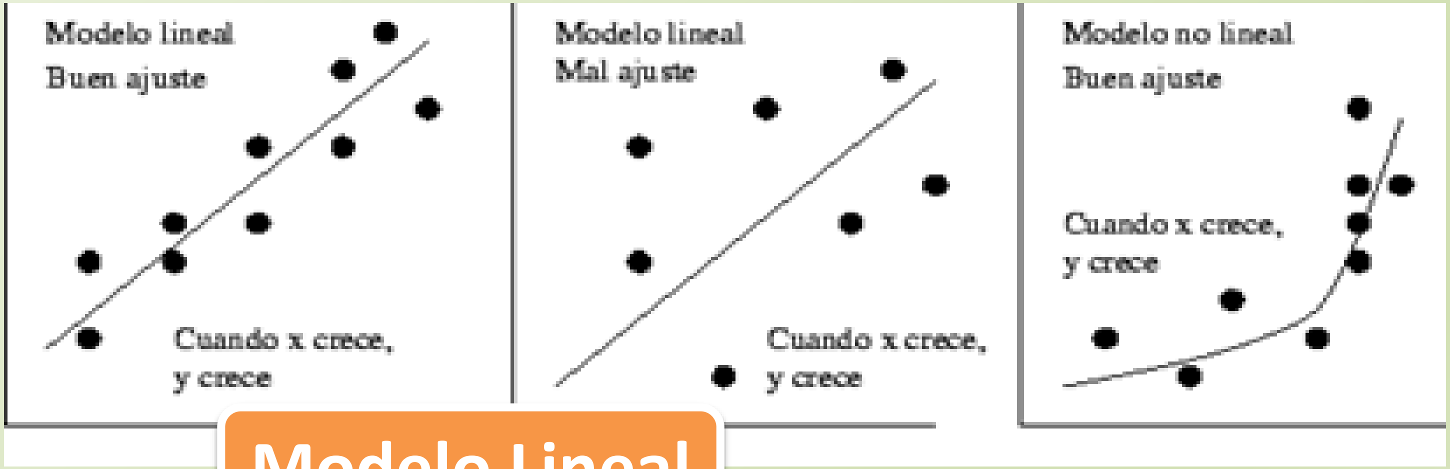
REPASO

Modelado por el Método de Cuadrados Mínimos

Relación entre dos medidas:

Empleo un modelo que mejor relacione las variables (que mejor aproxime a mis datos experimentales)

Caso más sencillo



Modelo Lineal

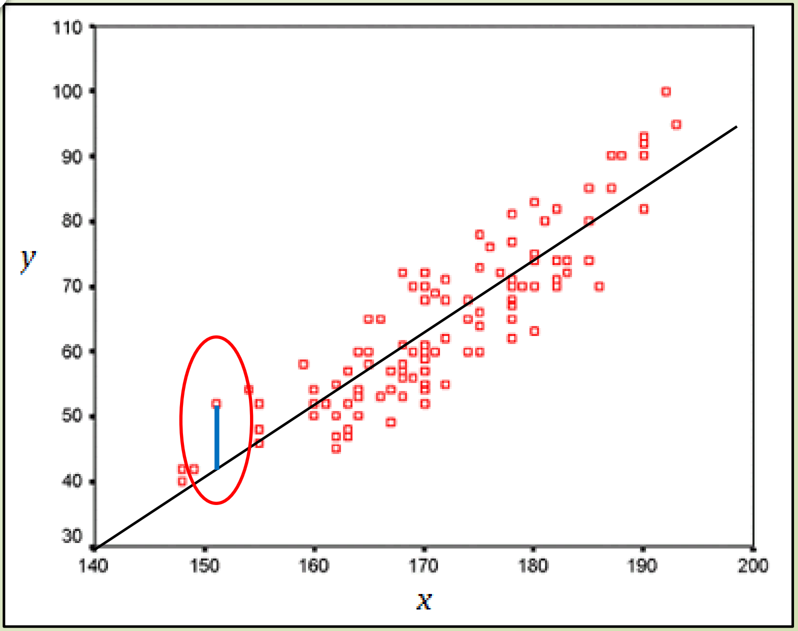
MODELADO POR EL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

Modelo Lineal Más sencillo

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)

Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$



Busca encontrar los parámetros *m* y *b* que minimicen la distancia de los datos experimentales al modelo sólo en el eje "*y*"

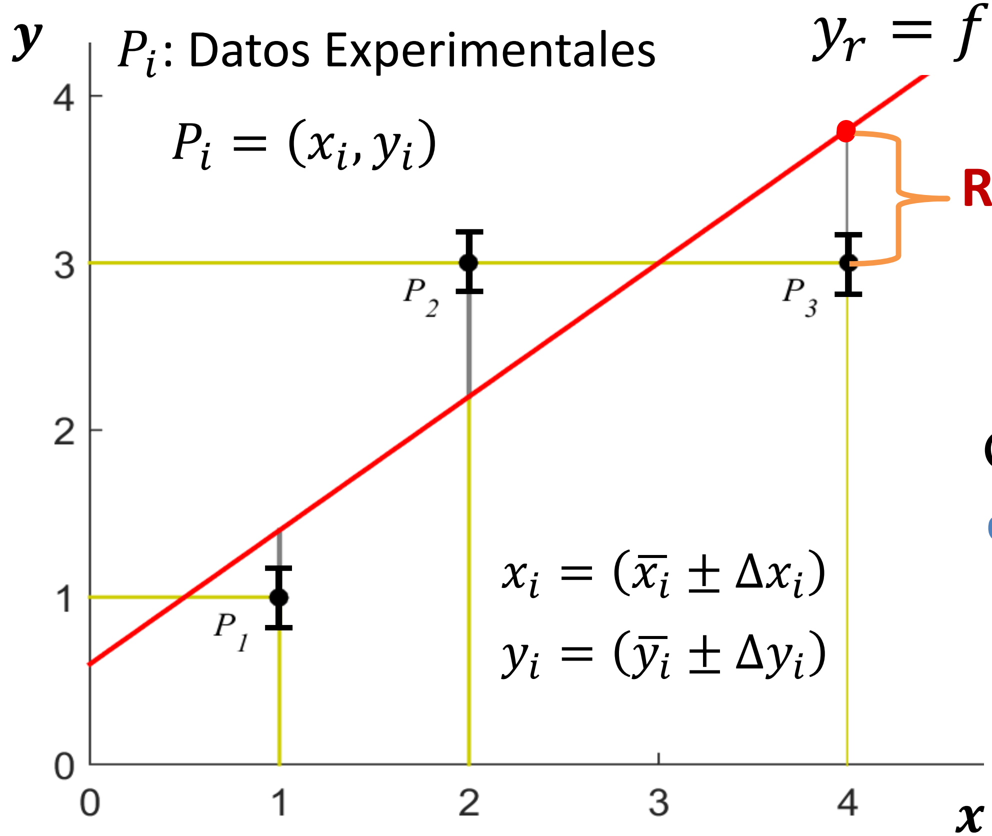
Modelado por el Método de Cuadrados Mínimos

Considerando la **Distancia en "y"**

P_i: Datos Experimentales

$P_i = (x_i, y_i)$

$y_r = f(x) = mx + b$ *(Modelo)*



$x_i = (\overline{x_i} \pm \Delta x_i)$

$y_i = (\overline{y_i} \pm \Delta y_i)$

Residuos (δ_i) ⇨ $\delta_i = y_i - y_r$

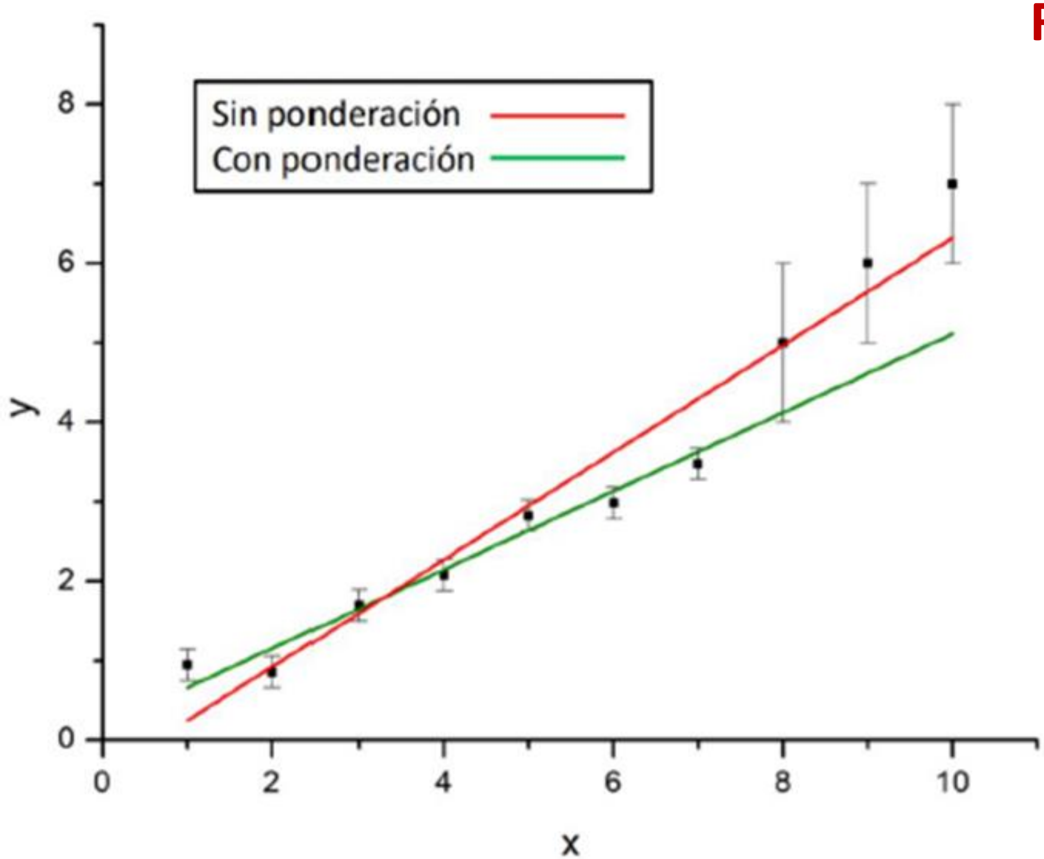
Experimental **Recta**

Como considera la **Distancia en "y"**, debo asignar en el eje "y" la MF obtenida con menor precisión

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

SIN Ponderación vs CON Ponderación

Se pondera cuando las incertezas absolutas de la MF que se asigna al eje "y" tienen diferente precisión



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

SIN

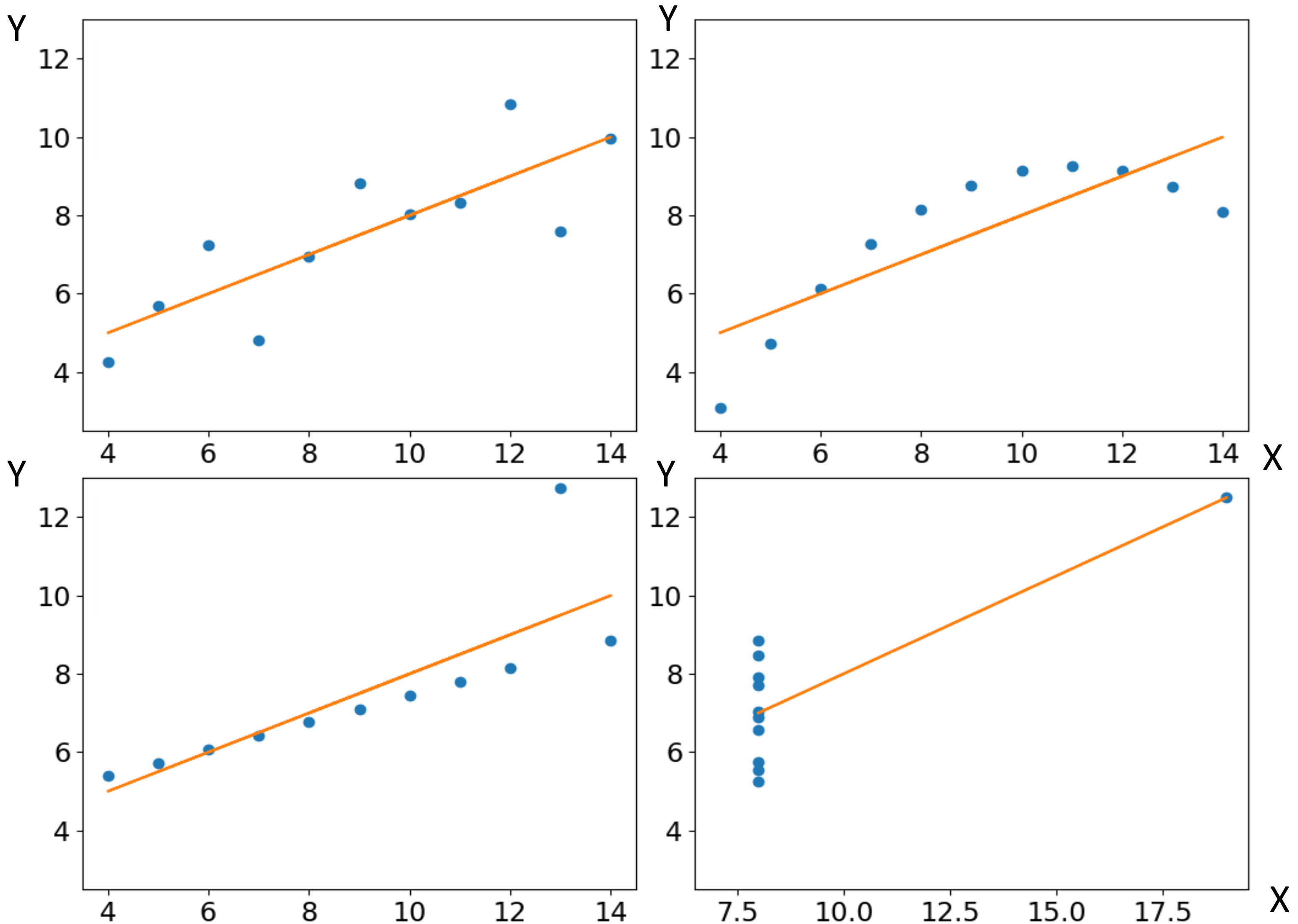
$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

Cómo si el modelo es adecuado???



Parámetros de BONDAD

Los Parámetros de Bondad pueden darnos una idea de la ***discrepancia entre los valores observados*** *(datos experimentales)* ***y los esperados según el modelo de estudio***

Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

Indica cuán fuerte es la correlación entre las variables X e Y

¿Existe algún patrón entre ellas?

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

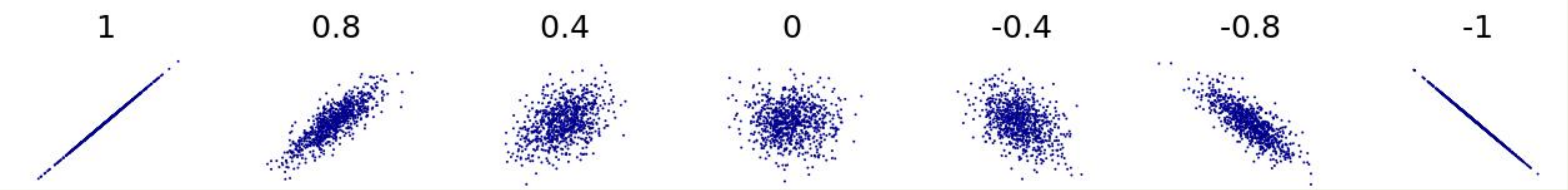
$$-1 \leq r \leq 1$$

Se espera que $|r| \sim 1$

Cálculo del Correlación de Pearson en Python: **corrcoef()**

Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)



•**Si r = 1:** Correlación positiva perfecta. El índice refleja la dependencia total entre ambas dos variables, la que se denomina relación directa: cuando una de las variables aumenta, la otra variable aumenta en proporción constante.

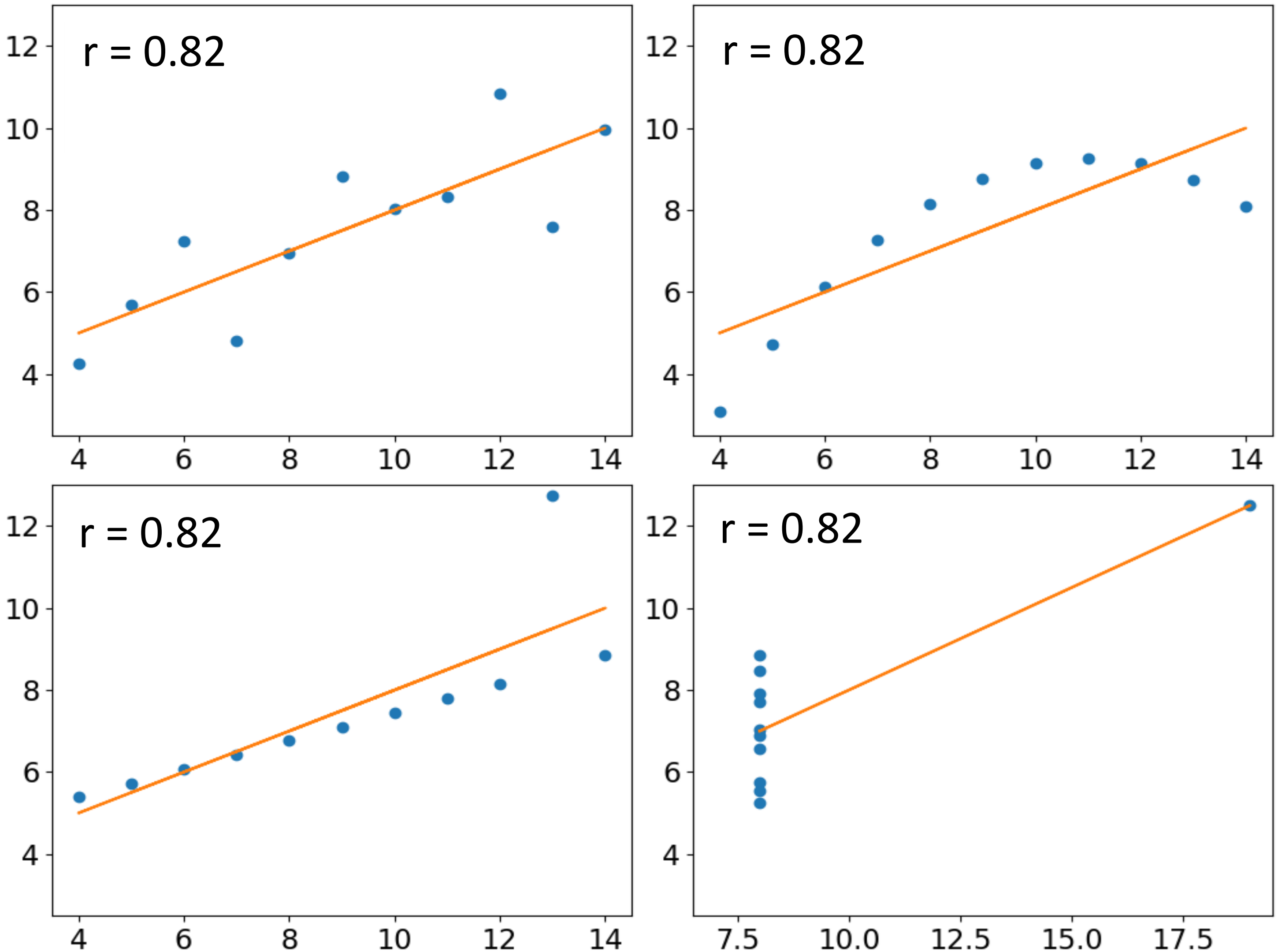
•**Si 0 < r < 1:** Refleja que se da una correlación positiva.

•**Si r = 0:** En este caso no hay una relación lineal. Aunque no significa que las variables sean independientes, puede haber relaciones no lineales entre ambas.

•**Si -1 < r < 0:** Indica que existe una correlación negativa.

•**Si r = -1:** Indica una **correlación negativa perfecta** y una dependencia total entre ambas variables lo que se conoce como **"relación inversa"**, que es cuando una de las variables aumenta, la otra variable disminuye en proporción constante.

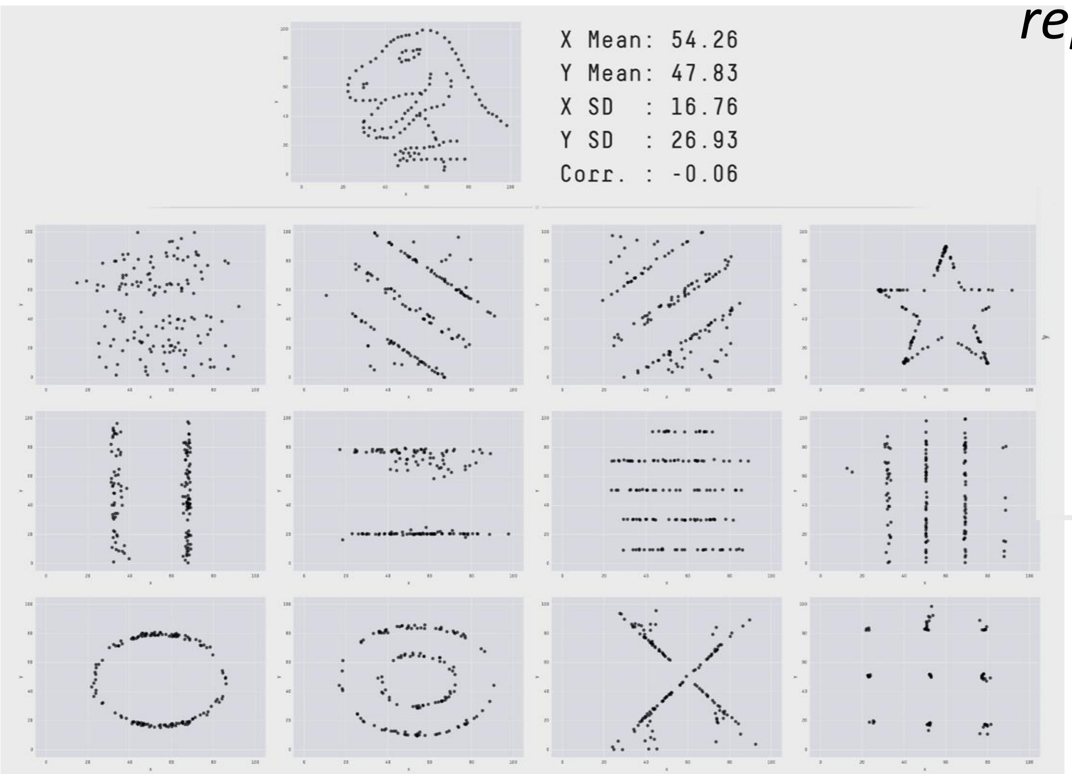
Pero **OJO!!!!** **Estos casos tienen igual valor de r!!!!!!**

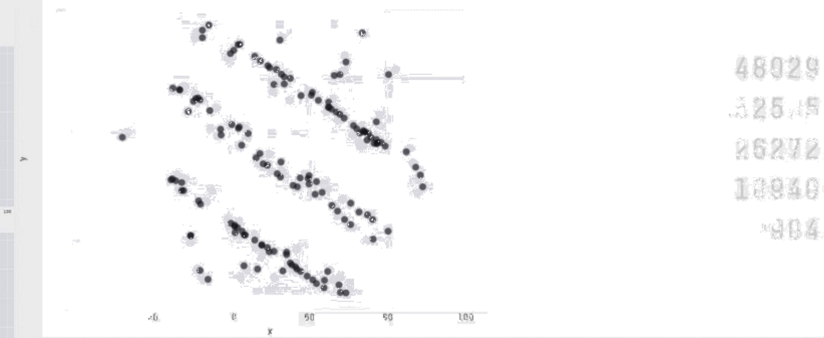


Estos casos tienen los MISMOS Parámetros Estadísticos!!!

Datasaurus dozen

... pero que producen gráficos diferentes
Por eso la IMPORTANCIA de las representaciones gráficas





https://www.autodesk.com/research/publications/same-stats-different-graphs

Parámetros de BONDAD

Chi cuadrado reducido (χ_v^2)

Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo. Pesa fuertemente la incerteza Δy

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2}$$

Caso lineal:

N = número de datos

2: los grado de libertad

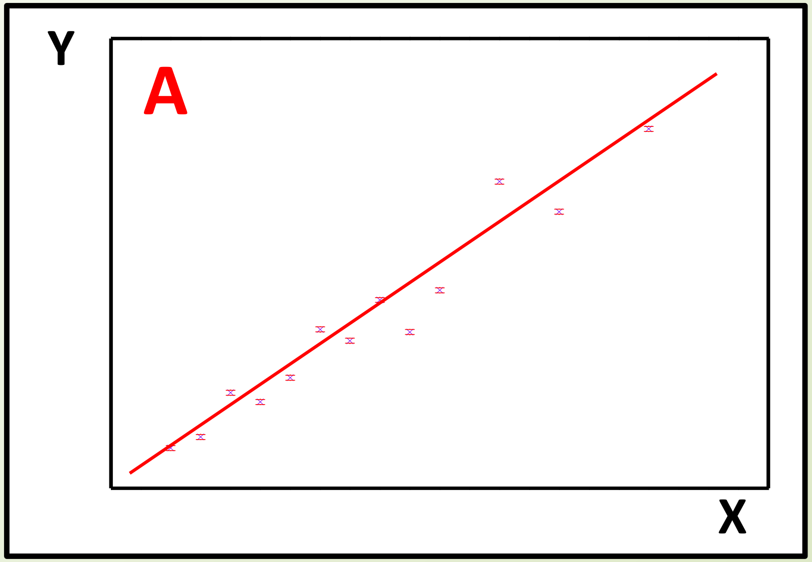
Chi cuadrado reducido ⇨ $\chi_v^2 = \dfrac{\chi^2}{N-2}$

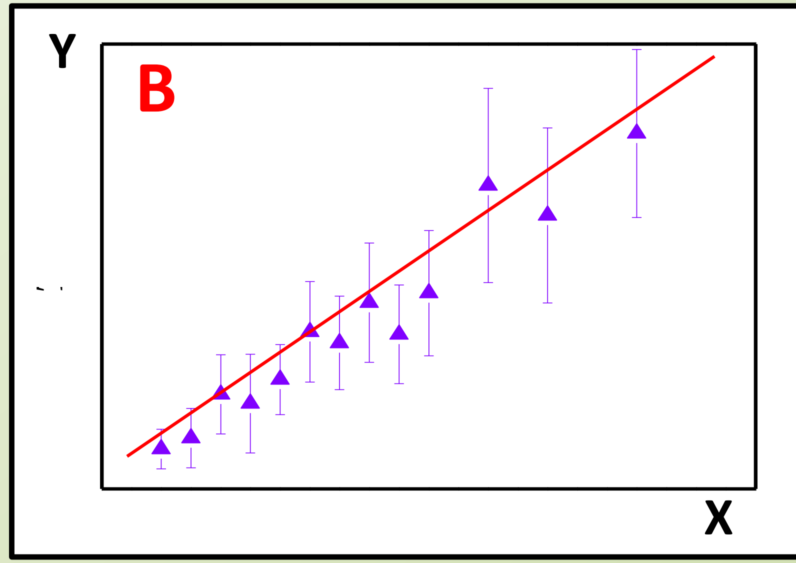
Se espera que χ_v^2

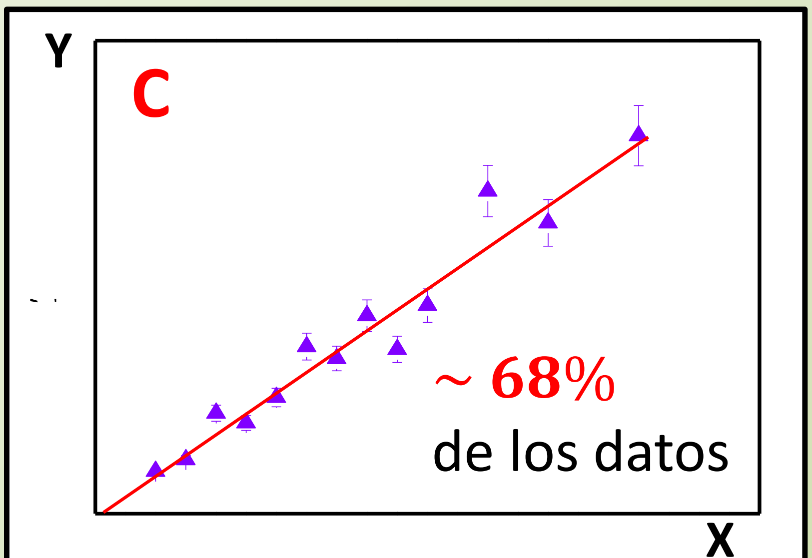
$$\left\{\begin{array}{l} \chi_v^2 \sim 1 \quad ✓ \\ \chi_v^2 \ll 1 \quad ✗ \\ \chi_v^2 \gg 1 \quad ✗ \end{array}\right.$$

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

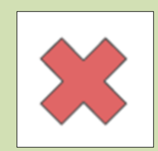
Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo. Pesa fuertemente la incerteza Δy

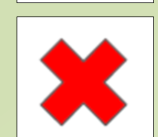






$\chi^2_v \sim 1$  C

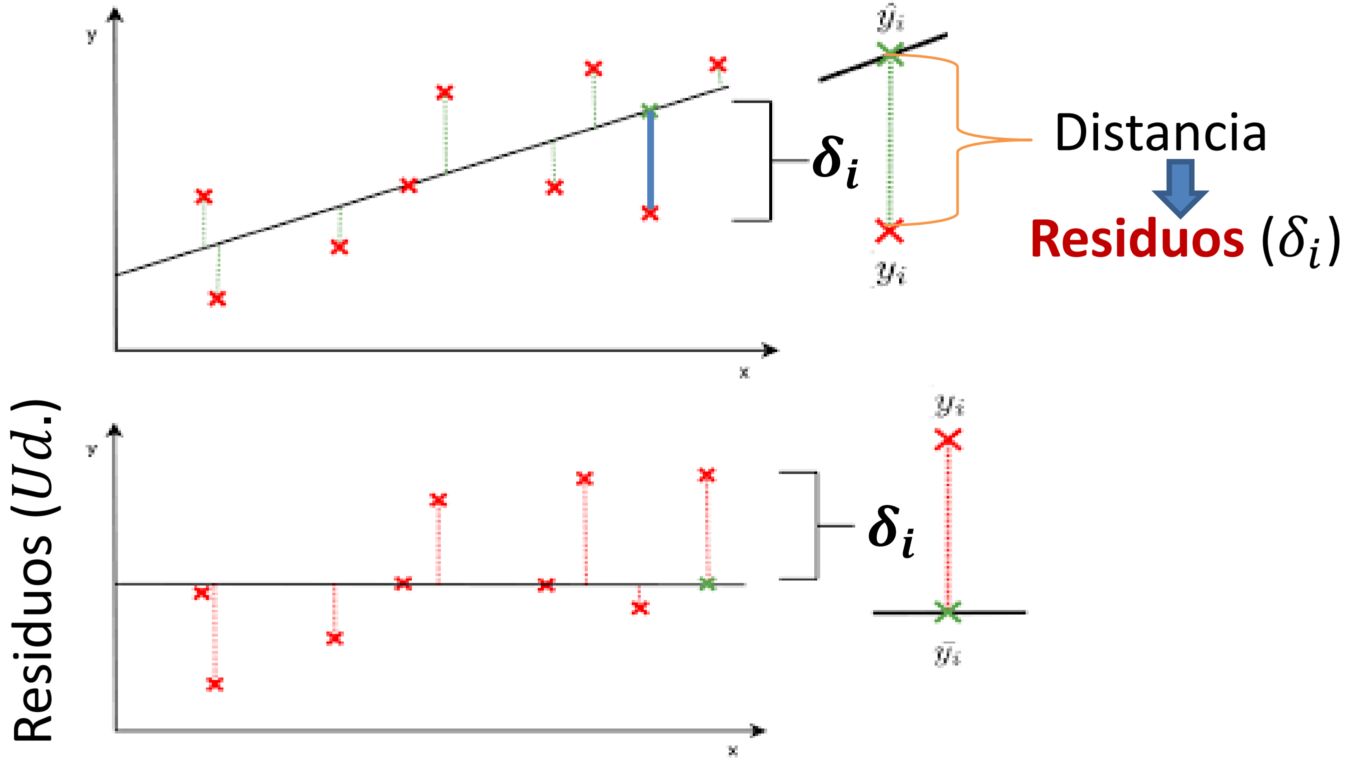
$\chi^2_v \ll 1$  B

$\chi^2_v \gg 1$  A

Parámetros de BONDAD

Gráfico de Residuos

Distancia de los puntos experimentales a la recta, en “y”



Los residuos deben ser datos distribuidos en forma aleatoria alrededor del cero.

NO DEBEN tener ESTRUCTURA

Por esto la **NECESIDAD** de evaluar los **RESIDUOS**

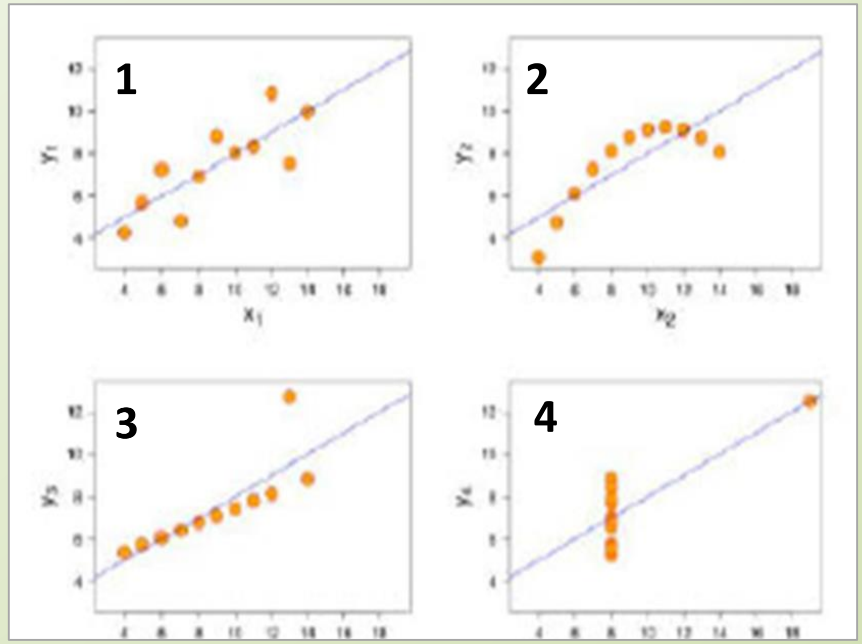
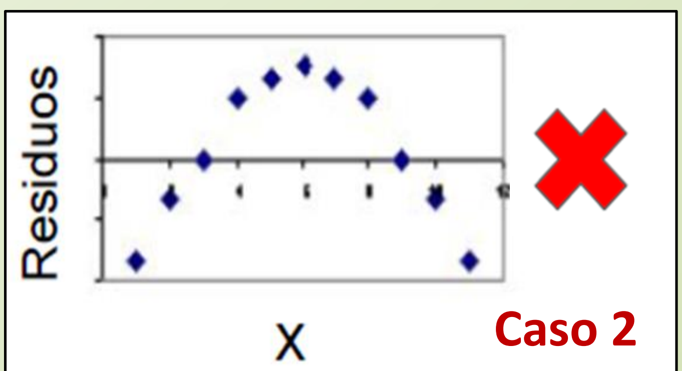
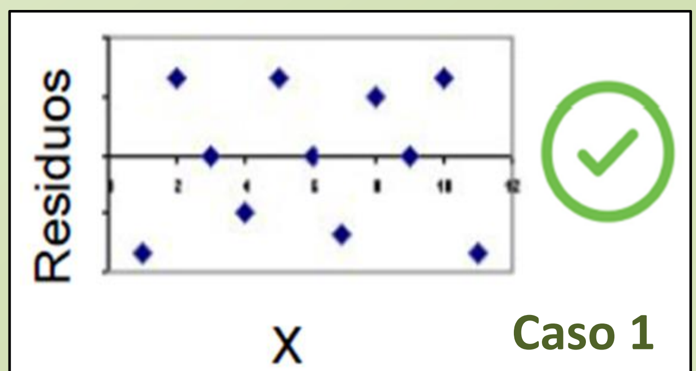


Gráfico de Residuos

En los casos 2, 3 y 4 la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal. **Los residuos tienen estructura**





Parámetros de BONDAD

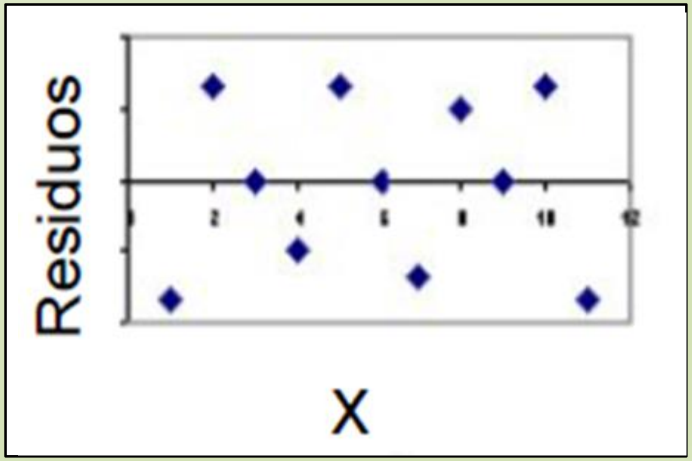
¿Qué esperamos?

Parámetros de BONDAD que nos servirán de ayuda:

Coeficiente de Correlación de Pearson r → $|r| \sim 1$

Chi-cuadrado reducido χ_v^2 → $\chi_v^2 \sim 1$

Residuos Sin ESRUCTURA →



Objetivo de la práctica de hoy

Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de los datos del Período de un Péndulo T y su Longitudes l

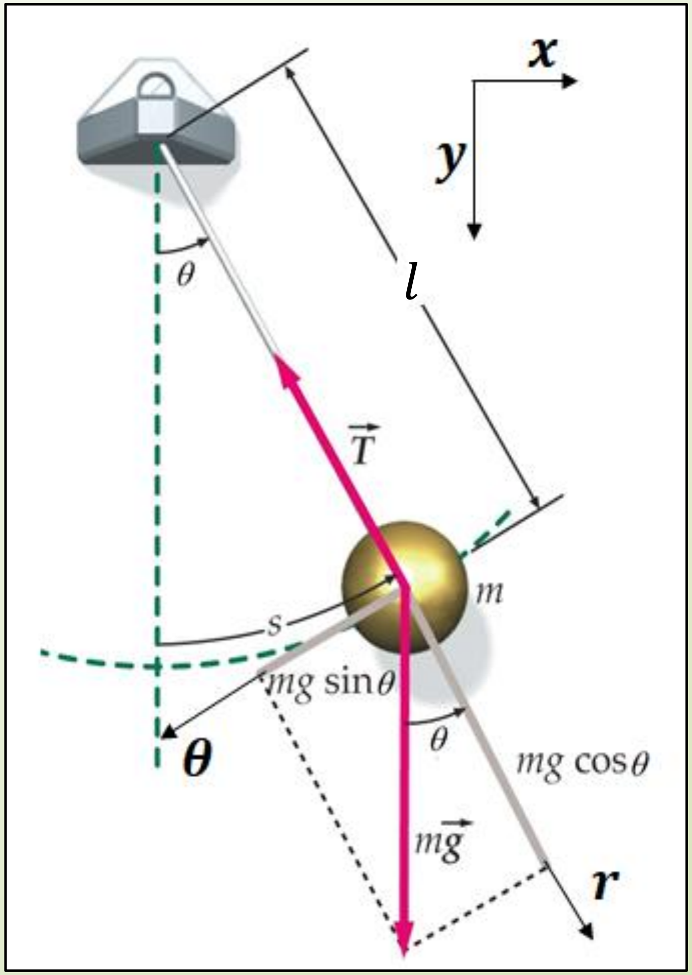
$$\boxed{\boldsymbol{g} = (\overline{\boldsymbol{g}} \pm \Delta \boldsymbol{g})\ \boldsymbol{Ud.}}$$

- **<u>PRIMER PASO</u>:**

  BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE $\boldsymbol{g}$ con $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{l}$

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}:\ mgcos\theta\ - T = ma_r \ \longrightarrow\ a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}:\ -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \ \longrightarrow\ a_\theta = -gsen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

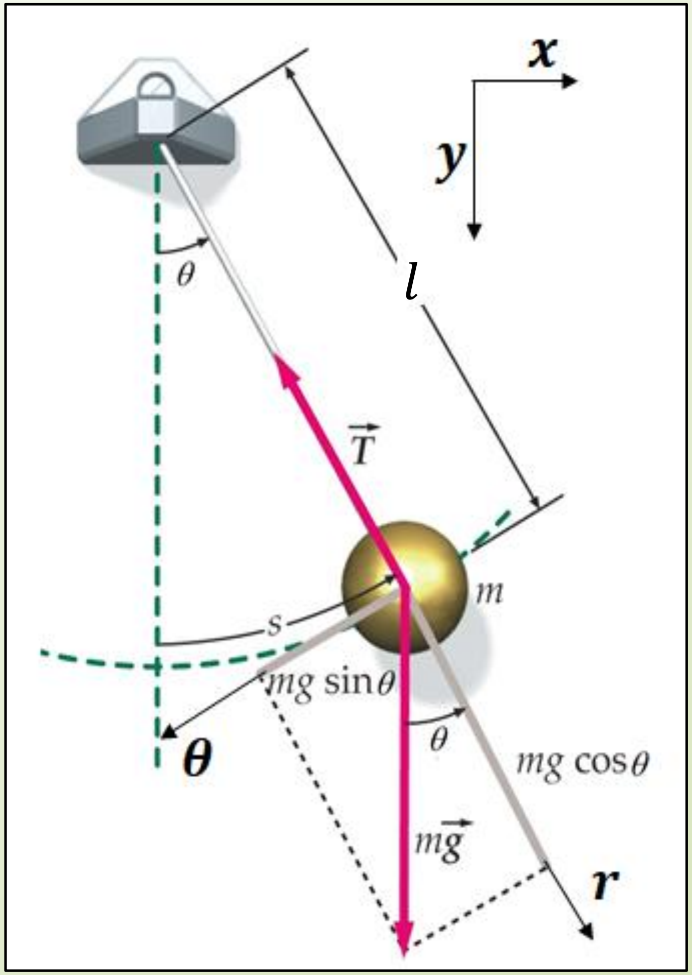
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow sen\theta \approx \theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi}$ $\quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

Período de un Péndulo Simple

- Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2do orden

$$l\,\ddot{\theta} + g sen\theta = 0$$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 5

Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de T y l de DIFERENTES Péndulos y un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

- Determinar el **período del péndulo T para 10 longitudes l** diferentes.
  Rango de l: desde 30 cm hasta lo máximo que puedan!

- Graficar T **en función de l** (**gráfico de puntos con incertezas**).
  Discutir: *¿Qué forma parece tener la función graficada? ¿Se puede aplicar un modelo lineal al gráfico* $T(l)$ y obtener g?

ACTIVIDAD

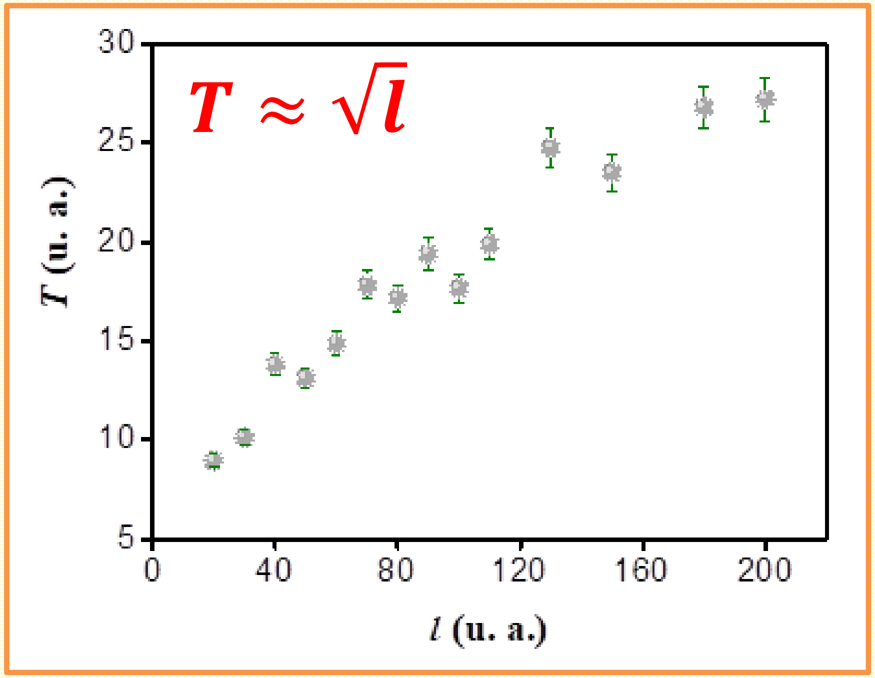
EXPERIMENTO

Exp. 5

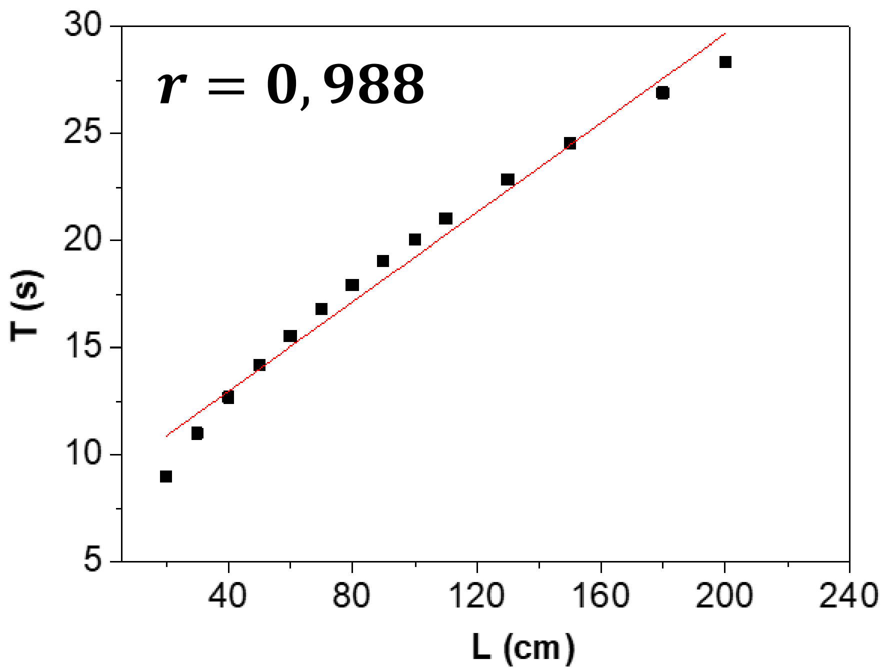
Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de T y l de DIFERENTES Péndulos y un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

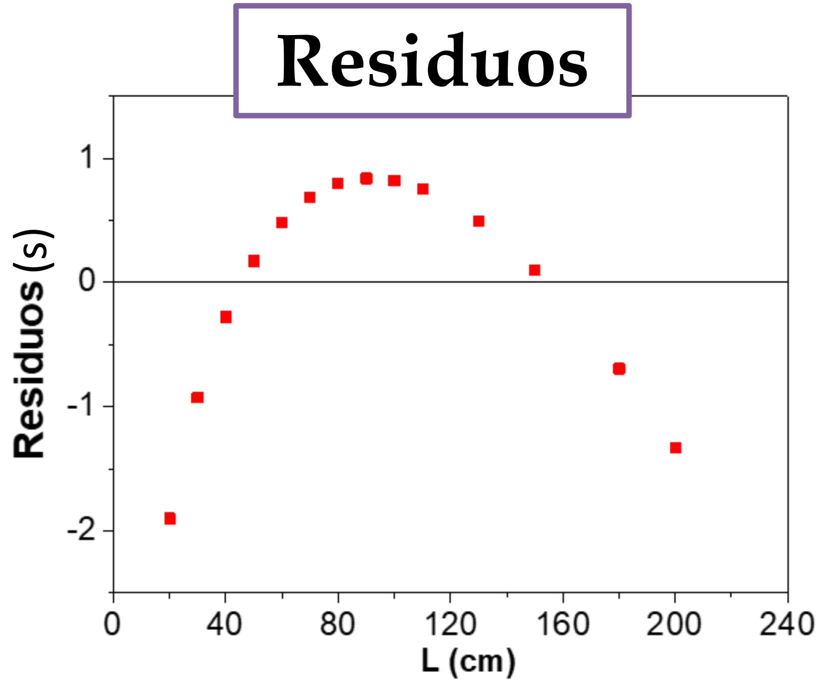
PERO T y l SE RELACIONAN LINEALMENTE??

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Está bien usar el modelo lineal en este caso?





NOOOOOO es lineal!!

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

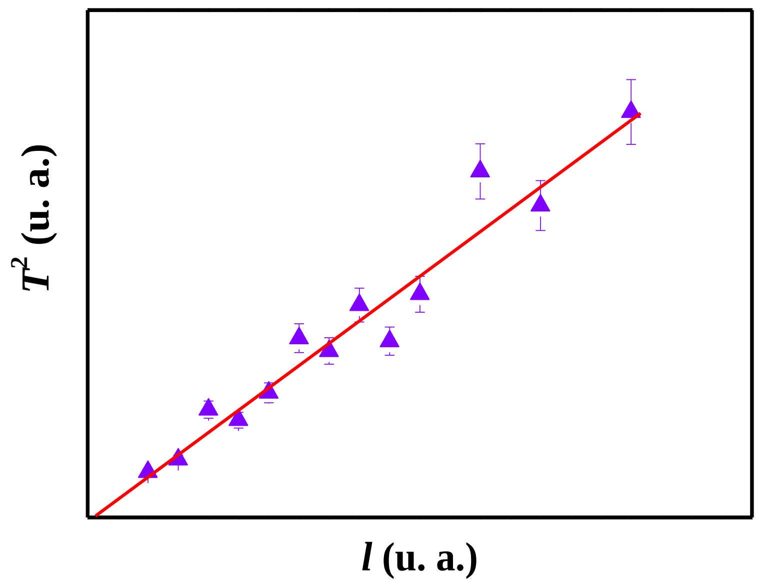
Exp. 5

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\underbrace{T}_{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\underbrace{\sqrt{l}}_{\tilde{l}}$$

$$\underbrace{T^2}_{\tilde{T}} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\underbrace{l}_{l}$$



✓ $y = mx + b$

EXPERIMENTO

Exp. 5

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ y $l = l$:

  1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $T^2 \rightarrow \Delta T^2$) y Δl **Propago!!**

  2- Obtenga los errores relativos de $\tilde{T}$ y l ($\varepsilon_{r_{\tilde{T}}}$ y ε_{rl}) y compárelos

- Graficar T^2 en función de l con las incertezas (o l en función de T^2 dependiendo de los $\varepsilon_{r_{T^2}}$ y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje "y".

- Realizar un ajuste por un modelo lineal: ✓ $y = mx + b$

  ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?

  ¿Incluye b al cero? ¿A qué podría deberse que no lo incluyera?

- Calcular y discutir los parámetros de bondad: r, χ^2_v y realizar el gráfico de los residuos del modelo.

- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud$. a partir de los resultados del modelo.

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 5

- Para obtener $\boldsymbol{T}$, tomen con un cronómetro 40 período seguidos ($\boldsymbol{T_{40}}$) por cada longitud.

El resultado del período será: $\boldsymbol{T} = (\bar{T} + \Delta T)\ \boldsymbol{Ud}.$

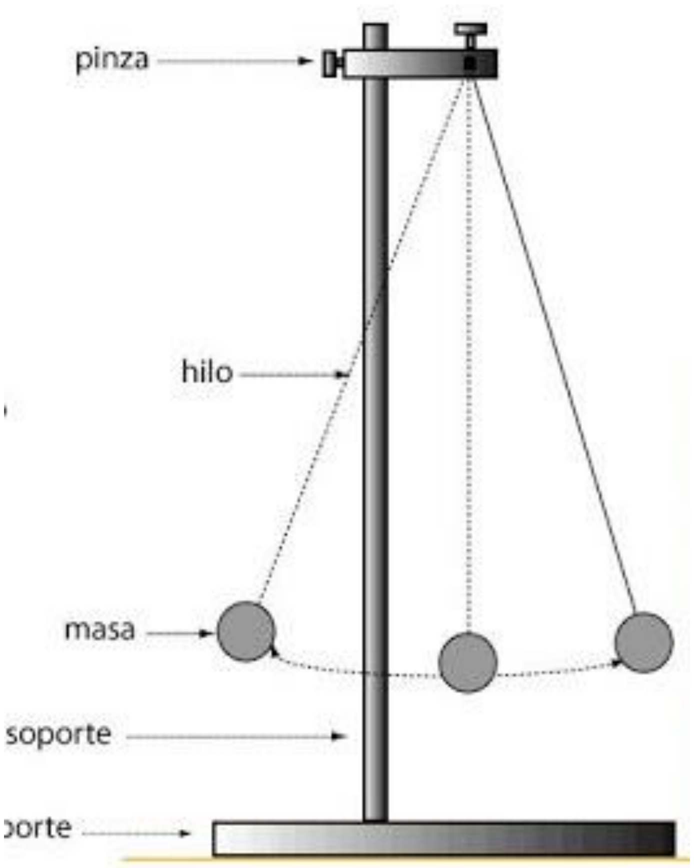
$$\boldsymbol{T_{40} = 40.T} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T = \frac{T_{40}}{40}}}$$

ΔT?

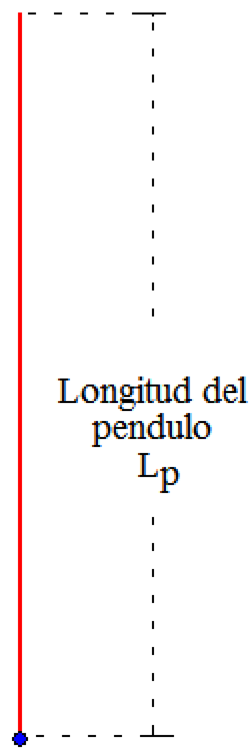
$$\boldsymbol{\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 \Delta {T_{40}}^2} = \frac{1}{40}\Delta T_{40}}$$

$\boldsymbol{\Delta T_{40}}$?

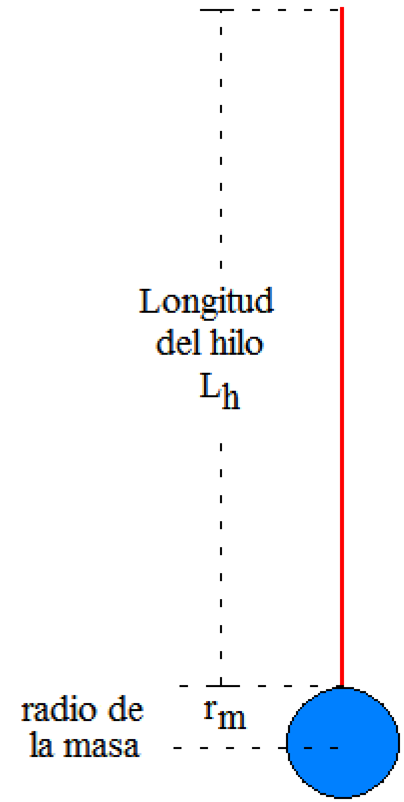
PÉNDULO



Caso ideal



Caso real



AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

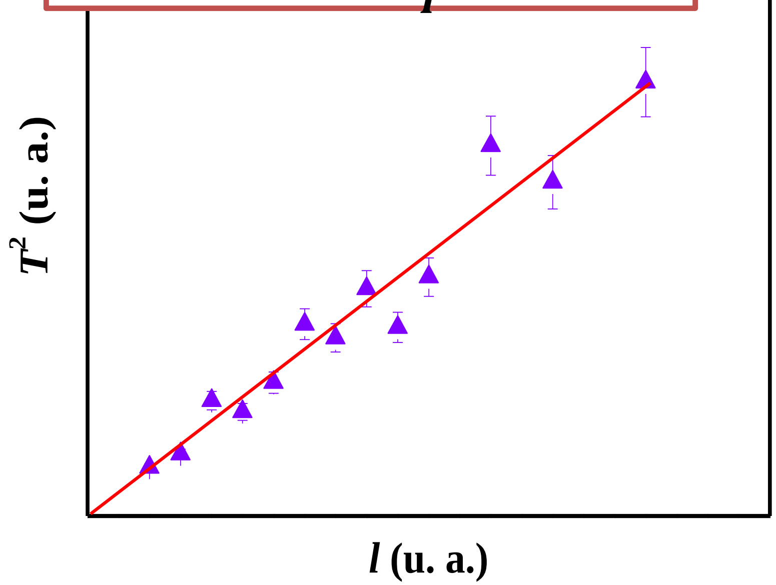
$$m = \frac{4\pi^2}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\boxed{\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}}$$

¿ Δg?

Propago!!

Ejemplo Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \gg \varepsilon_{r_l}$



$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta\pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π?

AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r\ l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \Rightarrow \underbrace{l}_{y} = \frac{g}{4\pi^2} \underbrace{T^2}_{x}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \longrightarrow g = 4\pi^2 m$$

$¿\Delta g?$

Propago!!

INFORME 2: INFORME EN CAMPUS

MIERCOLES 1° DE MAYO HASTA LAS 12 HS DEL MEDIODÍA