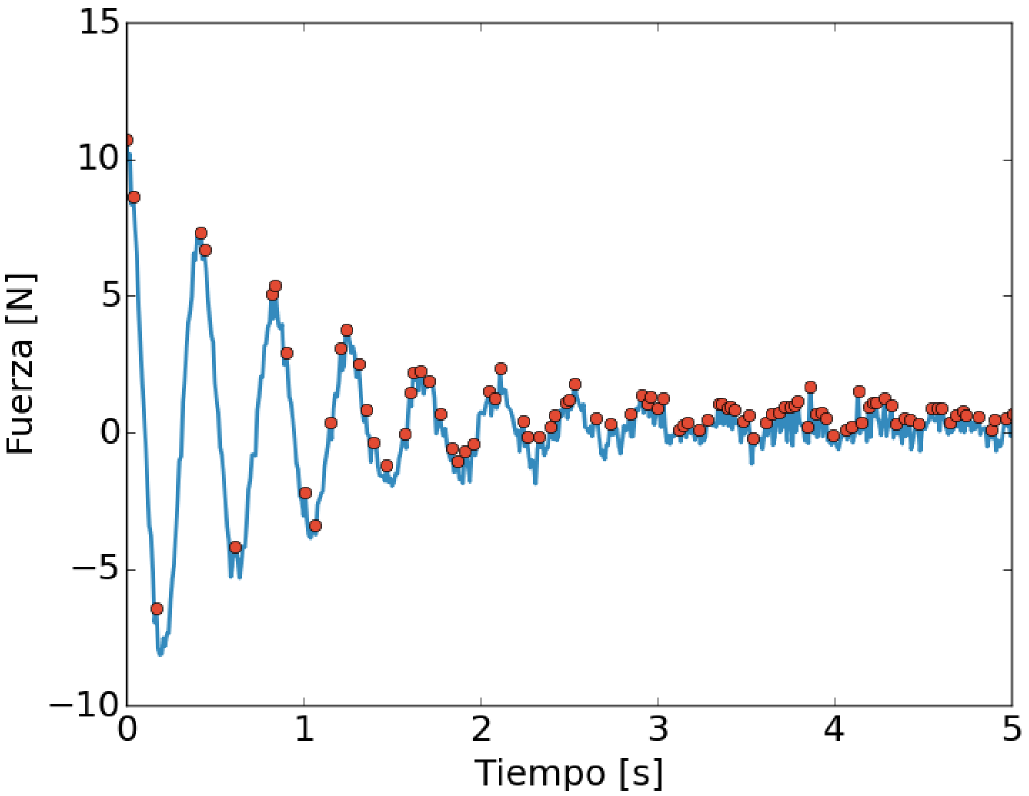
La masa efectiva del sistema con un resorte de longitud L y constante k se puede determinar encontrando su energía cinética T.

Comentarios finales

- Sugerencia: conviene empezar con →
- **1**- Hacer estadística sobre los datos de la **fuerza** y calcular la media.
- **2**- Restar el valor medio a todos los valores de la posición (usar Set Colum Values del Origin). Así tengo la señal oscilando en torno a 0.
- **3**- Ahora sí aplicar los métodos 1, 2, 3 y 4 para obtener γ.



La masa oscila alrededor de la posición de equilibrio. Ese valor lo puedo encontrar a partir de la media de la posición.



Con una señal real, buscar picos puede no ser tan fácil.

Resumen de actividades (al menos)

- Calibrar el sensor de fuerza

- Determinar la constante elástica del resorte

- Caso amortiguado: Describir el problema para una sola masa. Buscar picos y calcular γ con distintos métodos. ¿Qué otros parámetros se pueden medir?

- Hacer mediciones para distintas masas y relacionarlas . Calcular el coeficiente de viscosidad *b por distintos caminos.*

- ¿Son consistentes los resultados? ¿Funciona el modelo?