Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2024

Laboratorio 1 B: miércoles 14-20 hs

Lucía Famá, Federico Trupp,
Camila Borrazás, Lucía Novacovsky

REPASO DE LA CLASE PASADA …

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}}$$

Clase de Medición

$\boldsymbol{\bar{x}}$**:** Valor más representativo (x_0)

Δx**:** Incerteza Absoluta

Fuentes de incertezas

<u>REGLA 2</u> DE LABORATORIO 1: NUNCA REPORTO UN RESULTADO SIN SU INCERTEZA Y UNIDADES

Mediciones Directas (MD)

1: Pesa como fuente de incerteza INSTRUMENTAL

JAMÁS MIDO UNA SOLA VEZ UNA MF !!!!

1 - Si los datos son todos iguales

⇨ $\overline{x}$ = número leído en el instrumento

⇨ $\Delta x = \sigma_{ap}$ ⇨ $x = (\bar{x} \pm \sigma_{ap})\ Ud.$

$\sigma_{ap} = 0{,}01\ s$

$x = (13{,}16 \pm 0{,}01)\ s$

2 - Si hay datos que difieren entre sí

⇨ $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\Delta x = ?$

Orienta la Tabla (Clase 1)

$$P = \frac{R}{\overline{x}}\,100$$

Mediciones Directas (MD)

Caso Tabla 2.D) Si $\boldsymbol{P} > \mathbf{15\%}$

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

¿Cuál es el valor de T? ⇨ $T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud.$

13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

resolución
$0{,}01\ s$

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$$

$$\Delta T = ???$$

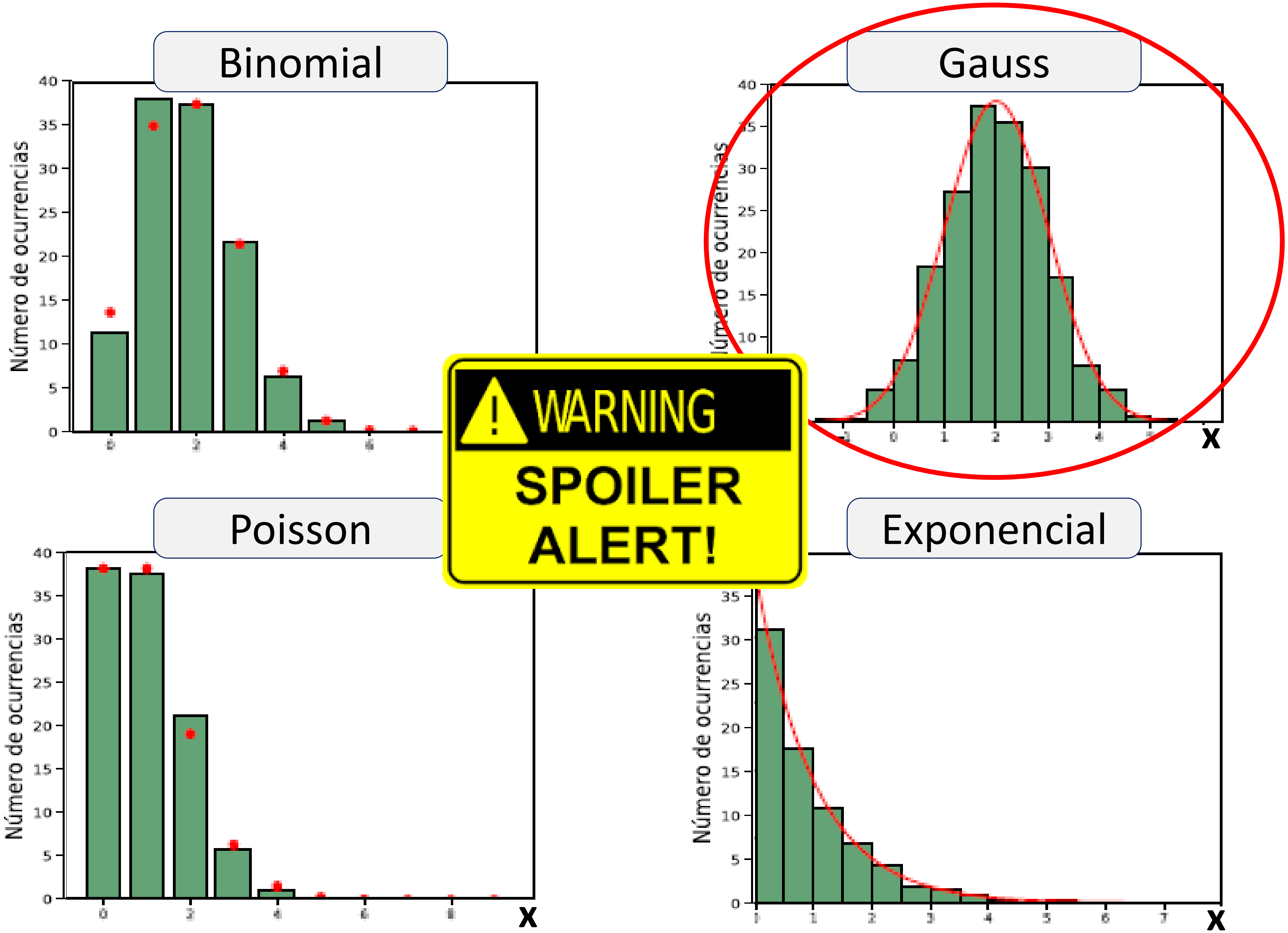
Objetivos de la clase de hoy

Determinar la incerteza absoluta Δx de medidas aleatorias

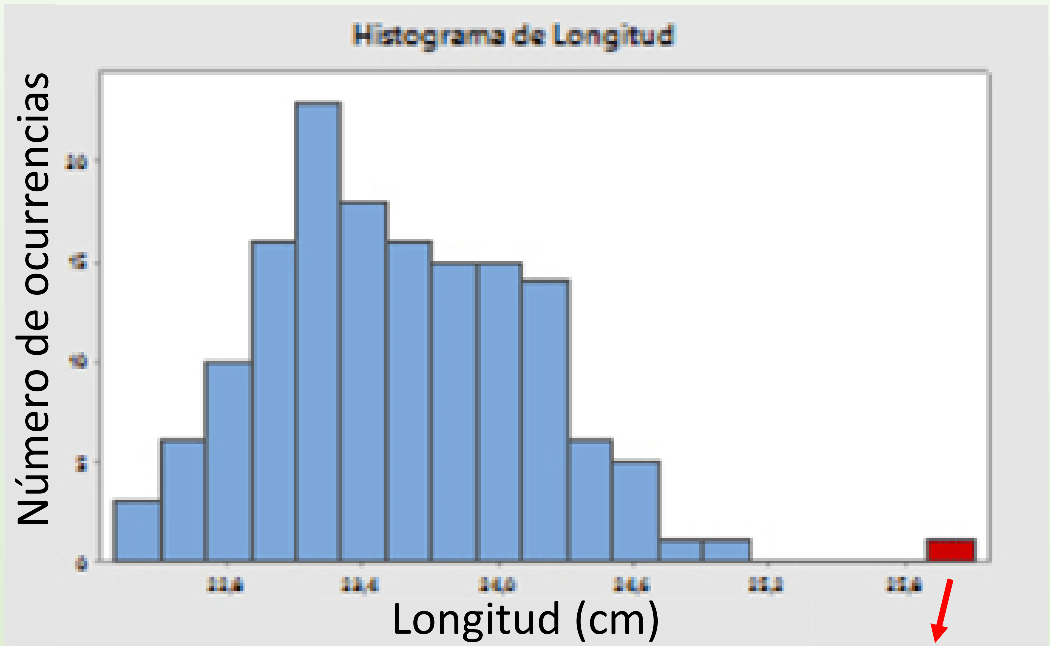
Comprender y visualizar la teoría (estadística) a partir de un experimento de un péndulo simple.

Obtener el resultado del período del péndulo y del período del faro

Ejemplos de distribuciones

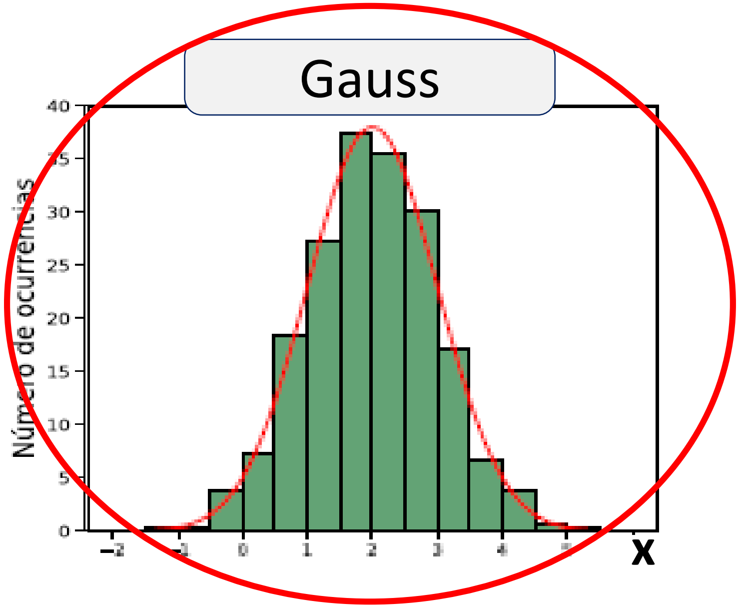


Cuánta info me da un Histograma!



Medida “raras”

Asumimos distribución Gaussiana

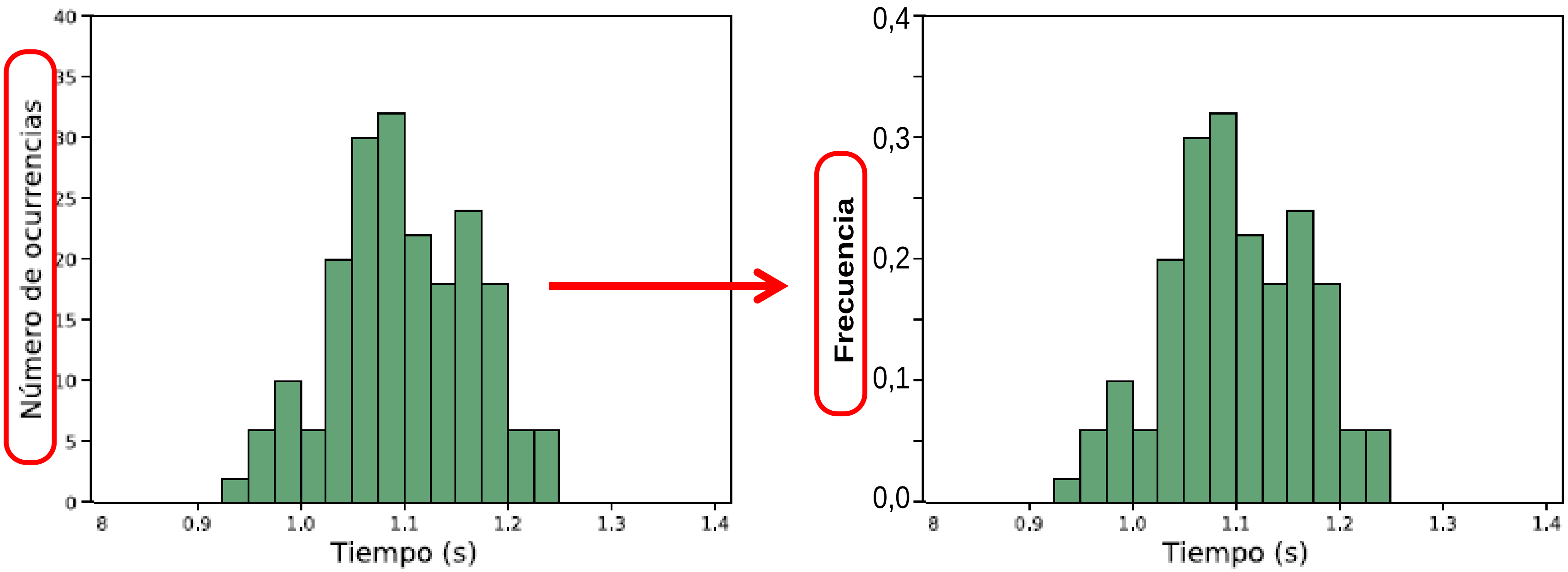


$$N \geq 30$$

¿Cómo se comporta un Histograma según el número de mediciones *N* realizadas?

Para poder comparar Histogramas

$$\frac{Nº\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$



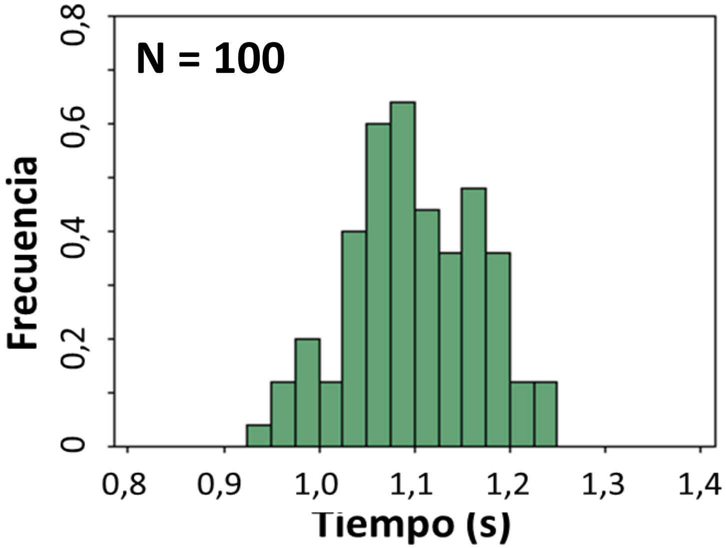
Condición de Normalización

$$\sum_j Número\ de\ ocurrencias_j = N$$

$$\sum_j F_j = 1$$

¿Si aumenta N?

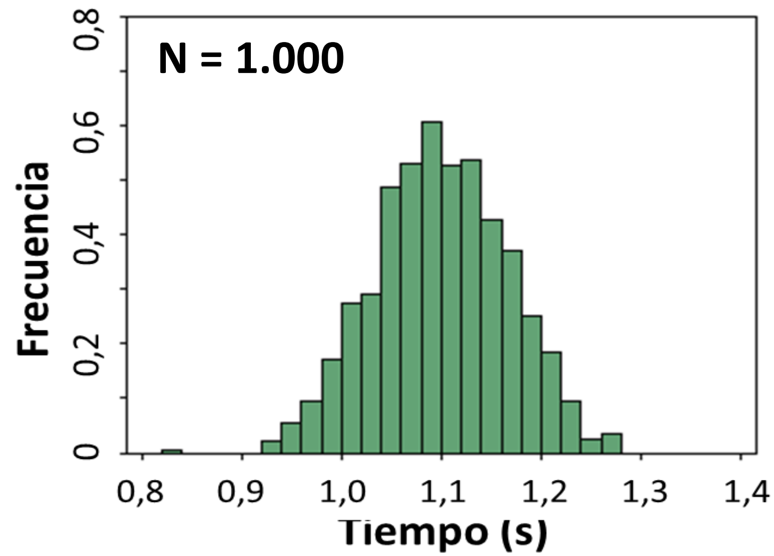
Regla de Sturges $C = 1 + 3{,}322 \log(N)$

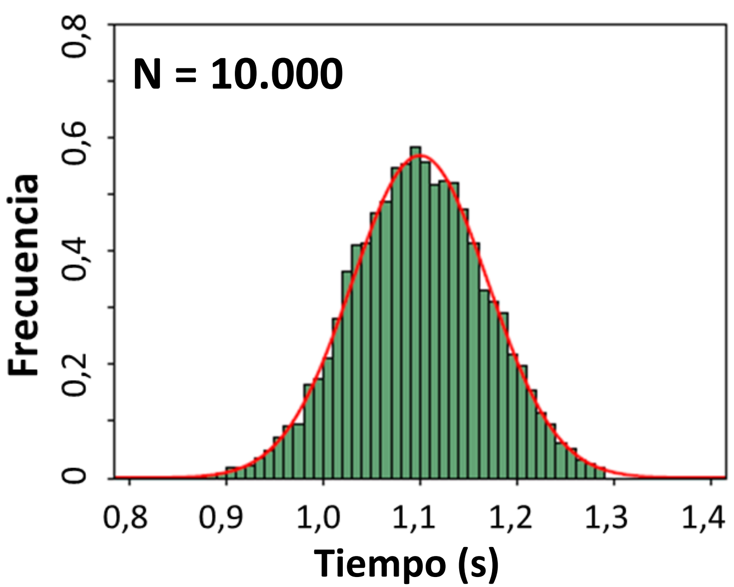


$\uparrow$ **N**

$\uparrow$ **C**

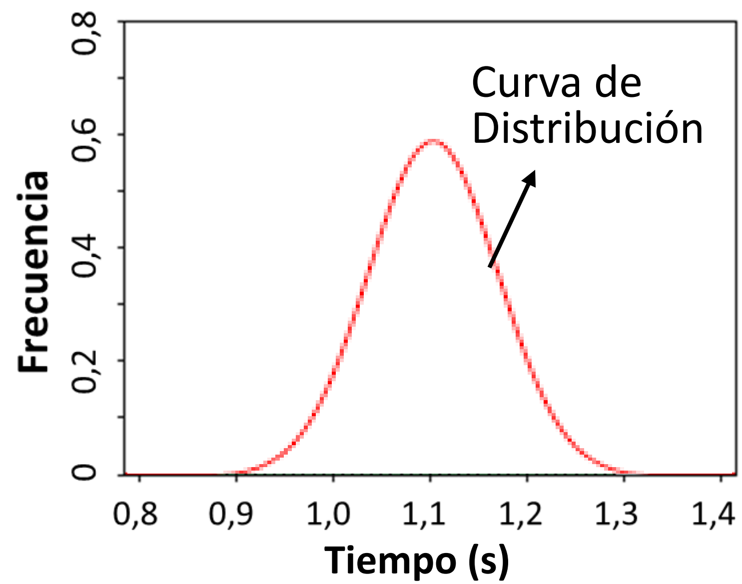
$\downarrow$ ***a***



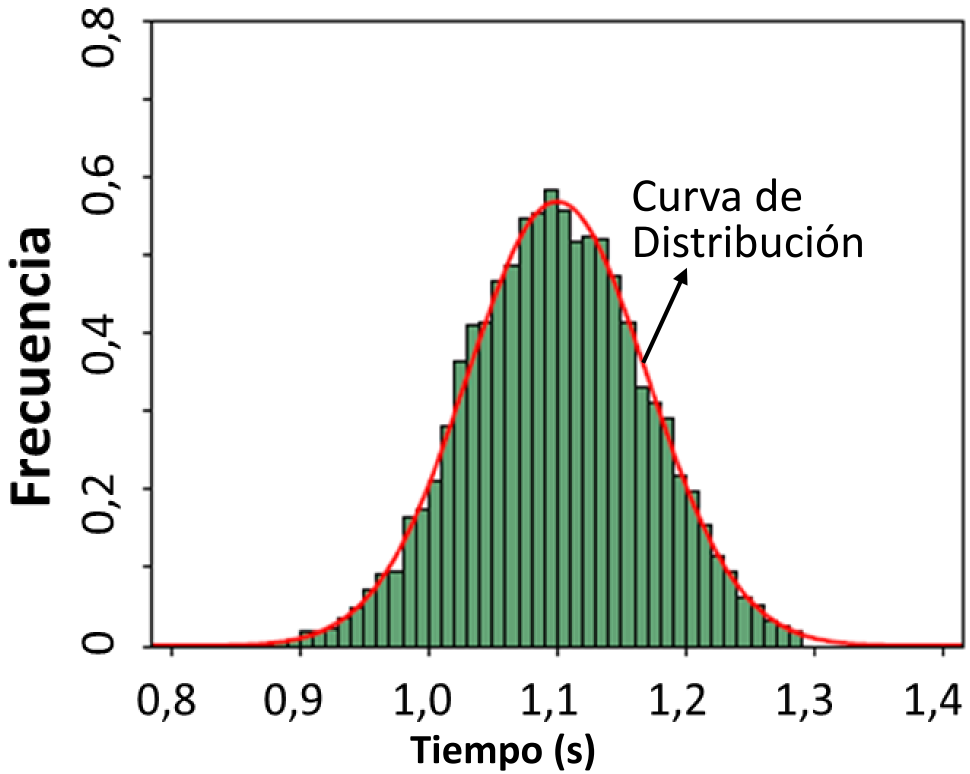


$N \rightarrow \infty$

$a \rightarrow dt$



¿Si aumenta N?



$$N \to \infty$$

$$a \to dt$$

$$F_i \to f(t)dt$$

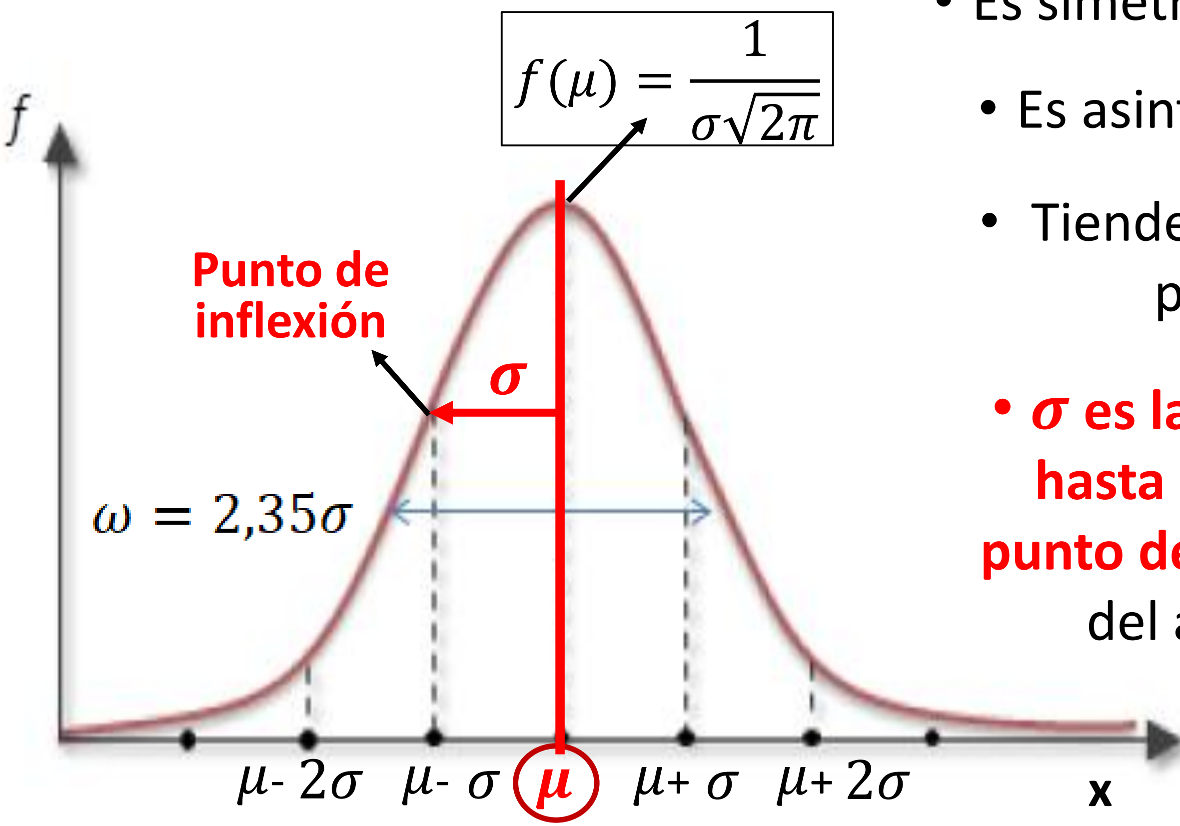
$f(t)$: *Función de distribución de probabilidades*

Condición de Normalización

$$\sum_i F_i = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dx = 1$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



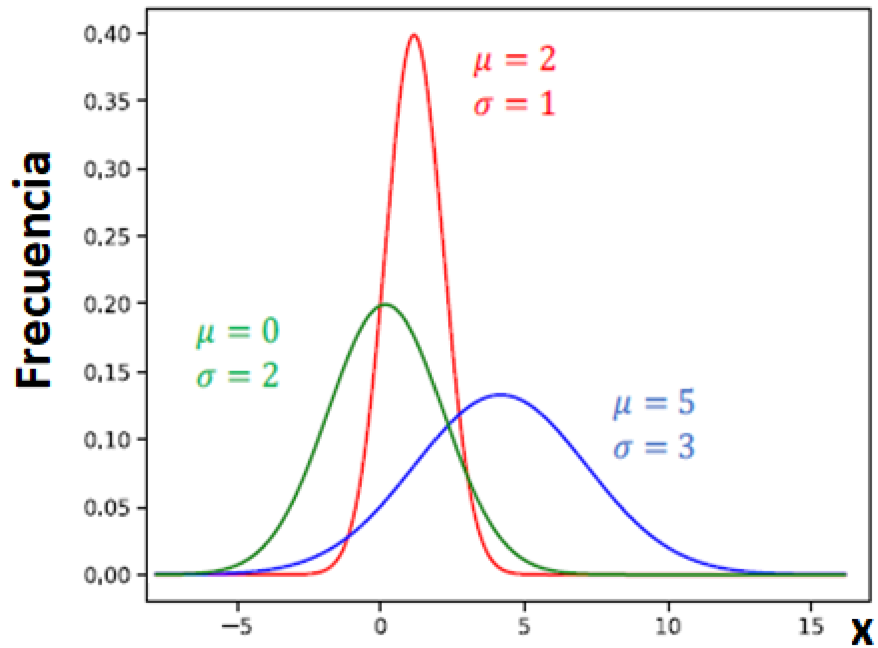
Algunas Propiedades

- **Está centrada en $x = \mu$** .
- Es simétrica respecto de su media
- Es asintótica al eje de abscisas
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x-\mu| \gg \sigma$.
- **σ es la distancia de la media hasta la curva a la altura del punto de inflexión**, y da una idea del ancho de la curva de distribución.

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

Función de distribución de 3 Muestras

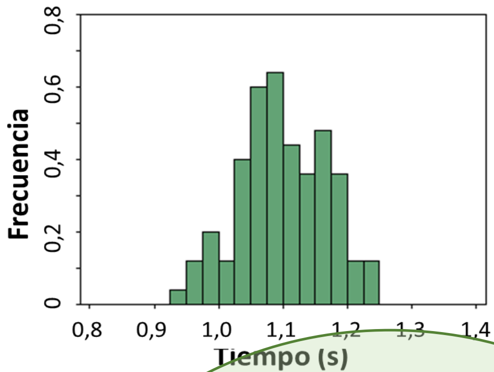


$\boldsymbol{\mu}$ Corrimiento en x hacia la derecha

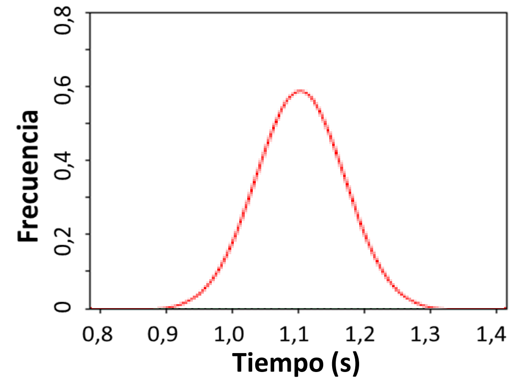
$\boldsymbol{\sigma}$ Aumento del ancho de la distribución. **Mayor dispersión de datos**

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución



$N \to \infty$



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \longleftrightarrow \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$S = Desviación\ Estándar \quad \longleftrightarrow \quad \sigma$$

Análisis de estadístico

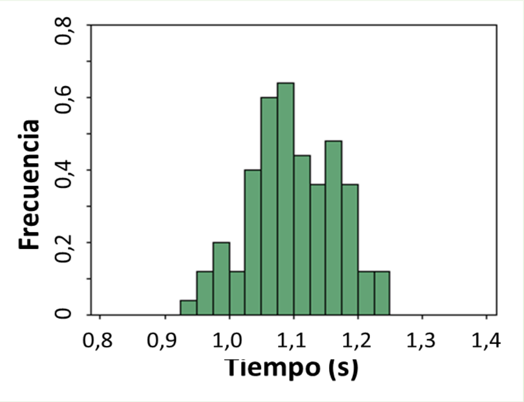
Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

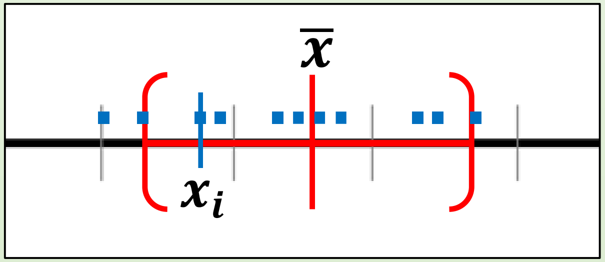
$$N = \{x_1, x_2, \ldots, xi, \ldots, x_N\}$$

Book1

	A(X)
Long Name	Diametro
Units	microm
Comments	
77	7,55
78	7,27
79	7,59
80	7,16
81	7,59
82	7,12
83	7,37
84	7,50
85	7,41
86	7,27
87	7,50

$$\bar{x} = 7,29\ \mu m$$





Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

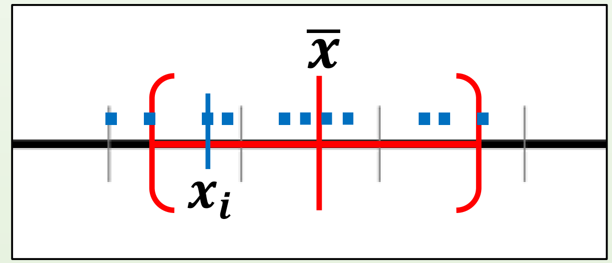
$$\boldsymbol{N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}}$$

$$\bar{x} - x_i \quad (\bar{x} - x_i)^2$$

Book1

	A(X)	B(Y)	C(Y)
Long Name	Diametro	X-Xmedia	(X-Xmedia)^2
Units	microm	microm	microm^2
Comments			
77	7,55	0,26	0,07
78	7,27	-0,02	0,00
79	7,59	0,30	0,09
80	7,16	-0,13	0,02
81	7,59	0,30	0,09
82	7,12	-0,17	0,03
83	7,37	0,08	0,01
84	7,50	0,21	0,05
85	7,41	0,12	0,01
86	7,27	-0,02	0,00
87	7,50	0,21	0,04

$$\boldsymbol{\bar{x} = 7,29\ \mu m}$$



VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\ (x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio

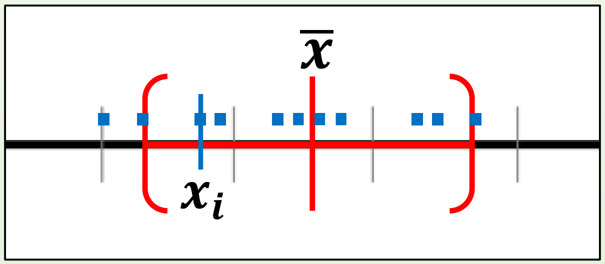
$$\boldsymbol{S = \sqrt{Var\ (x)}}$$

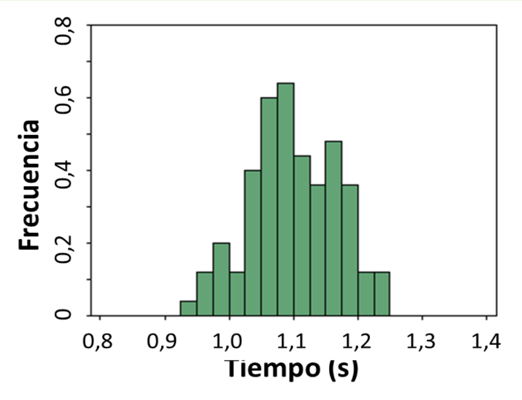
$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$





Valor más representativo: Promedio de los datos: $\bar{x}$

```
X = np.mean(x)
print("El valor medio es =", X, "s")
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\boldsymbol{N} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{xi}, \dots, \boldsymbol{x_N}\}$$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

```
C=np.var(x)
print("La varianza es =", C)
```

```
La varianza es = 0.010171163434903046
```

Desviación Estándar (S)

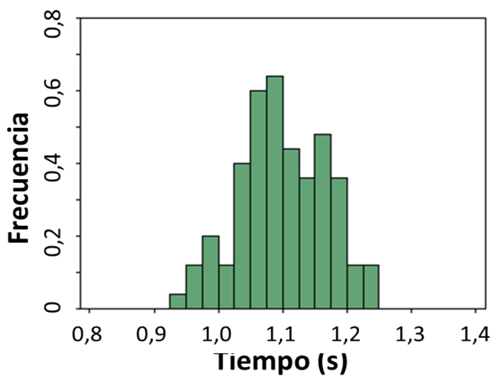
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

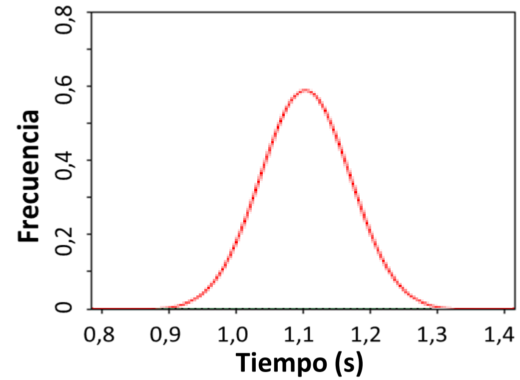
```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución



$N \rightarrow \infty$



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \longleftrightarrow \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

VAR (x) ... N ... $^2 f(x)dx$ ... $_{-\infty}$

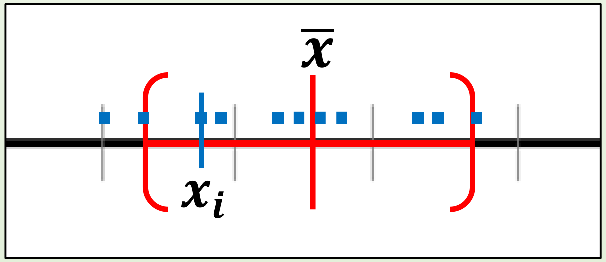
¿Y Cómo calculamos Δx?

$$S = \sqrt{VAR\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}} \longleftrightarrow \sigma = \sqrt{VAR\,(x)}$$

Análisis estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

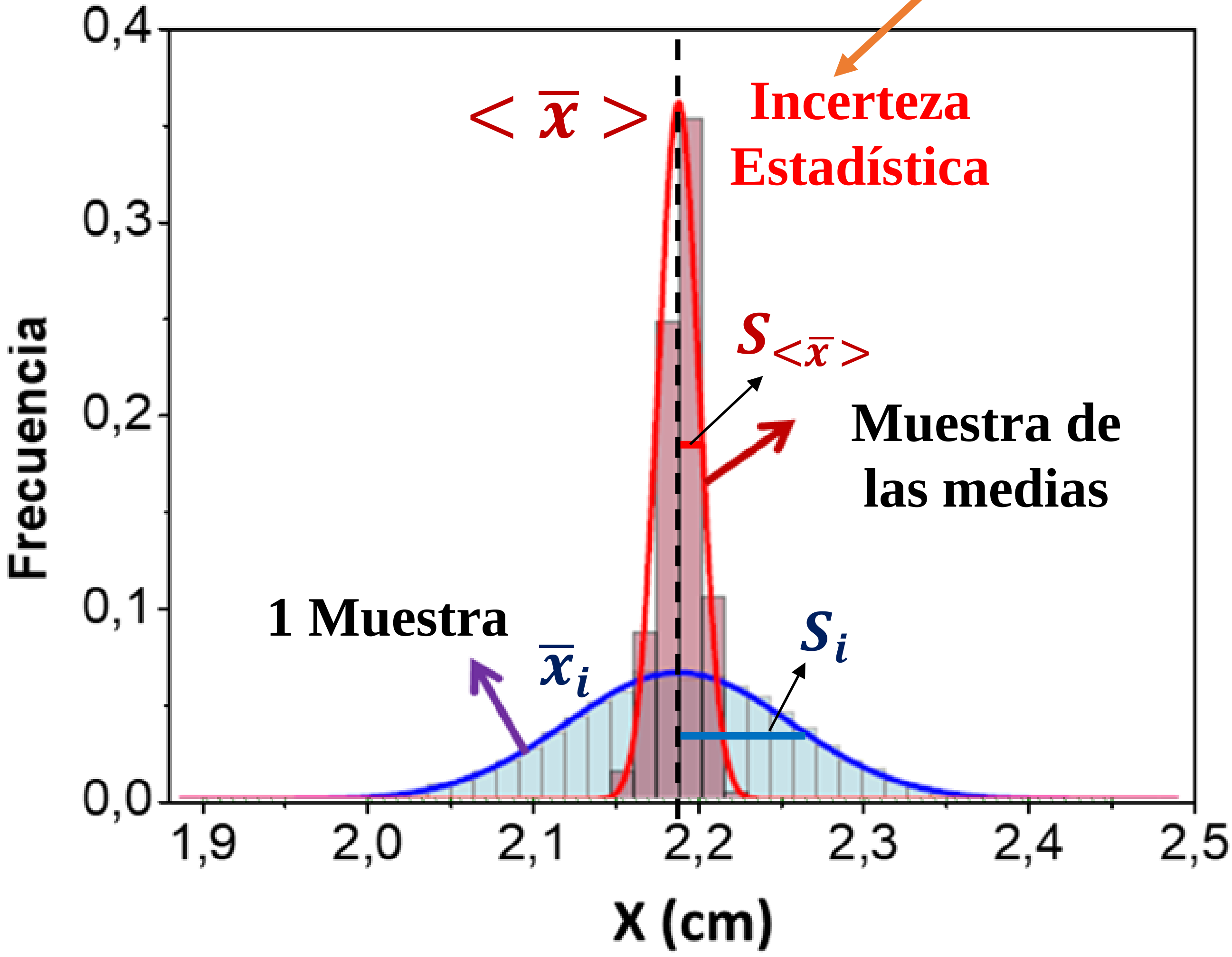
$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error Estadístico (σ_e): Error cuadrático medio del Promedio

$$\Delta x = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Teorema del Límite Central (TCL)

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S} \rightarrow \boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$



¿Por qué usar el error estadístico?

Varias Series de mediciones

Teorema Central del Límite (TCL)

- Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$S_{x1} \cong S_{x2} \cong S$$

- **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $<\bar{x}>$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

En general se toma una única muestra de N medidas …

Si **se toma como hipótesis** que nuestra serie que comportará como otra de la misma MF bajo la misma metodología:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

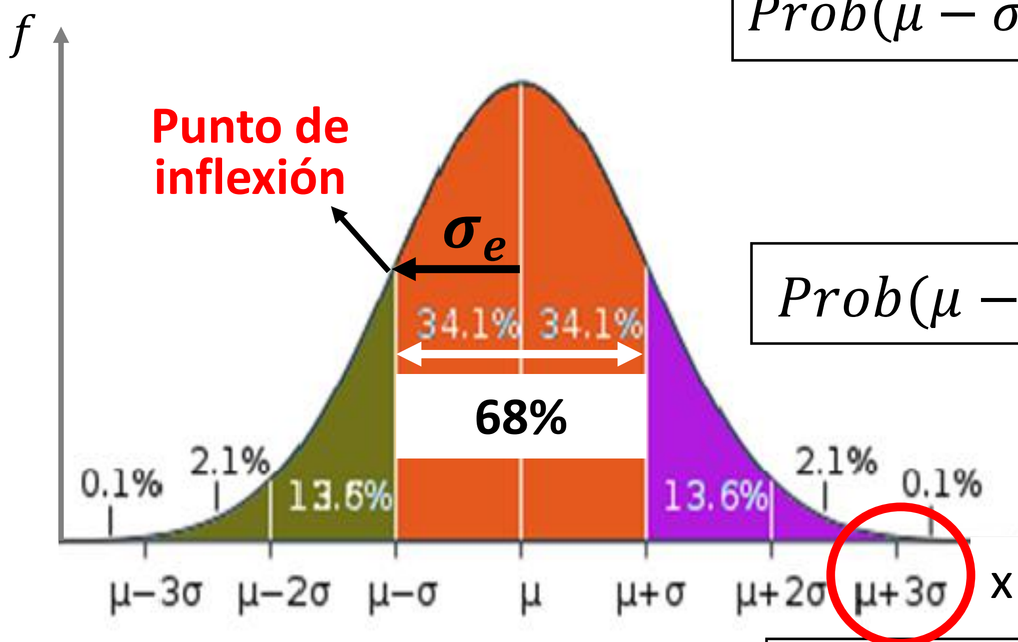
Si tomo N medidas: $\Delta x = \boldsymbol{\sigma_e}$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e) \text{ Unidades}$$

Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una **probabilidad de ~ 68%** de encontrarse en el intervalo de confianza $(\boldsymbol{\bar{x} - \sigma_e , \bar{x} + \sigma_e})$

Si el resultado de la medición es $\boldsymbol{\mu - \sigma_e \leq x \leq \mu + \sigma_e}$ y realizamos una nueva medición $\boldsymbol{x_i}$, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en dicho intervalo de confianza?

$$Prob(\mu - \sigma_e \leq x \leq \mu + \sigma_e) = \frac{1}{\sigma_e\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma_e}^{\mu+\sigma_e} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2{\sigma_e}^2}\right)} dx$$



$$Prob(\mu - \sigma_e \leq x \leq \mu + \sigma_e) \cong \mathbf{0,6827}$$

68%

$$Prob(\mu - \sigma_e \leq x \leq \mu + \sigma_e) \cong \mathbf{0,95}$$

$$Prob(\mu - \sigma_e \leq x \leq \mu + \sigma_e) \cong \mathbf{0,99}$$

El error del promedio

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

que en la práctica es:

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Está en todos los libros de estadística.

```python
Dx=S/np.sqrt(len(x))
print("El error del promedio es Dx =", Dx, "s")
```

```
El error del promedio es Dx = 0.02313707827947787 s
```

Expresión del resultado $\boxed{T = (\bar{T} \pm \sigma_e)\ Ud.}$

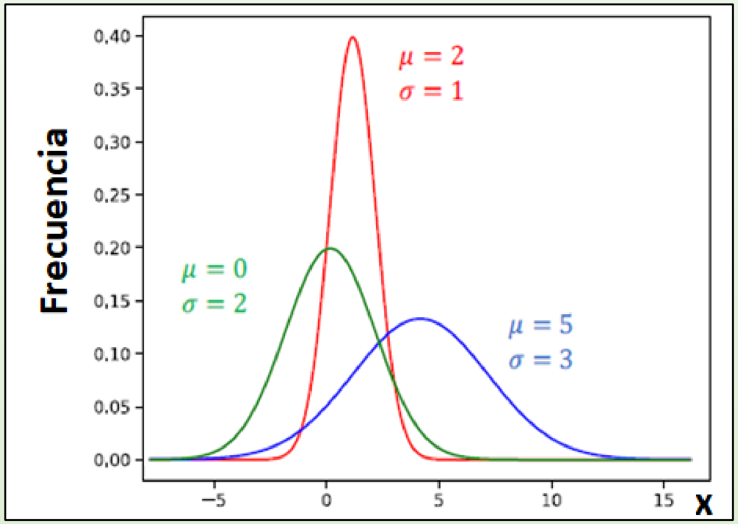
```python
print("El resultado de la medición fue: T =", f'({X:.3f} ± {Dx:.3f}) s')
```

```
El resultado de la medición fue: T = (32.542 ± 0.023) s
```

Desviación estándar y sus usos ….

Comparación: ¿Quién mide en forma más precisa?

Un MENOR valor de *S* representa MAYOR PRECISIÓN EN LA FORMA DE MEDIR



Desviación estándar y sus usos ….

<u>¿Cuál va a ser el error de cada medida de la muestra general?</u>

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

El error de cada medida es S, no σ_{ap}

13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

Si realizamos una nueva medición x_i, la incerteza de ese nuevo dato será S

En general se toma una única muestra de N medidas …

Si **se toma como hipótesis** que nuestra serie que comportará como otra de la misma MF bajo la misma metodología:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío Estándar
Error de una medida

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Si tomo N medidas: $\Delta x = \boldsymbol{\sigma_e}$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e) \text{ Unidades}$$

Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una **probabilidad de ~ 68%** de encontrarse en el intervalo de confianza

$$(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\sigma_e}, \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\sigma_e})$$

Ejemplo de problema

Ejemplo:

Mido **N = 81** períodos de un péndulo, calculo los parámetros estadísticos:

$$\bar{T} = 2.25\ s, \qquad S = 0.27\ s, \qquad \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}} = 0.03\ s$$

El RESULTADO del período es: : $T = (\bar{T} \pm \sigma_e)$: $T = (2.25 \pm 0.03)\ s$

Si tomo **una nueva medida** del períodos de un péndulo y obtengo $2.23\ s$. La nueva medida tendrá aprox. un **68% de probabilidades** de encontrarse en el intervalo de confianza

$[\bar{T} - \sigma_e, \bar{T} + \sigma_e]$: $[2.22, 2.28]$

El error de la nueva medida será igual al del resto de las medidas, y valdrá: $S = 0.27\ s$

Entonces el **resultado de la nueva medida** será: $T = (2,23 \pm 0,27)\ s$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

1 Período de un Péndulo de 50,0 ± 0,1 cm de longitud

- Tomen **30 medidas** del período del péndulo (**N = 30**) ($\theta < 10°$) **con un cronómetro.** Observan una tendencia a la disminución en los valores del tiempo? ¿Se está frenando el péndulo?

- Obtengan **150 medidas más** tomando 5 series de 30 mediciones cada una. Tendrá un **total de N = 180.**

- Realicen 4 Histograma manteniendo el rango del eje X y del eje Y para 1) N = 30, 2) N = 60, 3) N = 120, 4) N = 180. Comparación *¿Depende de N la forma, el centro, y/o el ancho de los histogramas?*
- Hagan una Figura superponiendo los histogramas de N = 30 y N =180. Así verán claramente las diferencias!

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

2 Período de un Péndulo de 50,0 ± 0,1 cm de longitud

- Utilicen grupos con: N = 20, 30, 40, …, 180 calculen el valor más representatico $\overline{\boldsymbol{T}}$ y la desviación estándar $\boldsymbol{S}$ de cada caso. *¿Parece depender* $\overline{\boldsymbol{T}}$ *o* $\boldsymbol{S}$ *de N?*

- **Calculen el RESULTADO del período del péndulo:** $\boldsymbol{T} = (\overline{\boldsymbol{T}} \pm \Delta \boldsymbol{T})\ \boldsymbol{Ud}$ considerando que **N = 180** es representativo para su experimento. Exprese el resultado con **2 cifras significativas**. *¿Qué hipótesis se debe cumplir para poder decir que* $\Delta T = \sigma_e$*? ¿Creen que la cumplieron?*

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

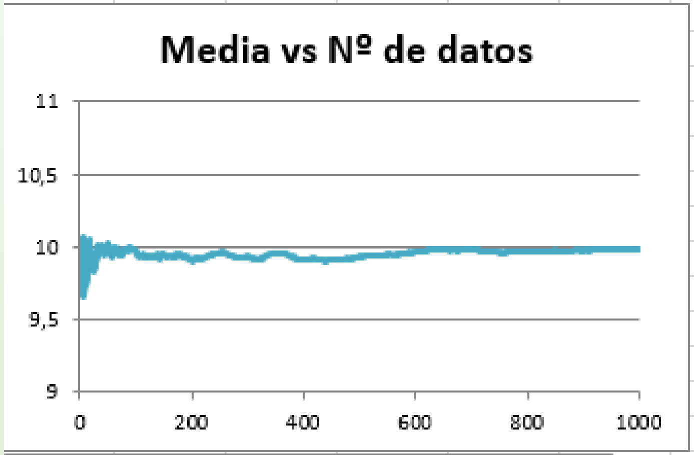
2

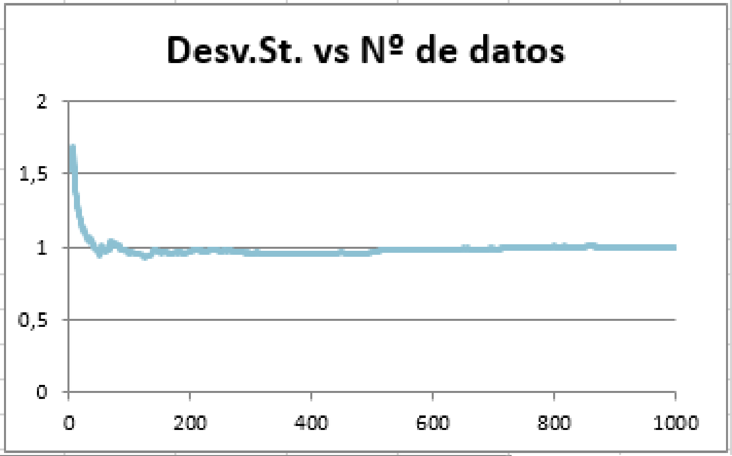
Datos del período del faro de la Clase 1

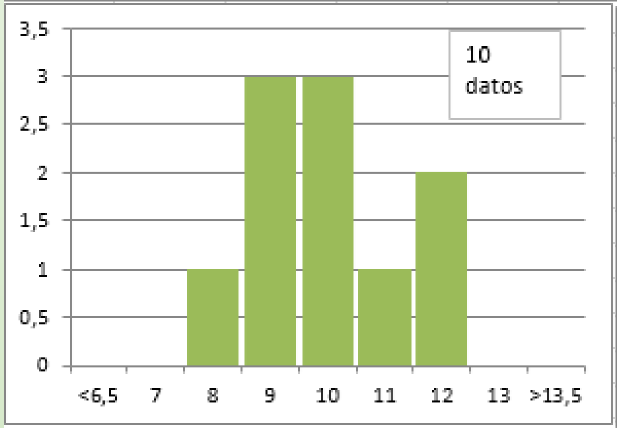
- **Calculen el RESULTADO del período del faro:** $\boldsymbol{T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud}$ de cada integrante, considerando que **N = 100** es representativo para su experimento. Expresen el resultado con 2 cifras significativas.

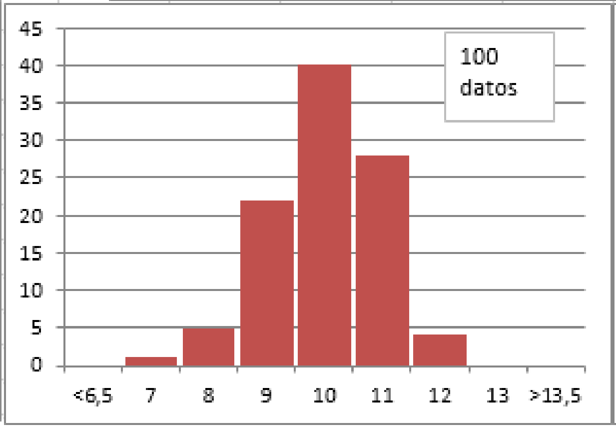
- *Comparen los resultados de* $\boldsymbol{S}$ *entre los integrantes que midieron empleando la Luz ¿Quién fue más preciso al medir?*
- *Comparen* $\boldsymbol{S}$ *del integrante que midió usando luz y sonido ¿Con qué método se midió en forma más precisa?*

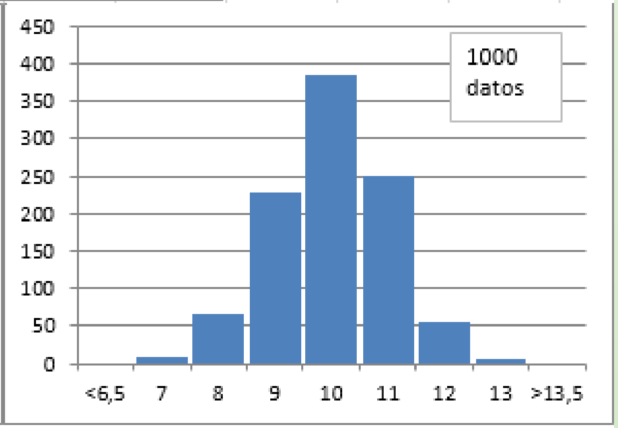
Cómo dependen el valor más representativo y la desviación estándar del número de mediciones











ENTREGA MIERCOLES 3-4 HASTA LAS 12 HORAS

1

- **Figura 1:** Los 4 Histogramas de N = 30, 60, 120, 180. Discutir *¿Depende de N la forma, el centro, el ancho de los histogramas?*

- **Figura 2:** Los Histogramas superpuestos de N = 30 y N = 180.

- Resultados de $\boldsymbol{S}$ y de $\overline{\boldsymbol{T}}$ para N = 20, 30, 40, …, 180 (usen 2 decimales). Discutir *¿Depende de N estos dos parámetros estadísticos? A partir de qué N puede decirse que cumple con el teorema central del límite?*

- **Expresión (Correcta!) del resultado del período del péndulo $\boldsymbol{T}$ (N=180) con 2 cifras significativas**. Discutir *Si consideran que se cumplió con la hipótesis para expresarlos así*

2

- Resultados de $\boldsymbol{S}$ del Faro (usen 2 decimales). Discutir *Forma de medir y dependencia del método de medir.*

- Expresión (Correcta!) del resultado del período del Faro $\boldsymbol{T}$ (N=100) con 2 cifras significativas.