REPASO

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

Resultado
Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

$\boldsymbol{\bar{x}}$ ***o*** $\boldsymbol{x_0}$**:** Valor más representativo

$\boldsymbol{\Delta x}$**:** Incerteza Absoluta

Mediciones Directas (MD)

VALOR MÁS REPRESENTATIVO

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

INCERTEZA ABSOLUTA

$$\Delta x = ?$$

Orienta la Tabla (Clase 1) ⇒

$$P = \frac{R}{\bar{x}}100$$

⇒ **ÚNICAMENTE si estoy midiendo la misma MF**

1: Si Pesa como fuente de incerteza INSTRUMENTAL

⇒ $\Delta x = \sigma_{ap}$ ⇒ $x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right) Ud.$

Mediciones Directas (MD)

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

Generalizando … Si tomo N medidas de una misma MF bajo las mismas condiciones (asumiendo TCL):

Valor más representativo

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Incerteza absoluta

$$\Delta \boldsymbol{x} = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Incerteza de cada dato

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$S \rightarrow$ **Además sirve para comparar formas de medir**

Si realizamos una nueva medición de la MF, su resultado tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$$(\boldsymbol{\bar{x}} - \sigma_e, \boldsymbol{\bar{x}} + \sigma_e)$$

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)} \longrightarrow W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$

$$\vdots$$

x, y, z ... variables independientes

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\substack{x_0,\\ y_0,\dots}}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{\substack{x_0,\\ y_0,\dots}}\right)^2 \Delta y^2 + \ \dots}$$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

¿Cómo podemos proseguir para obtener una MF?

- ✓ **1ero:**

  SIEMPRE hay que ***buscar las LEYES FÍSICAS*** *que conozcamos* ***QUE CONTENGAN LA MF*** *que deseamos calcular.*

- ✓ **2do:**

  Buscar CUÁL O ***CUÁLES PUEDAN APLICARSE*** *con el* ***equipamiento con el que contamos***

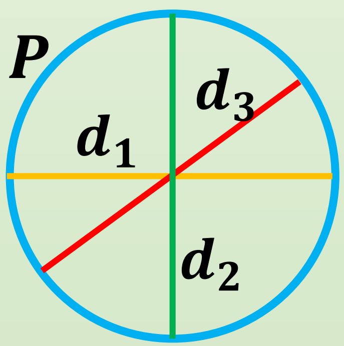
¿Cuánto vale π? ¿Cómo podemos calcularlo?

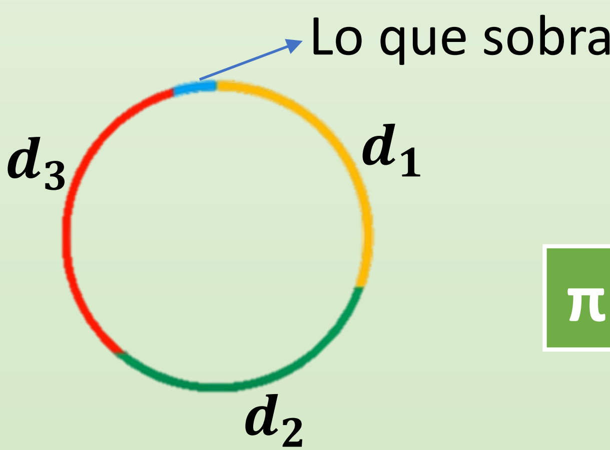
PRIMER PASO: BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE A π CON VARIABLES QUE PUEDA MEDIR O ADQUIRIR

Conceptos básicos:

- Circunferencia C = Perímetro del círculo $\boldsymbol{P}$
- Diámetro $\boldsymbol{d}$

$\boldsymbol{\pi}$ es el número de veces que entra $\boldsymbol{d}$ en $\boldsymbol{P}$





π = 3,14159265 …

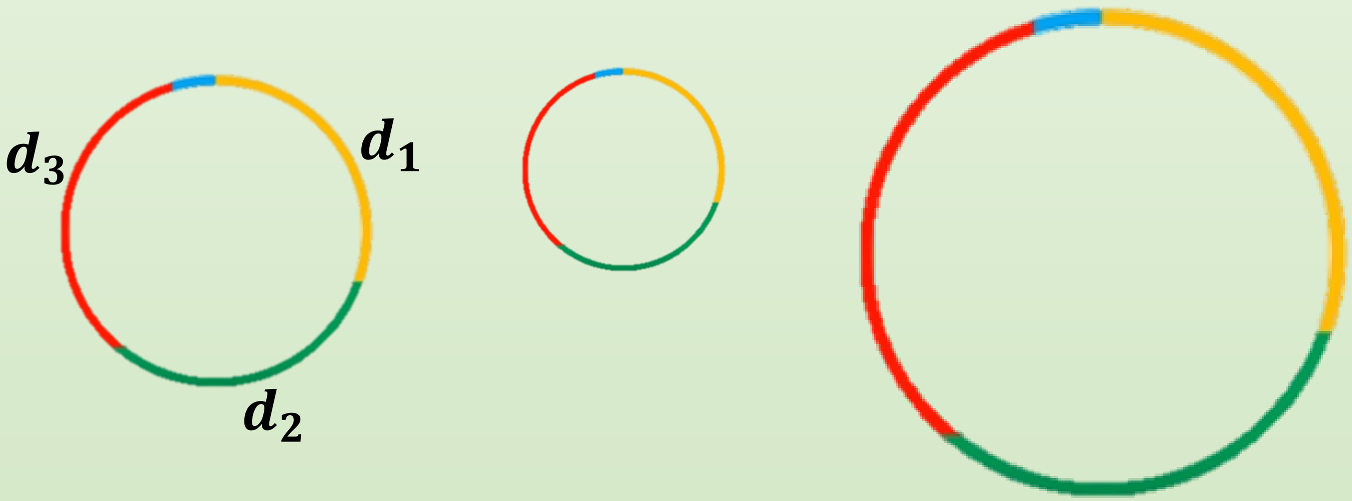
¿Cuánto vale π? ¿Cómo podemos calcularlo?

π es el número de veces que entra d en C

$$\boxed{P = \pi d}$$

¡Esto ocurre independientemente del diámetro del círculo!!

¡Se puede calcular π para cualquier círculo!



ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

Método 1: Obtener π **a partir de calcular** d **y** P **de una superficie circular** y empleando **la ecuación (1):**

$$P = P_0 \pm \Delta P \qquad d = d_0 \pm \Delta d$$

$$P = \pi d \qquad \textbf{(1)}$$

$$\boxed{\pi = \frac{P}{d}} \Rightarrow \pi = \pi_0 \pm \Delta\pi$$

¿Cómo calculo $\Delta\pi$*?*

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

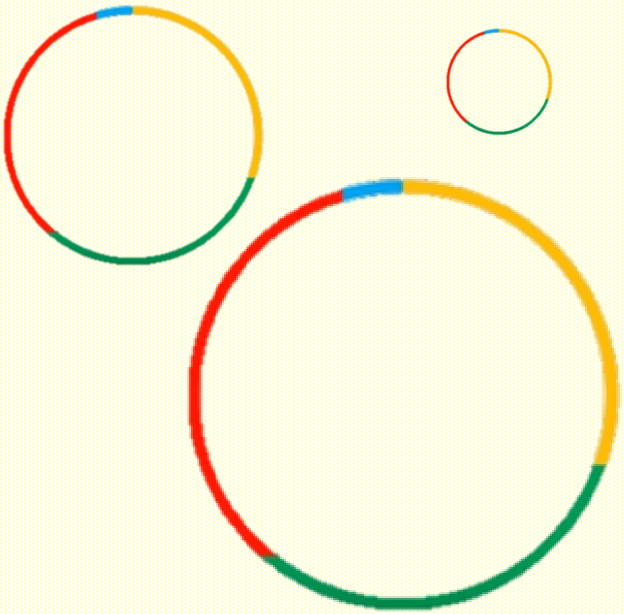
Método 2: Podemos determinar el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a partir del cálculo de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{P}$ **de DIFERENTES superficies circulares (Vamos a usar 10!!!) y empleando un nuevo método**

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$P_2 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_2 = d_0 \pm \Delta d$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_{10} = P_0 \pm \Delta P \qquad d_{10} = d_0 \pm \Delta d$$



Objetivo de la clase de hoy

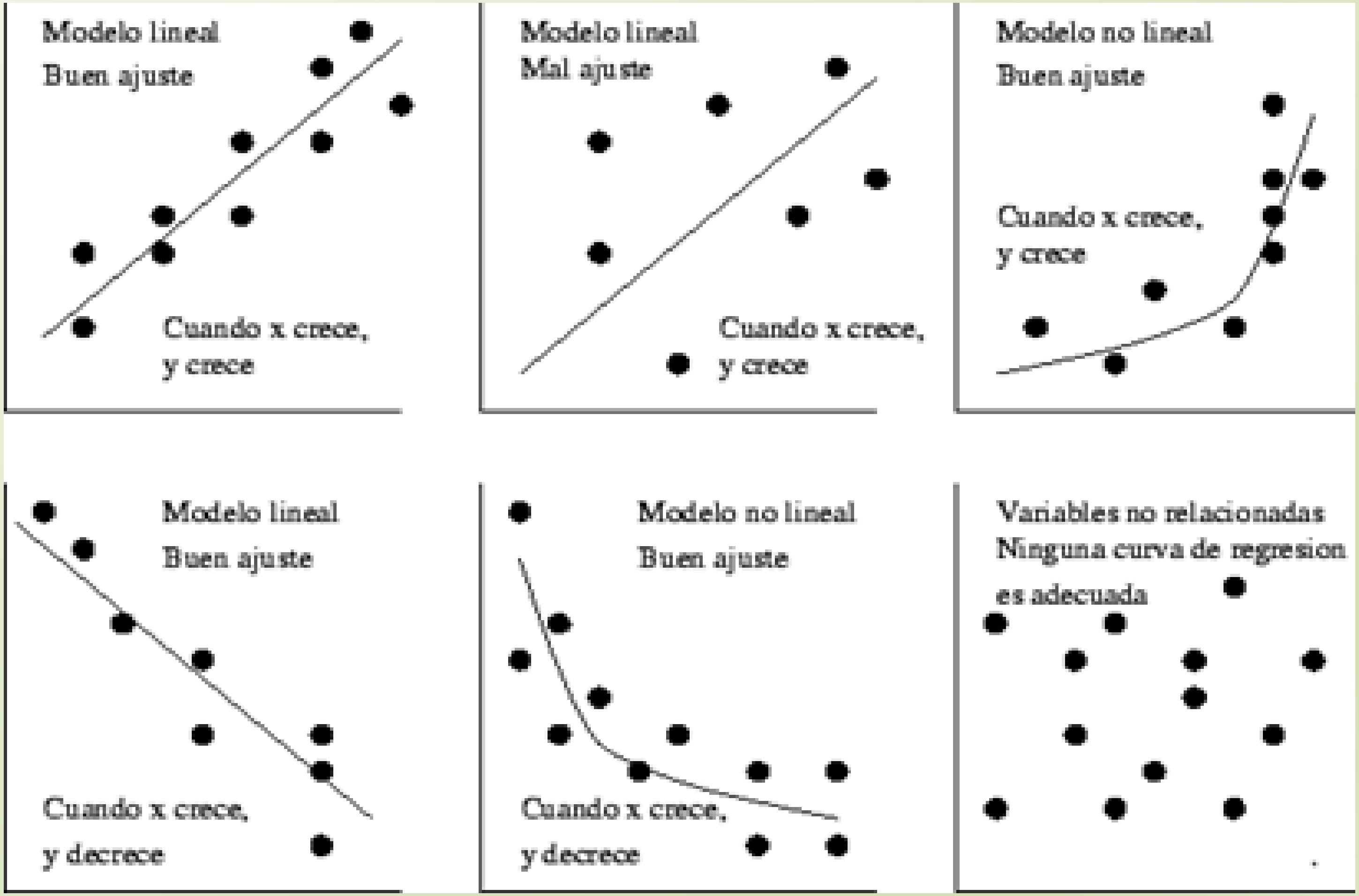
Analizar la **relación entre dos magnitudes** y **buscar modelos** que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza.

Objetivo Particular de la práctica de hoy

Determinar π a partir del cálculo del diámetro y del perímetro de diferentes objetos con superficie circular empleando **UN MODELO LINEAL del MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS**

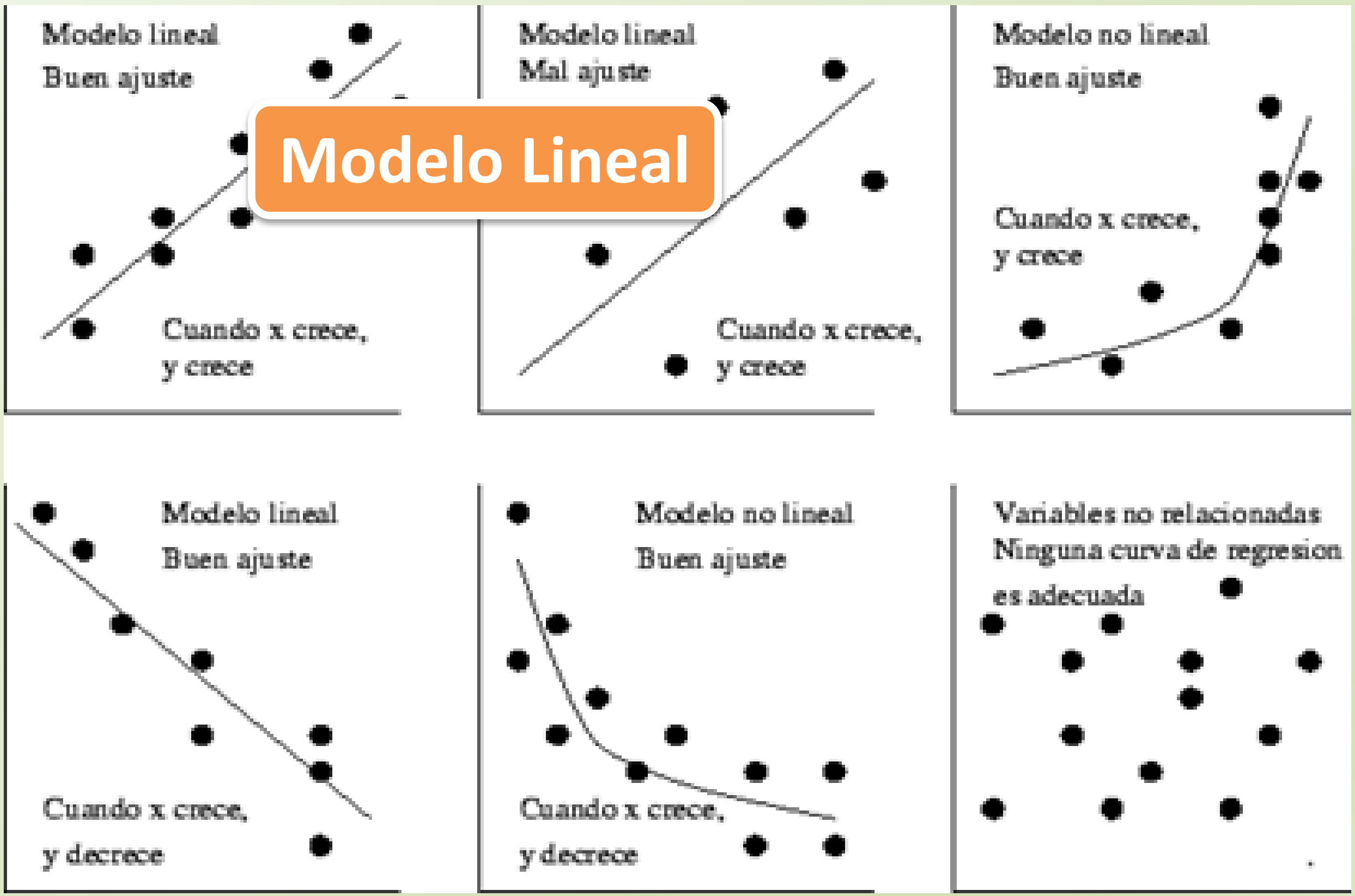
Método de Cuadrados Mínimos

Relación entre dos variables usando un Modelo Matemático



MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

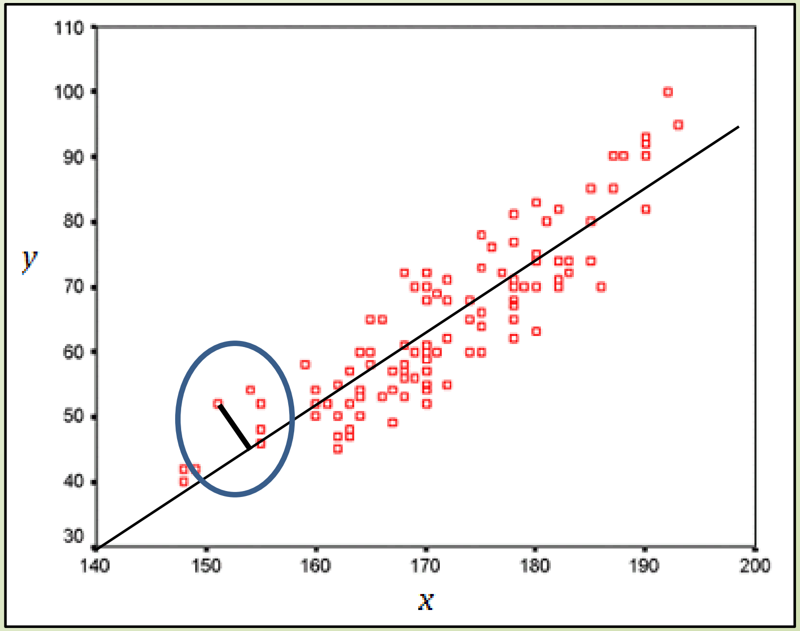
Relación entre dos variables:
Modelo Matemático más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

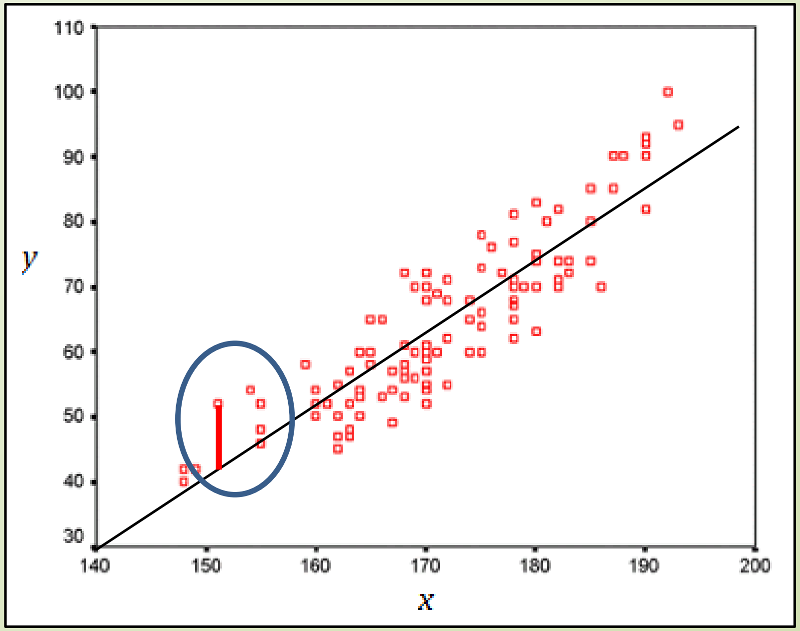
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

Caso aún más sencillo: Considerando la **Distancia en "*y*"**

Buscamos encontrar los parámetros *m* y *b* que minimicen la distancia de los datos al modelo en el eje "*y*"

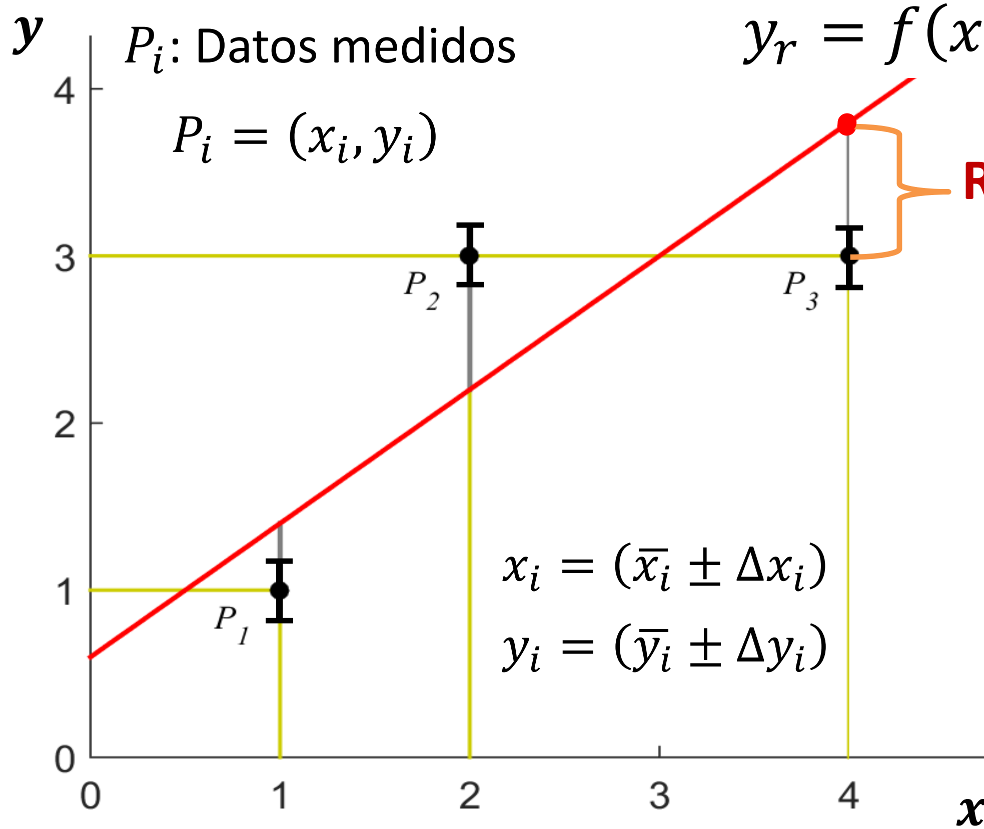
Buscamos encontrar los parámetros *m* y *b* que minimicen la distancia de los datos al modelo

Considerando la Distancia en "y"

P_i: Datos medidos

$P_i = (x_i, y_i)$

$y_r = f(x) = mx + b$



$x_i = (\overline{x_i} \pm \Delta x_i)$

$y_i = (\overline{y_i} \pm \Delta y_i)$

Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

Hipótesis:

$\boldsymbol{\varepsilon_{ry}} \gg \boldsymbol{\varepsilon_{rx}}$

$\boldsymbol{\varepsilon_{ry}} = \left|\dfrac{\Delta \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y_o}}\right|$

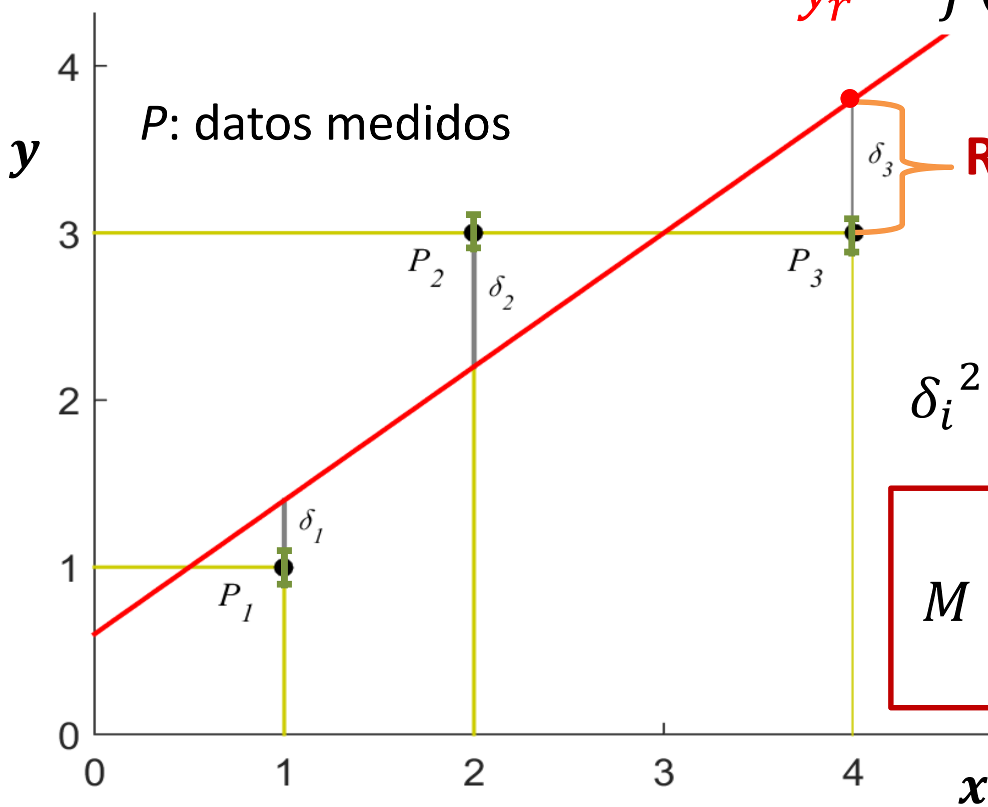
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso A

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Residuos (δ_i) ⇨ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(a,b) = \sum_i {y_i}^2 + a^2 \sum_i {x_i}^2 + Nb^2 + 2ab \sum_i x_i - 2a \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \sum_i {x_i}^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ 2Nb + 2a \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

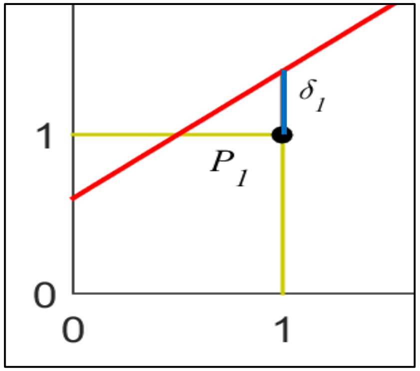
$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \quad \dashrightarrow \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

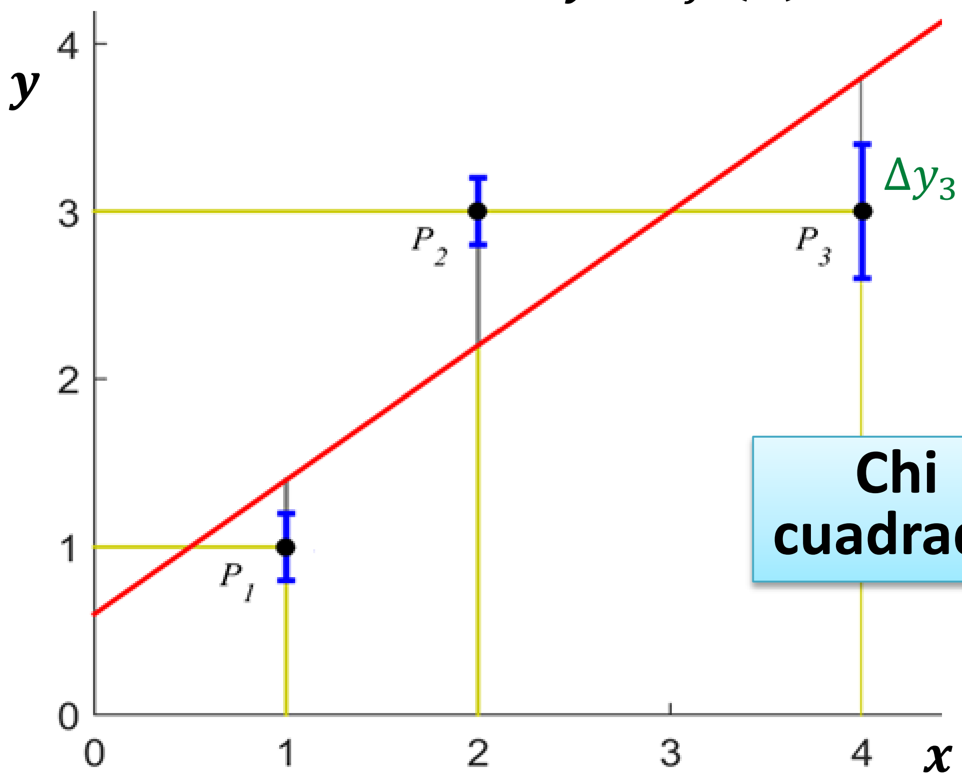
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso B

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



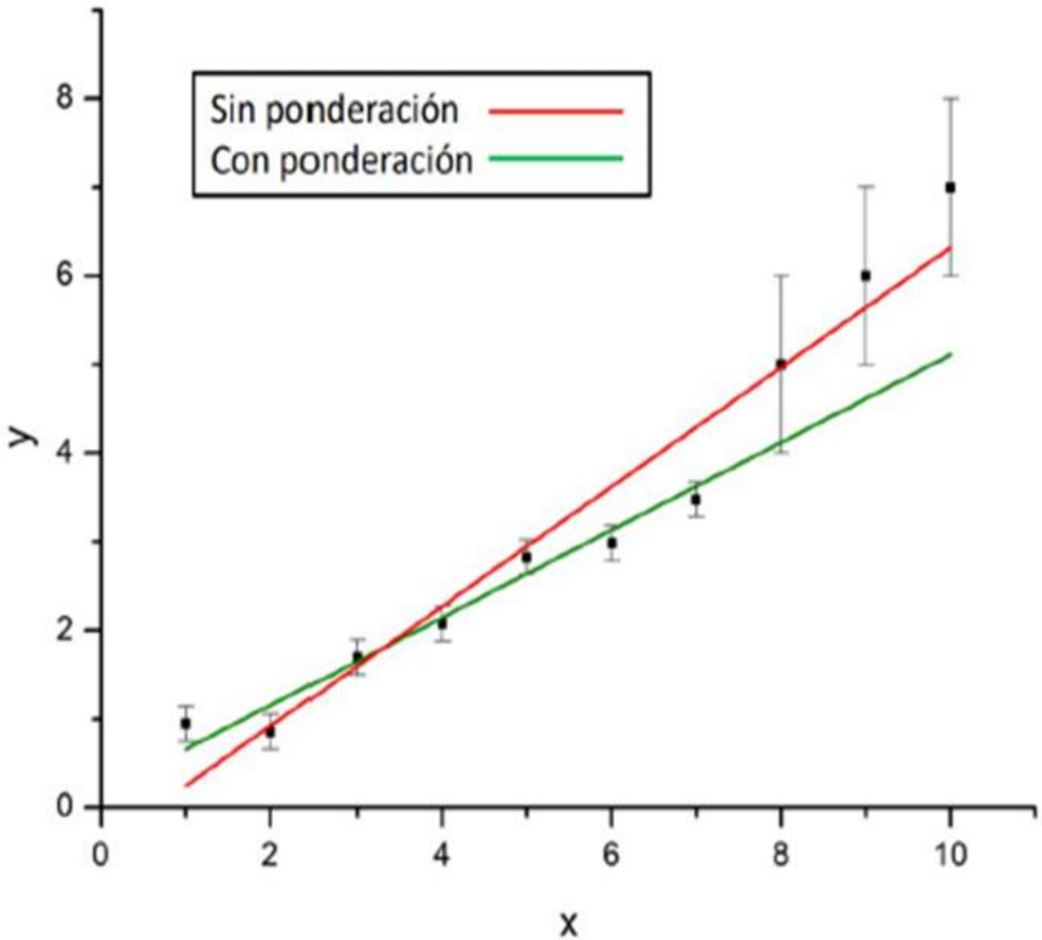
Hipótesis: Considera a las medidas más precisas como las más relevantes

Chi cuadrado

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos **Normalizados al error de cada medida**

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y **buscar modelos** que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza.

¿Por qué modelar?

Se puede observar la relación entre variables.

Se puede realizar predicciones para MF de alcance no posible.

El resultado es más representativo del sistema que tomar un único caso.

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

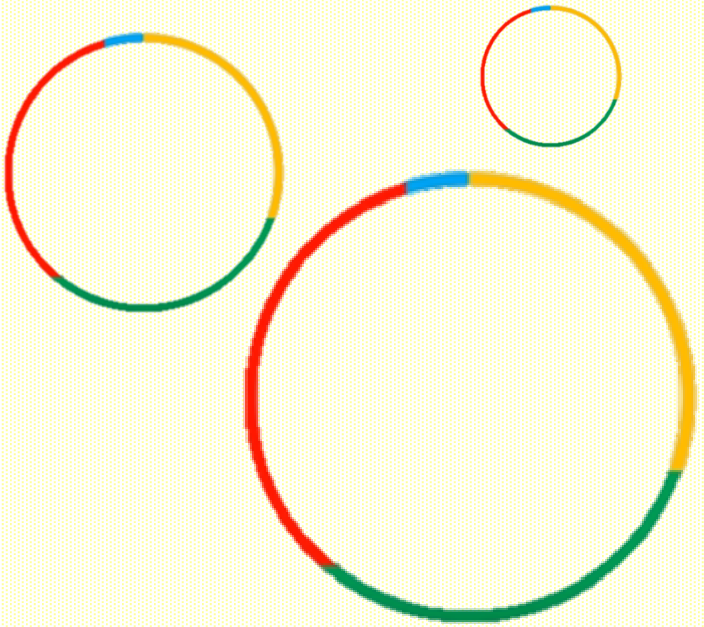
Método 2: Podemos determinar el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a partir del cálculo de d y P de **DIFERENTES superficies circulares (Vamos a usar 10!!!) y empleando un MODELO Lineal del método de cuadrados mínimos**

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$P_2 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_2 = d_0 \pm \Delta d$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_{10} = P_0 \pm \Delta P \qquad d_{10} = d_0 \pm \Delta d$$



ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

Método 2: (*Tips para no olvidarme de nada*)

- **Determinar los errores relativos $\boldsymbol{\varepsilon_r}$** de P y d y definir qué variable presenta mayor ε_r. Esa variable será la que grafiquemos en el eje Y.
- **Figura 1:** Realizar un **gráfico de puntos con las incertezas**. Discutir: *¿Qué forma funcional parece tener la relación entre P y d?*
- Aplicarle un modelo lineal $y = ax + b$. Expresar correctamente los resultados de a y b *(no olvidar incertezas ni unidades!). ¿Resulta $b = 0$?*
- **Obtener el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a partir de los resultados del modelo** y compararlo con el calculado por el Método 1 (usar diferencias significativas, precisión, exactitud y representatividad).

EXPERIMENTO

Exp. 4

AYUDA: Si $\varepsilon_{rP} \gg \varepsilon_{rd}$

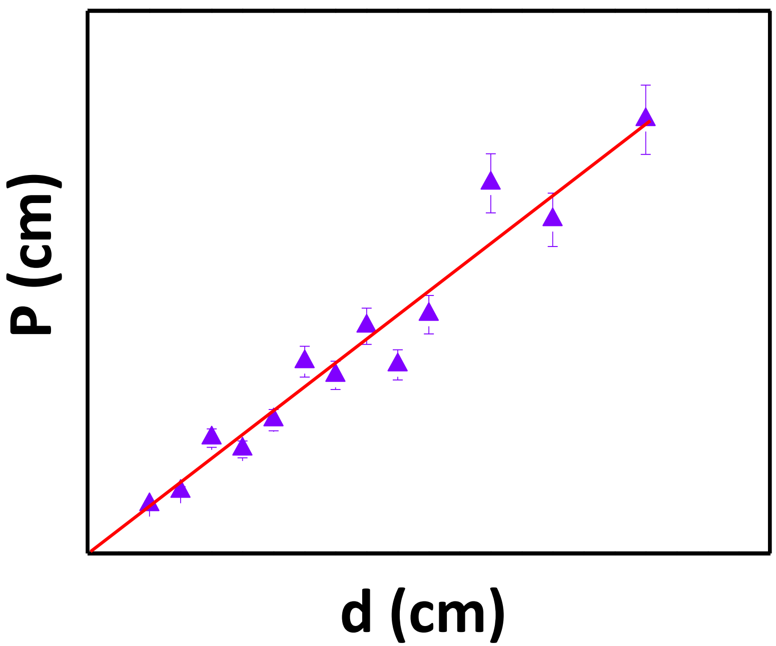
Debo graficar $\boldsymbol{P}$ **en función de** $\boldsymbol{d}$

$$\underbrace{P}_{y} = \pi \underbrace{d}_{x}$$

Pendiente $\boldsymbol{m} = \overline{\boldsymbol{m}} + \Delta \boldsymbol{m}$

$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{m} \longrightarrow \overline{\boldsymbol{\pi}} = \overline{\boldsymbol{m}}$

¿ $\Delta\boldsymbol{\pi}$?



EXPERIMENTO

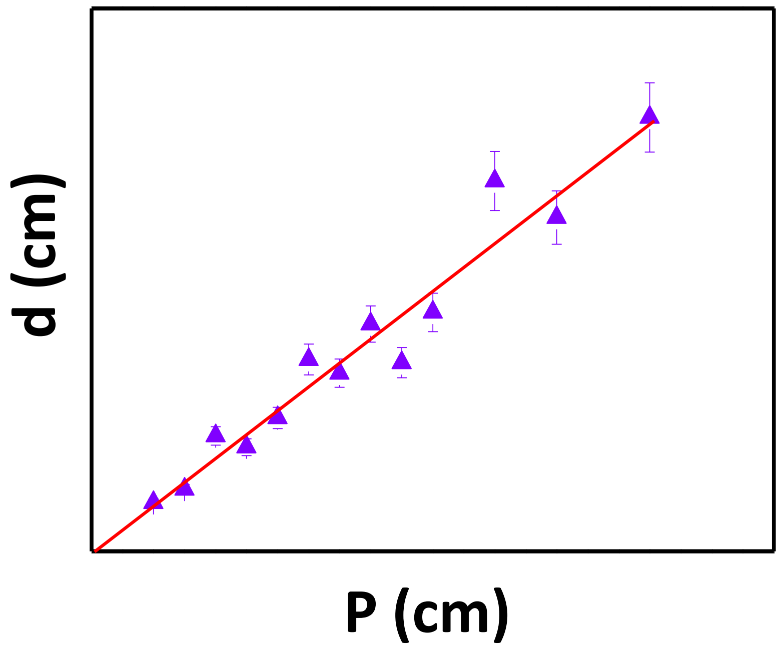
Exp. 4

AYUDA: Si $\varepsilon_{rd} \gg \varepsilon_{rP}$

Debo graficar P **en función de** d

$$d = \frac{P}{\pi} \Rightarrow \underbrace{d}_{y} = \frac{1}{\pi}\underbrace{P}_{x}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$



$$m = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{\pi = \frac{1}{m}} \longrightarrow \bar{\pi} = \frac{1}{\bar{m}}$$

¿ $\Delta\pi$? **Propago!!** $\Delta\pi = \sqrt{\left|\frac{\partial \pi}{m}\right|^2_{m_o} \Delta m^2} = ???$

ENTREGA 3. MIERCOLES 17-4 HASTA LAS 12 HORAS

- **Colocar el valor de P y de d de 1 círculo y expresar el resultado de π obtenido por el método 1.**

- **Figura P en función de d (o d en función de P según corresponda), con puntos e incertezas, y con el modelo lineal aplicado.** NO hagan 2 figuras, es 1 sola completa. Aclarar porqué la elección de las variables en el eje Y o X.

- Expresar los resultados de las variables del modelo, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

- **Expresar el resultado de π obtenido por el método 2.**

- **Comparar los resultados de π obtenidos por los dos métodos**. Usar diferencias significativas, precisión, exactitud y representatividad.

NO olvida expresar TODO CORRECTAMENTE.

Siempre colocar incerteza, unidades y 2 cifras significativas