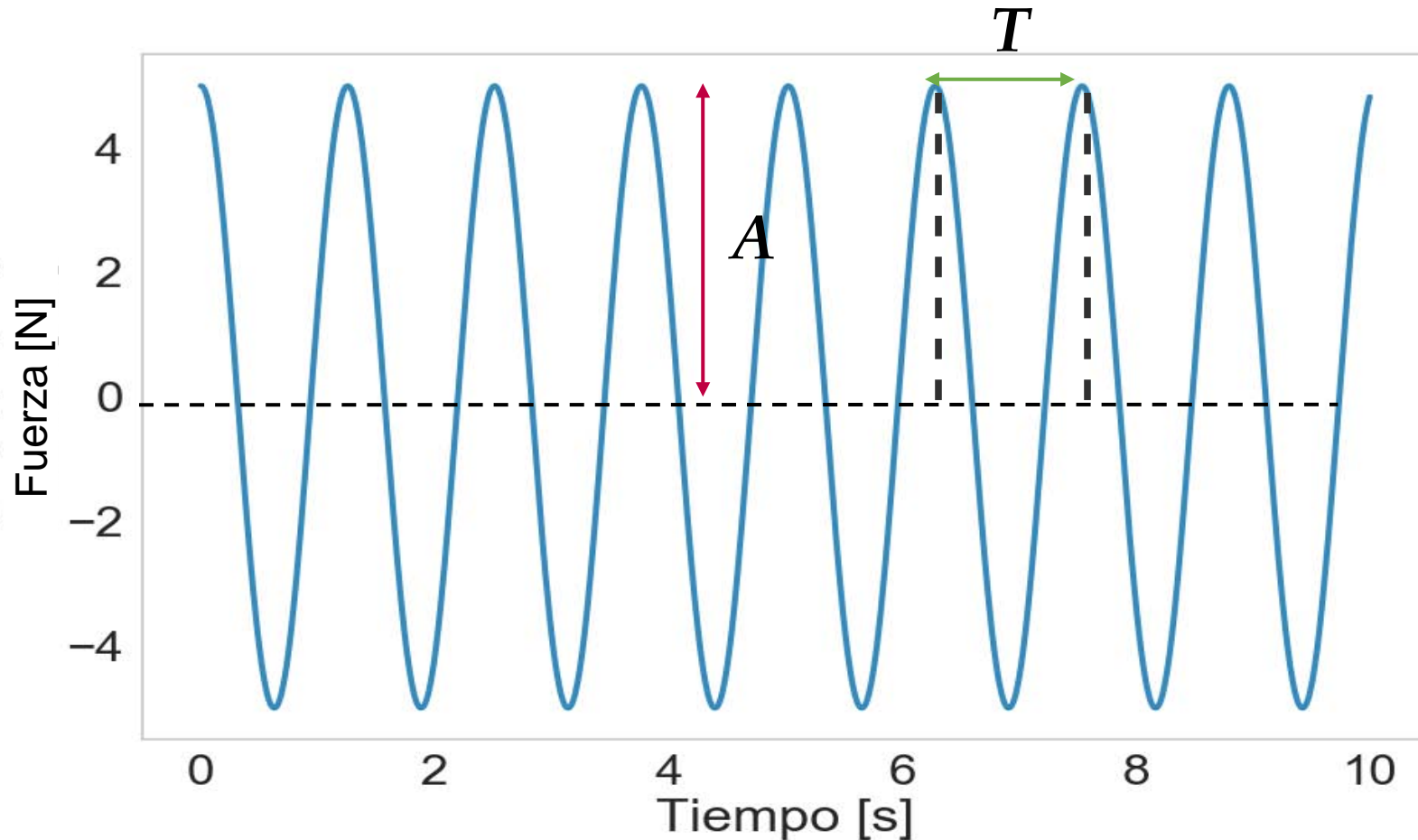


# **Movimiento oscilatorio**

Parte 2: movimiento oscilatorio armónico amortiguado

## Movimiento oscilatorio sin amortiguamiento

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \longrightarrow \quad y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi) \quad \longrightarrow \quad F(t) \propto y(t)$$



$$F(t) = F_A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

Frecuencia angular natural  
de oscilación

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(sistema masa – resorte)

**Sistemas reales** → mov. oscilatorio está amortiguado debido a la acción de fuerzas disipativas.

¿ **Cómo será el amortiguamiento?** → Depende de la relación funcional de la fuerza disipativa con las variables del problema.

Consideremos un sistema masa – resorte que se mueve en el seno de un fluido viscoso



Habrà una fuerza que intenta frenar el movimiento

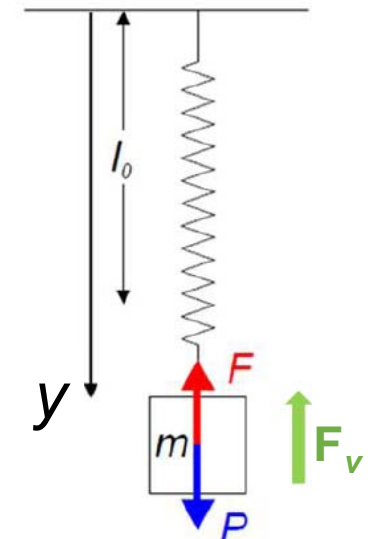
Supongamos esa fuerza de la forma:

$$F_v = -b v = -b \dot{y}$$

(fuerza viscosa o de fricción viscosa)

$v$ : velocidad del cuerpo

$b$ : constante que mide el grado de viscosidad del fluido



## Movimiento oscilatorio amortiguado

- ¿varía la amplitud?
- ¿varía el período de oscilación a lo largo del movimiento?
- ¿como será el período respecto del movimiento sin amortiguamiento?

Aplicando la 2da Ley de Newton

$$mg - k(y - l_0) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

→  
reagrupando

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = g + \frac{kl_0}{m}$$

Definimos la **cte. de amortiguamiento del fluido**:  $\gamma = \frac{b}{2m}$

$$y = y_H + y_P$$

Se obtiene  
resolviendo

Ecuación  
homogénea:  $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

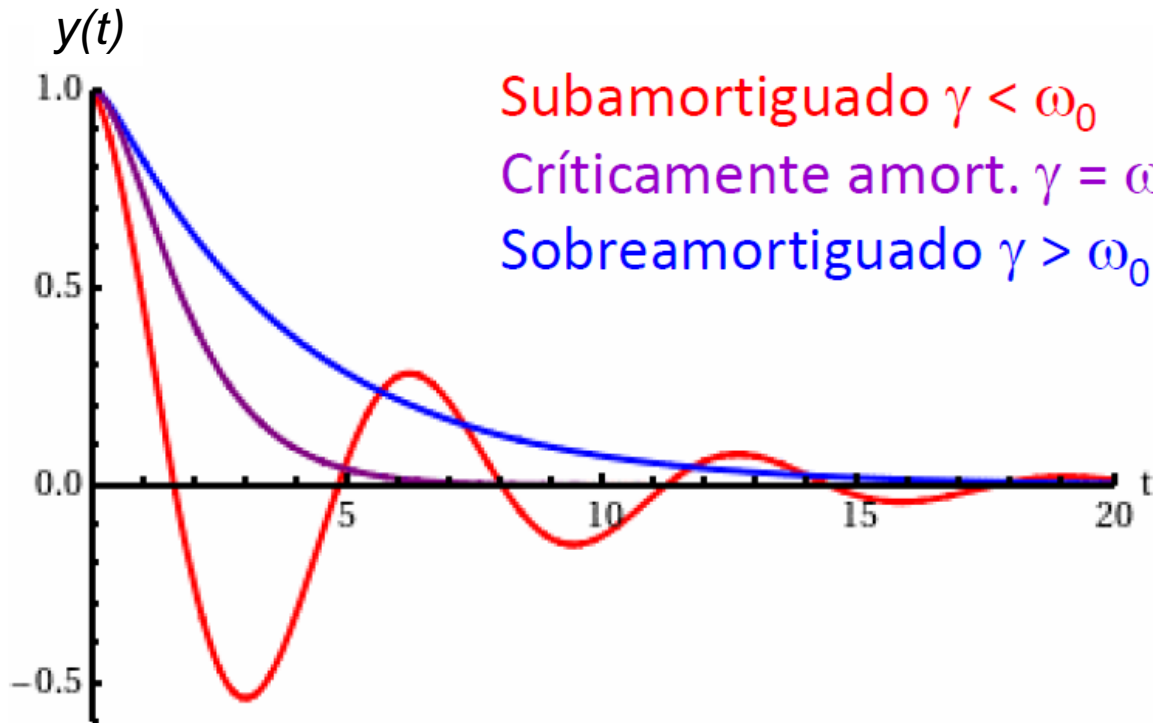
Solución  
particular:  $y_P = l_0 + \frac{mg}{k}$

# Movimiento oscilatorio amortiguado

Ecuación homogénea:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Tres casos}$$

- Sobreamortiguado  $\rightarrow \gamma^2 > \omega_0^2$   
(no oscila)
- Amortiguamiento crítico  $\rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2$   
(no oscila)
- Subamortiguado  $\rightarrow \gamma^2 < \omega_0^2$   
(oscila)



Vamos a trabajar en el régimen **subamortiguado**  $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

solución

$$y(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

**Cte. de amortiguamiento del fluido**  $\rightarrow \gamma = \frac{b}{2m}$

**Frecuencia angular de la oscilación**  $\rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$   
(representa la velocidad de cambio de la fase del movimiento)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$   
(sistema masa - resorte)

**Unidades de  $\omega \rightarrow 1/s$**

Relación entre  $\omega$  y el período  $T \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

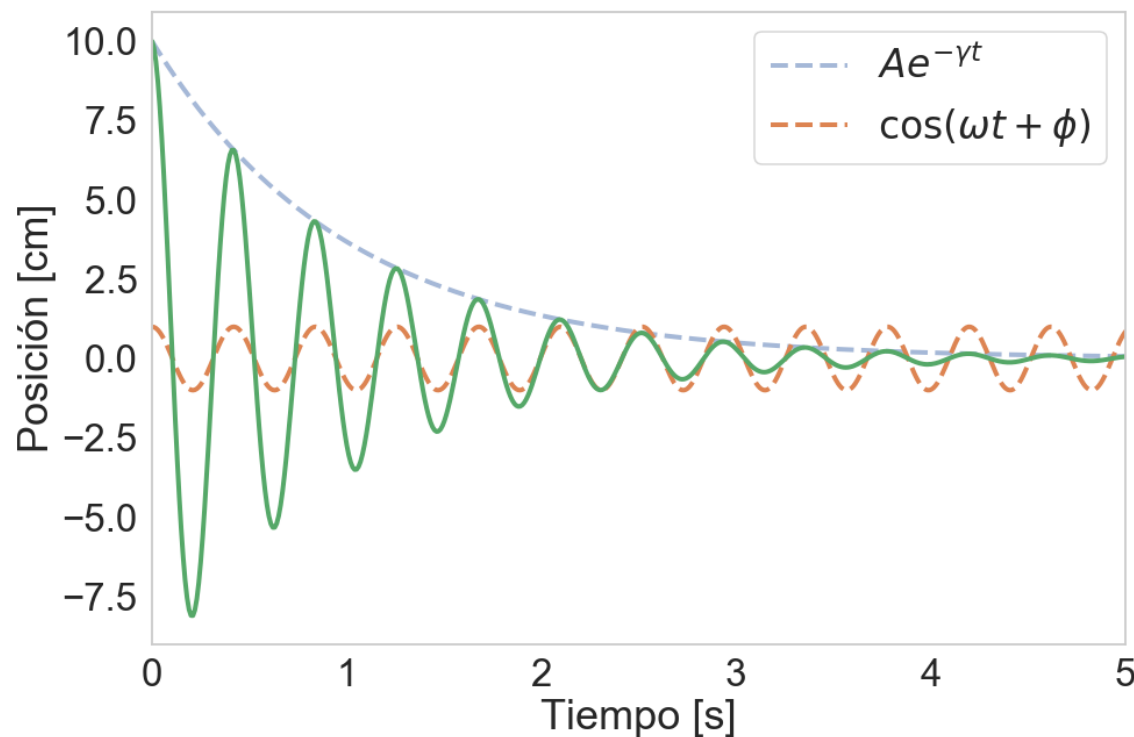
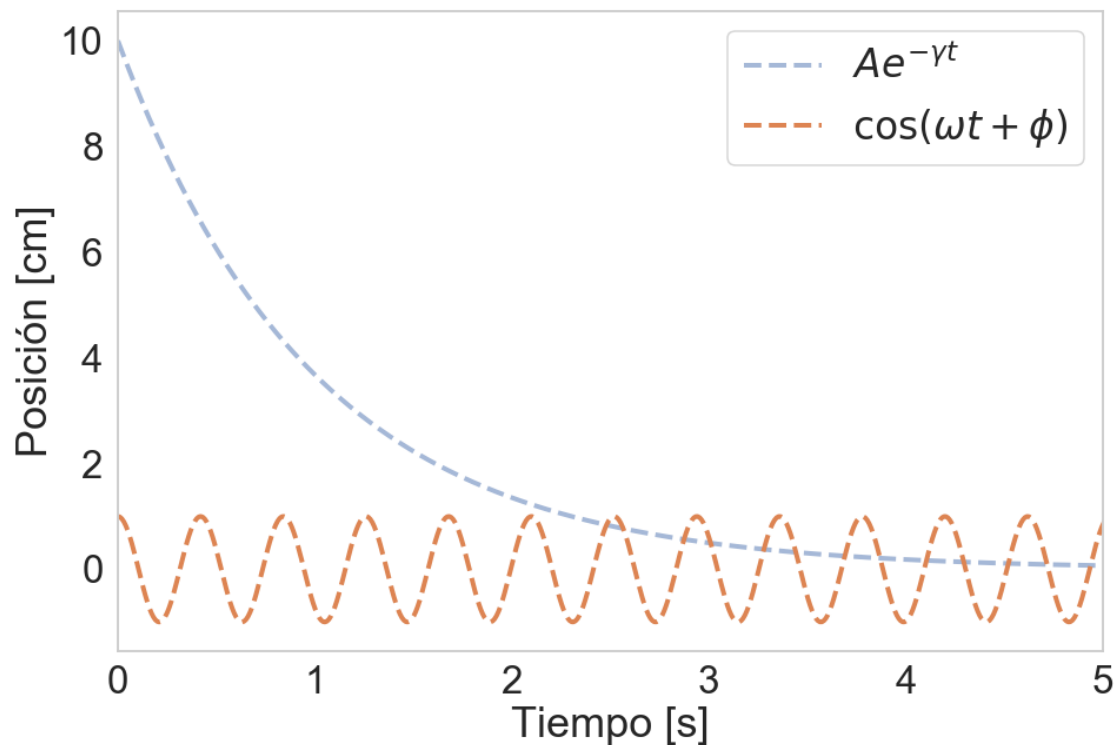
# Grafiquemos las soluciones

$$f(t) = A e^{-\gamma t}$$

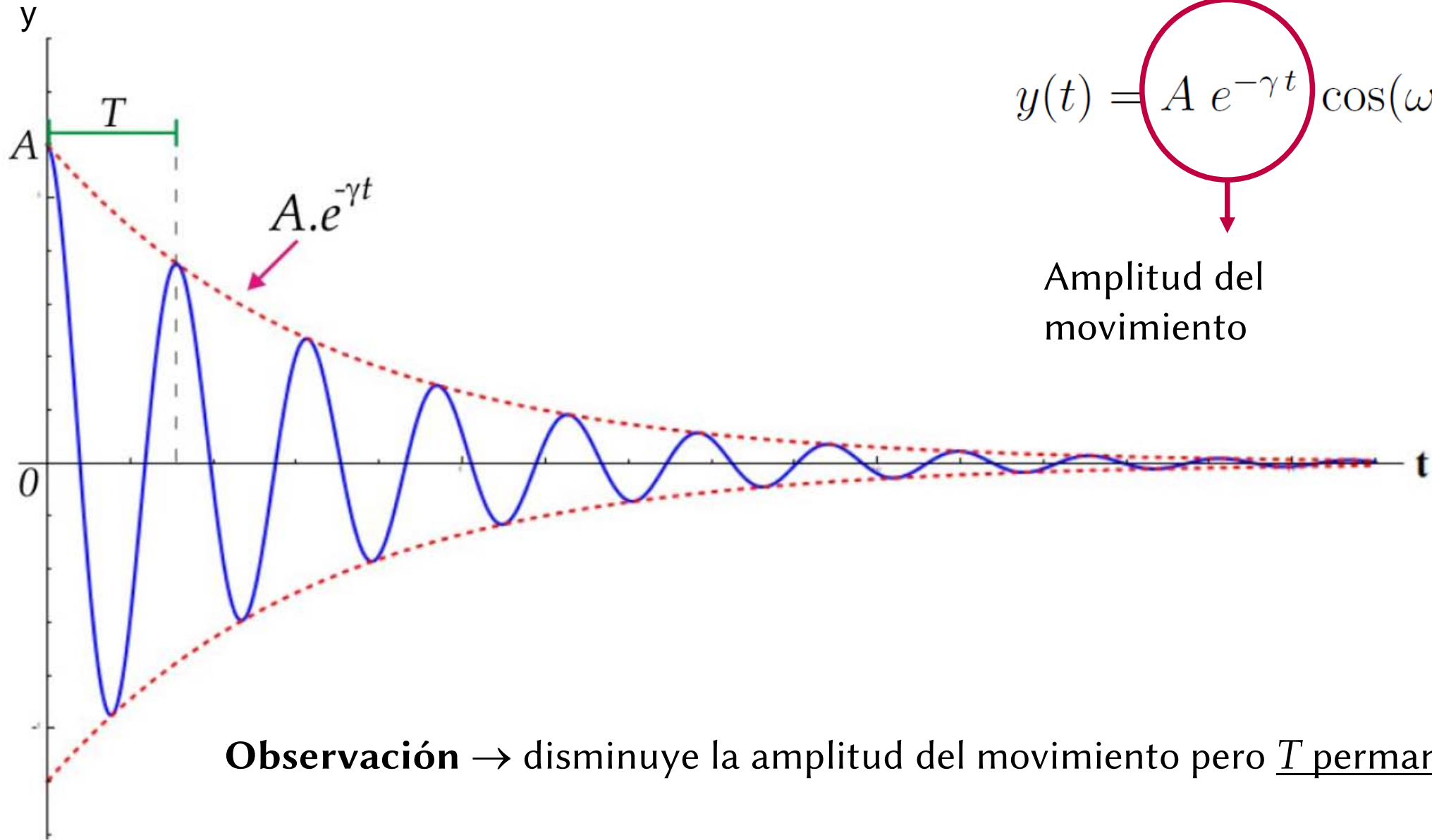
$$g(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

Si las multiplicamos

$$y(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$



# Movimiento oscilatorio amortiguado



$$y(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitud del movimiento

**Observación** → disminuye la amplitud del movimiento pero  $T$  permanece constante.



**Actividades** → medir con el sensor de fuerza el movimiento de un sistema masa – resorte con amortiguamiento

**1- Calibración el sensor de fuerza** → El sensor entrega a la PC un valor de tensión. Para que el sensor arroje un valor de fuerza en Newton lo tenemos que calibrar.

Respuesta del sensor: lineal  $\Rightarrow$  necesito 2 valores de fuerza conocidas para la calibración.

F1 y F2: fuerzas conocidas

V1 y V2: lecturas del voltaje.

$$Fuerza = K0 + K1.Voltaje \quad K0, K1 = ctes$$

**Chequear calibración.**

Fuerza	Voltaje
F1	V1
F2	V2

→ Determino  $K0$  y  $K1$

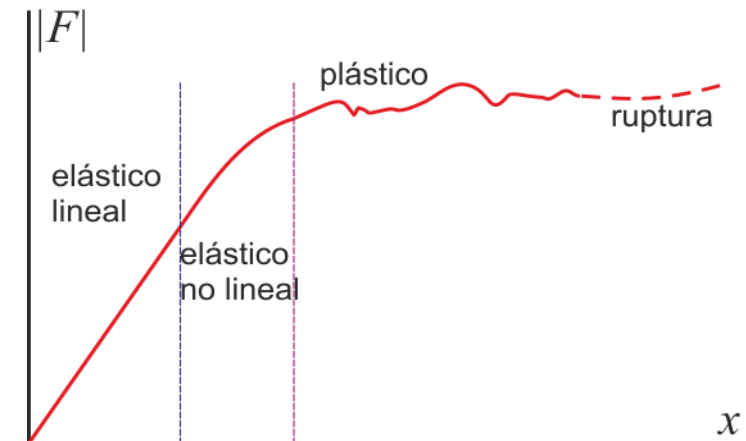
## 2- Determinar la constante elástica $k$ del resorte

Resorte → **colgar masas  $\leq 800$  g** → régimen elástico lineal

Sensor de fuerza → Rango: 10 N

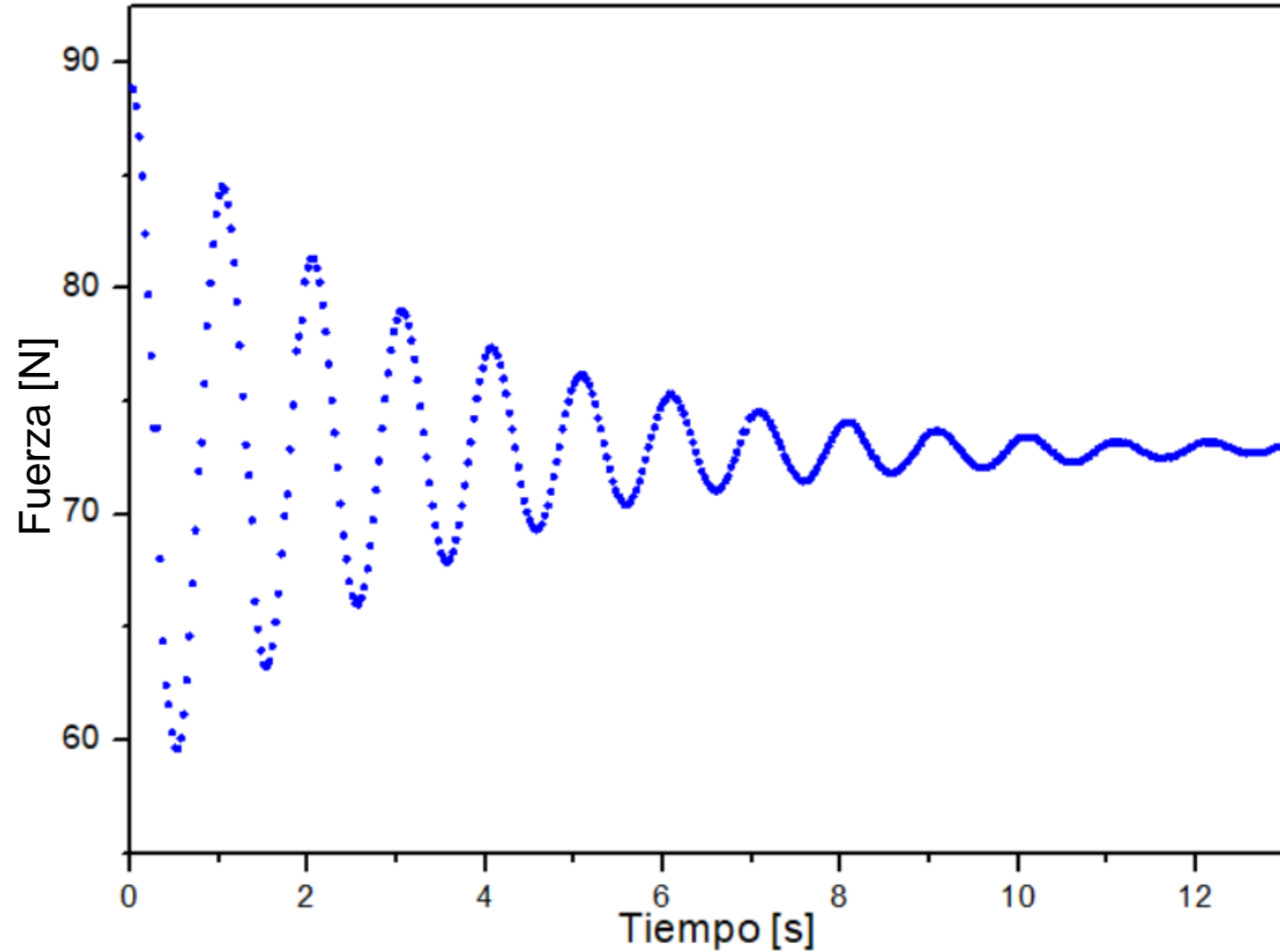
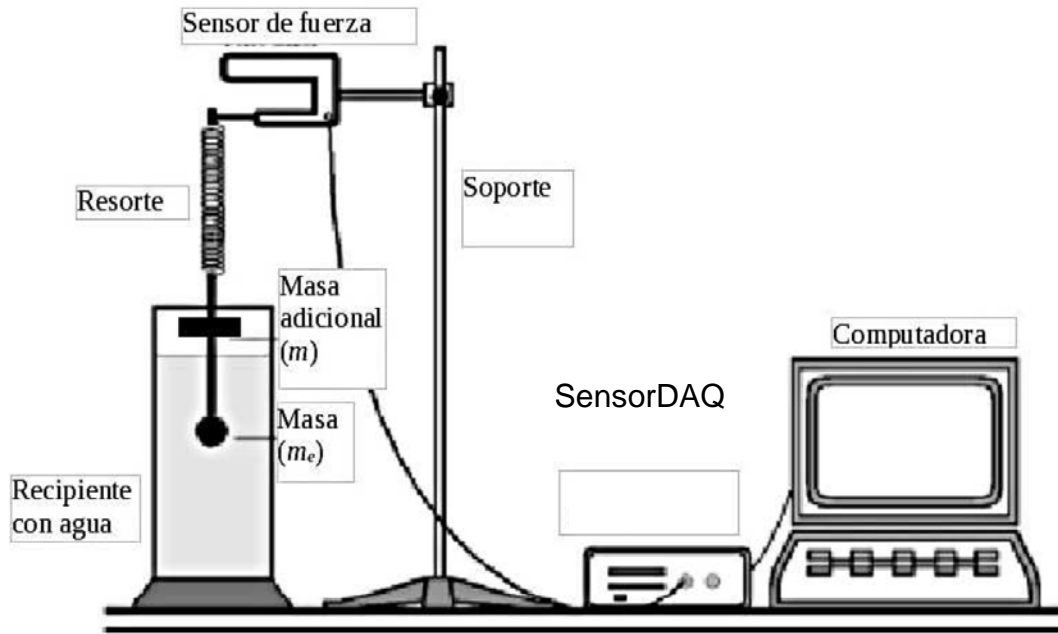
Medir Fuerza vs. Tiempo para 5 masas distintas  
y calcular el  $k$  con el método dinámico (Ref: clase pasada)

Importante: elegir las masas para cubrir todo el rango de trabajo



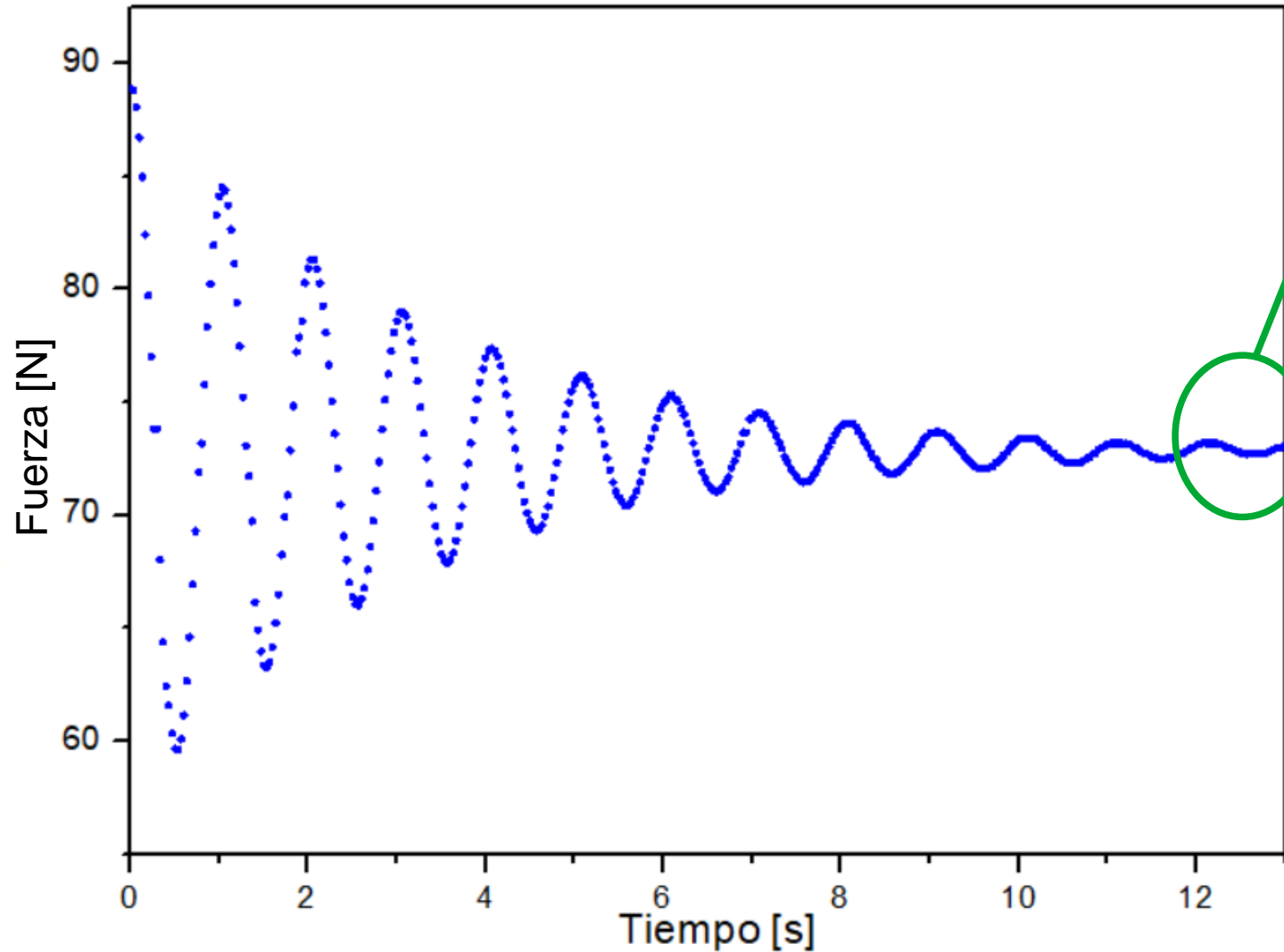
### 3- Medir con el sensor de fuerza el movimiento de un sistema masa – resorte con amortiguamiento

$$F(t) = F_A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$



Observación → hay que incluir las incertezas en el gráfico.

**Objetivo** → Hallar el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$  por distintos métodos y determinar otros parámetros del movimiento.



Si no se observan oscilaciones eliminar los últimos datos para el análisis. No aportan información.

**¿Cómo encuentro el valor  $\gamma$  de a partir de estos datos?**

**Veremos 4 métodos de análisis.**

# Método 1 →

Sabemos que vale

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \right\}$$

$$F(t) = F_A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$

Aquí T es el período de la oscilación

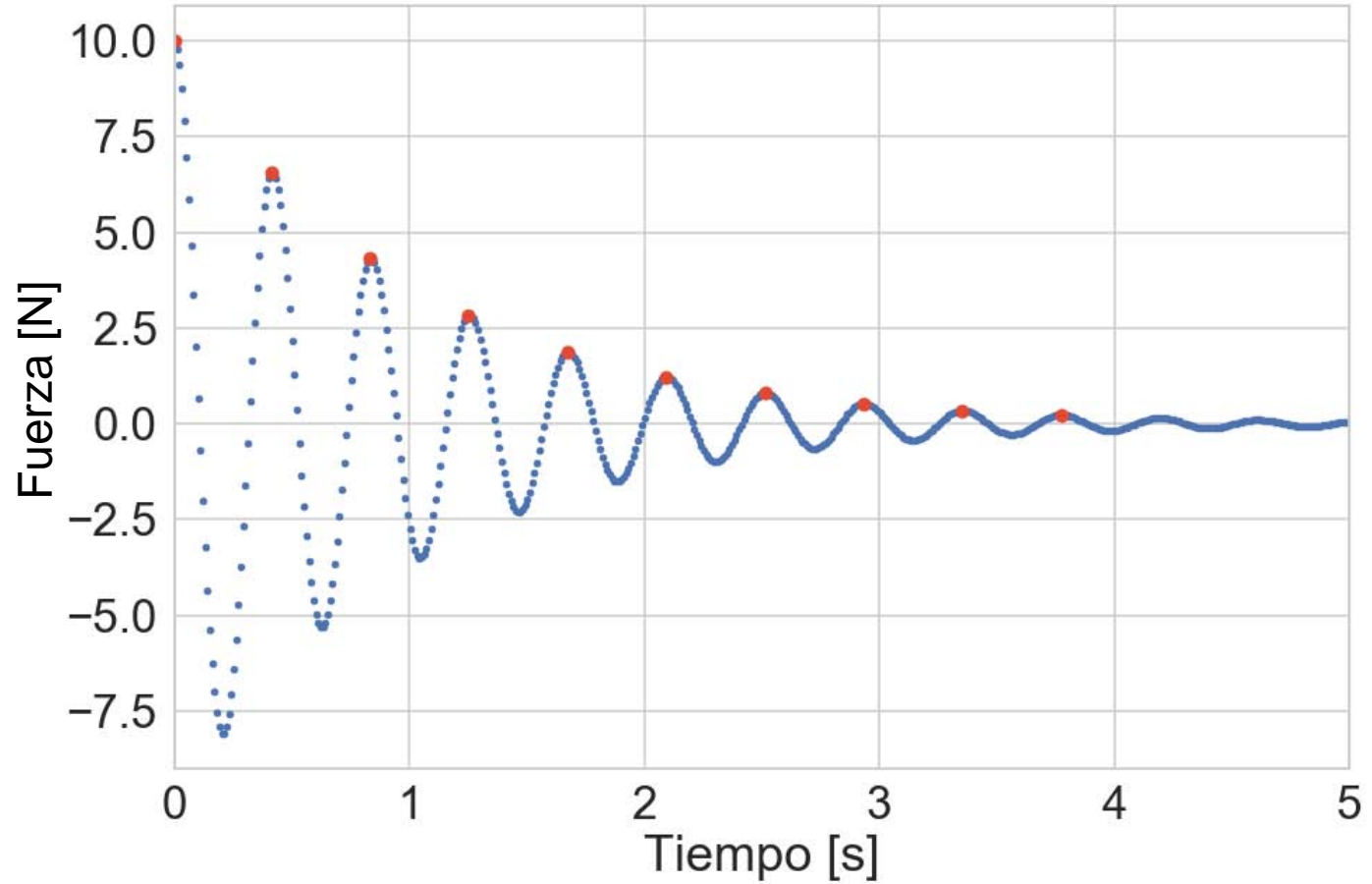
### ¿Cómo encuentro el valor $\gamma$ ?



- 1- Busco máximos
- 2- Obtengo T (promedio varios períodos)
- 3- Comparo  $\omega$  y  $\omega_0$ .

**Ver Colab para Análisis de Datos (Página de la materia, Material Adicional)**

Para determinar el período T con Origin ver tutorial en la página de la materia (Material adicional)



## Método 2 →

¿Cómo encuentro el valor  $\gamma$ ?

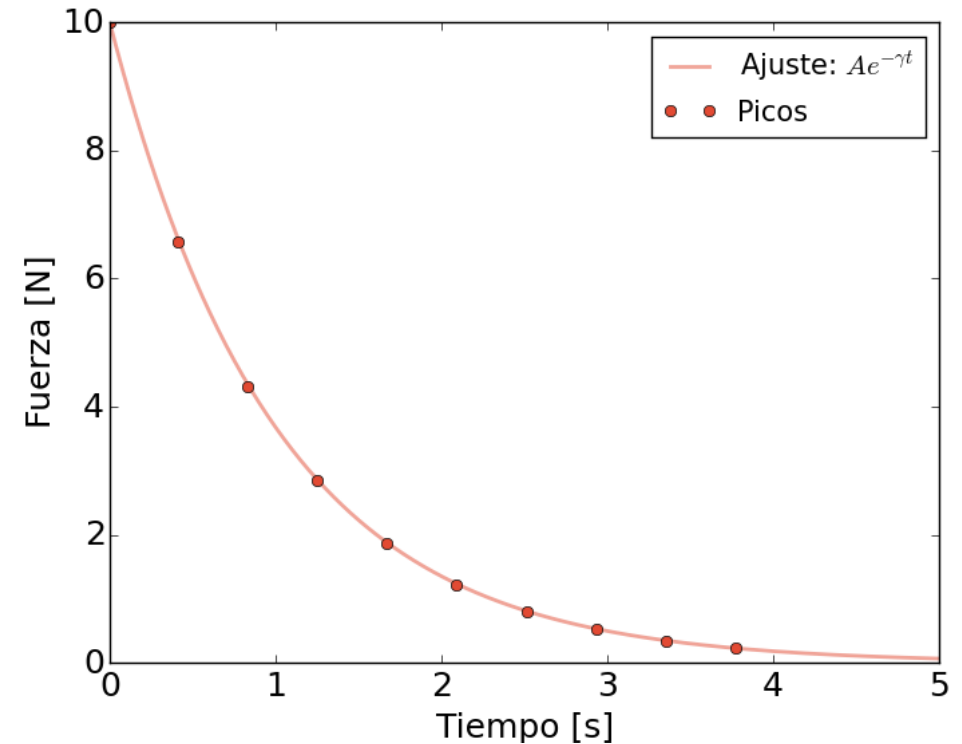
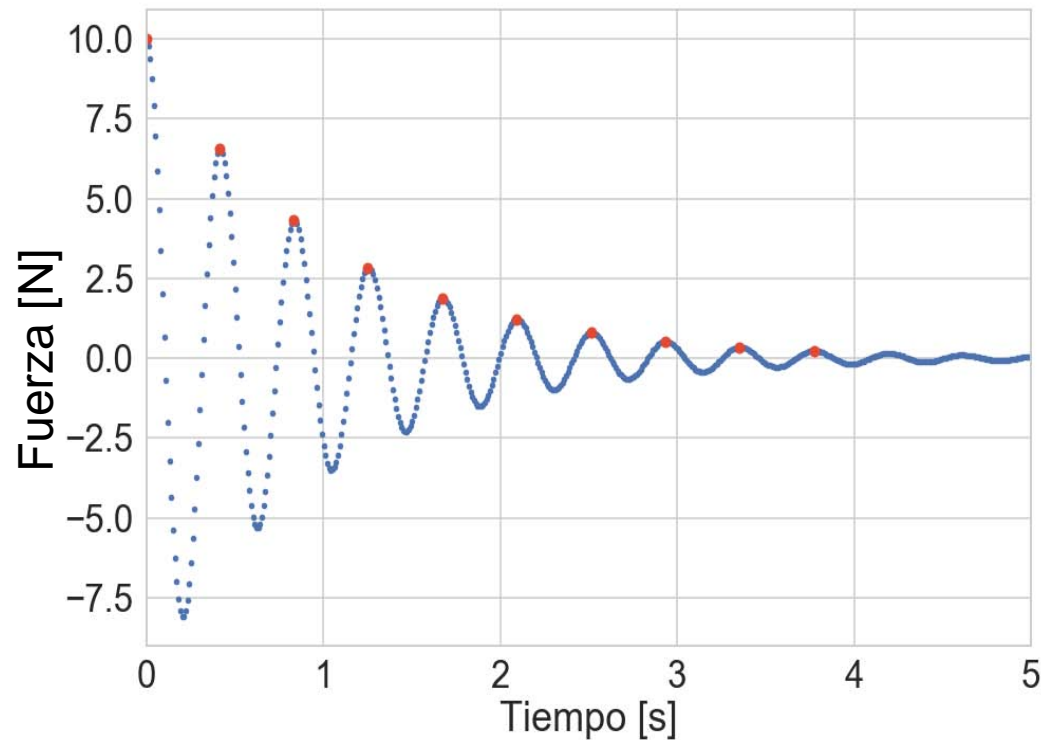


- 1- Busco máximos
- 2- Ajuste **no lineal**

$$F(t) = F_A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$

Amplitud del movimiento

$$F_{max}(t) = F_A e^{-\gamma t} + F_0$$



## Método 3 →

¿Cómo encuentro el valor  $\gamma$ ?



- 1- Busco máximos
- 2- linealizo
- 3- Ajuste **lineal** por cuadrados mínimos ponderados

Vimos que en general

$$F_{max}(t) = F_A e^{-\gamma t} + F_0$$

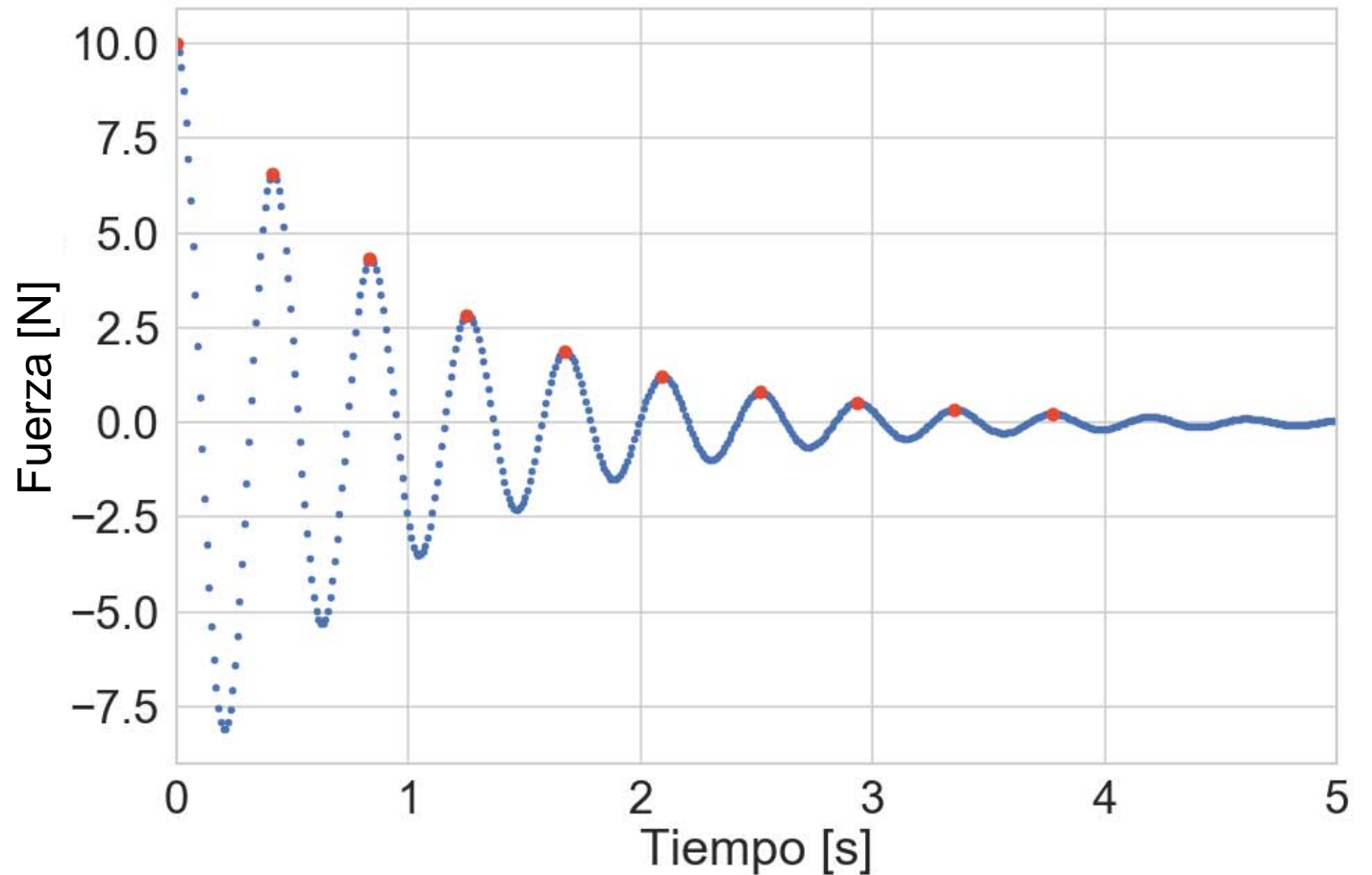


¿Cómo hago la linealización?

$$F(t) = F_A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$



Amplitud del movimiento



## ¿Cómo hago la linealización?

Importante → linealización ≠ regresión lineal

$$F_{max}(t) = F_A e^{-\gamma t} + F_0$$

(podemos aplicar logaritmo natural)

$$F_{max}(t) - F_0 = F_A e^{-\gamma t}$$

$$\ln(F_{max}(t) - F_0) = \ln(F_A e^{-\gamma t})$$

$$\ln(F_{max}(t) - F_0) = \ln(F_A) + \ln(e^{-\gamma t})$$

$$\ln(F_{max}(t) - F_0) = \ln(F_A) - \gamma t$$

Expresado de esta manera

**Pendiente** → relacionado con  $\gamma$

**Ordenada al origen** → asociado con  $\ln(F_A)$

Es de la forma

$$y = m x + B$$

Si graficamos →

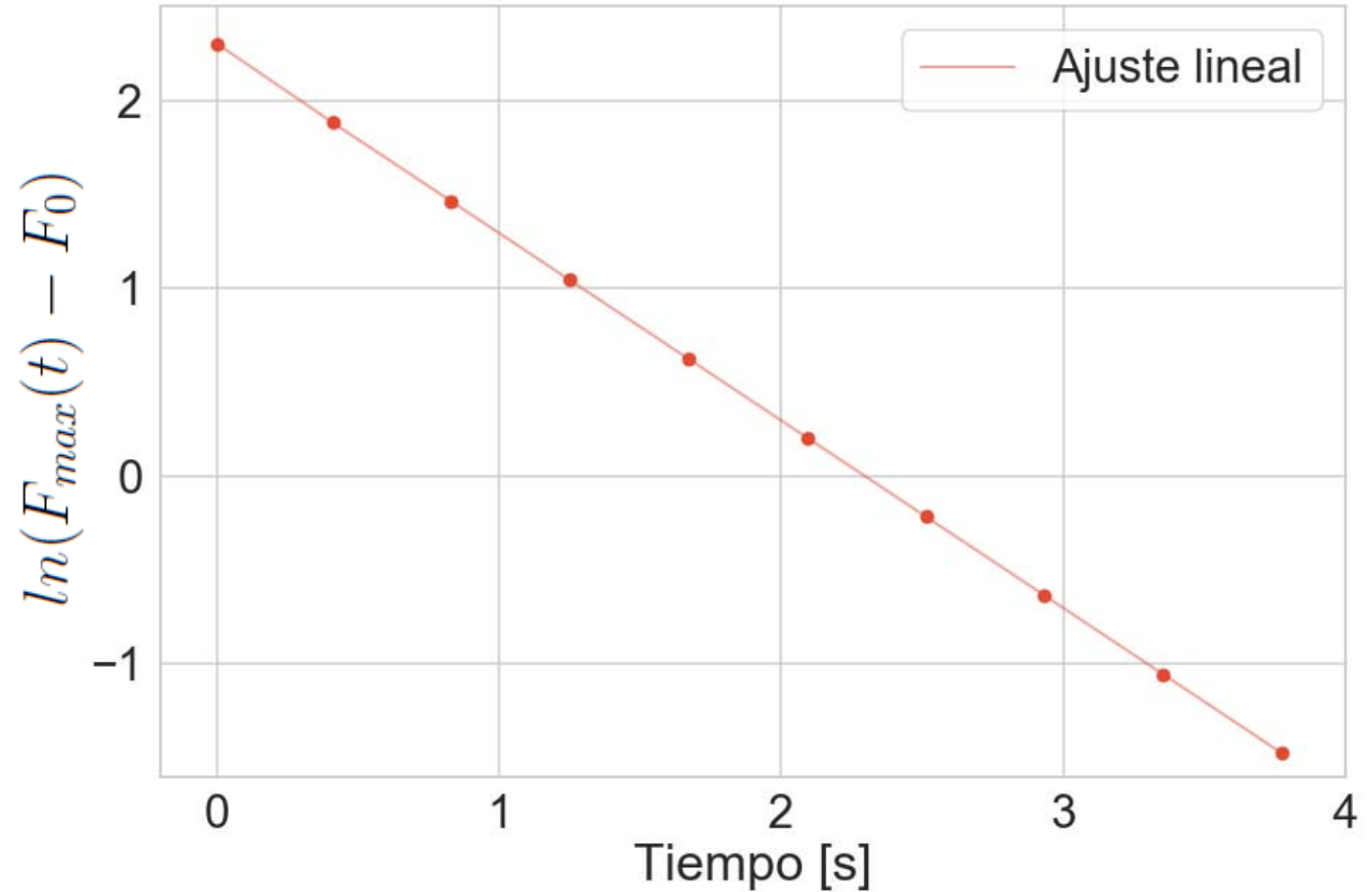
### Relación linealizada



$$\ln(F_{max}(t) - F_0) = \ln(F_A) - \gamma t$$



Puedo hacer un **ajuste lineal** por cuadrados mínimos para determinar los valores de la pendiente y la ordenada al origen de la recta que mejor describe los datos experimentales.



**Observación** → comparar los errores relativos de las magnitudes medidas para decidir la variable que va en el eje  $x$ . Aplicar  $\ln$  representa un cambio de escala en el gráfico.



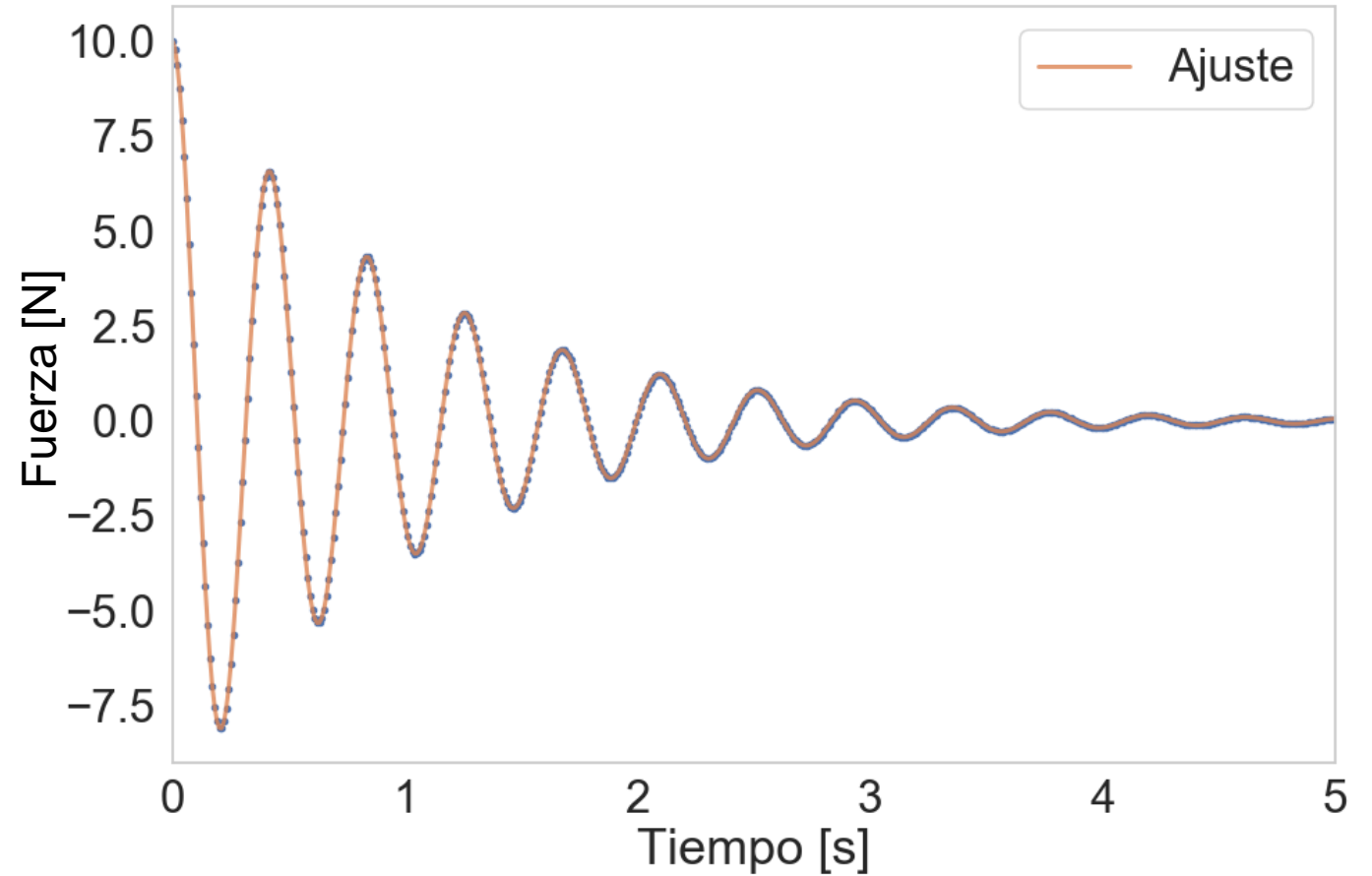
## Método 4 →

¿Cómo encuentro el valor  $\gamma$ ?



Ajuste **no lineal**

$$F(t) = F_A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$



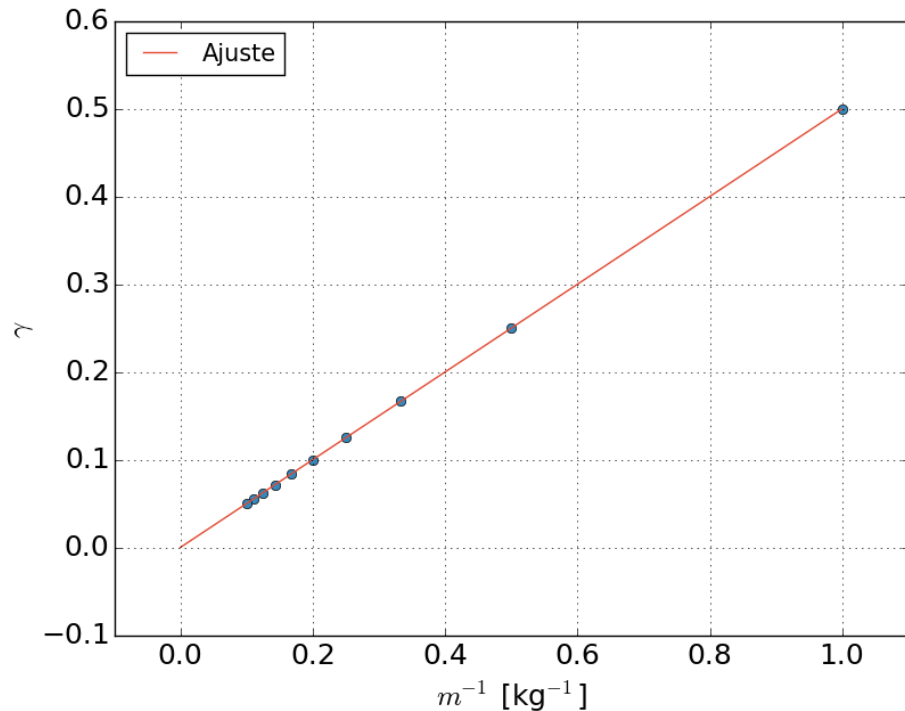
Ajuste por la función completa → necesito estimar previamente los valores de los parámetros.

Ver tutoriales en [Material Adicional](#)

## Otros análisis → Midiendo Fuerza vs. Tiempo para distintas masas

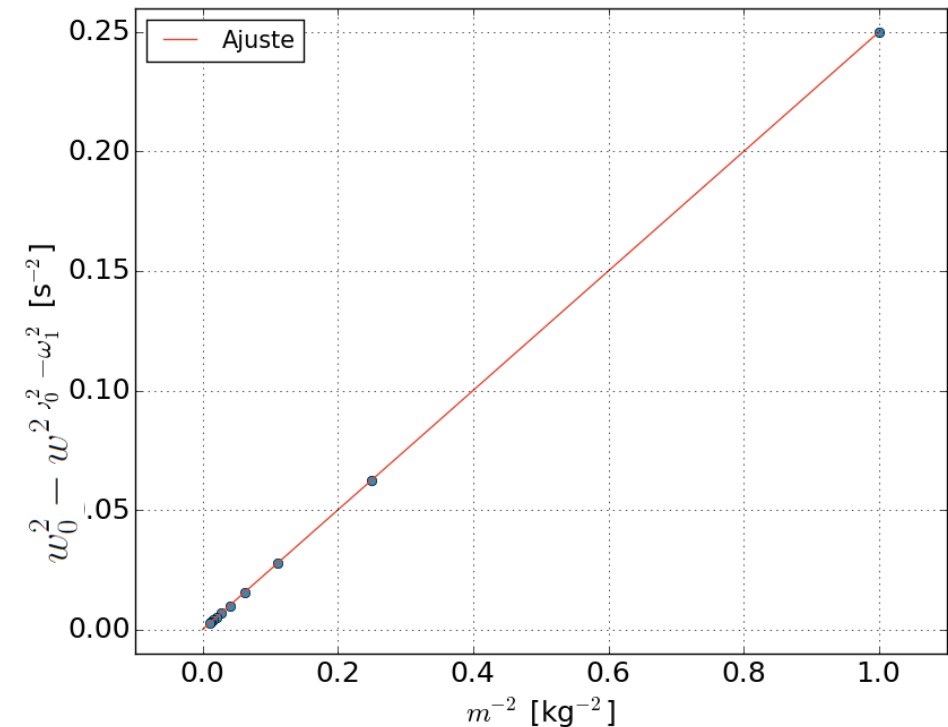
Encontrar  $\gamma$  para distintas masas y obtener el coeficiente  $b$  con algún método de análisis.

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$



Evaluar si se puede determinar el coeficiente  $b$  con esta propuesta

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^2 - \omega^2$$



La diferencia entre  $\omega_0$  y  $\omega$  es muy chica y puede ser difícil de medir.

# Resumen del análisis

- Queremos obtener el valor de  $\gamma$ :
- **Método 1: a partir de la medición del período de la oscilación** → La diferencia entre  $\omega$  y  $\omega_0$  puede que no sea significativa. Evaluar si se llega a un resultado confiable del valor de  $\gamma$ .
- **Método 2: a partir de un ajuste no lineal de los máximos de la oscilación**
- **Método 3: a partir de un ajuste lineal de los máximos de la oscilación** (previa linealización)
- **Método 4: a partir de un ajuste no lineal usando todos los datos** → necesito estimar previamente los valores de los parámetros.

# Comentarios finales

- Asignar error al tiempo, a la masa y a la fuerza.
- Comparar los valores de  $\gamma$  obtenidos por distintos métodos. ¿Son indistinguibles? Algún método no es apropiado para hallar  $\gamma$ ?
- ¿Con qué método de análisis se obtiene el resultado más preciso?
- **Importante:**  $\gamma$  tiene unidades! ¿Cuál es?
- **Influencia de la masa del resorte:** El efecto de la masa del resorte  $m_r$  en la frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte, ha sido estudiado por varios autores.

$m_r$  → Masa del resorte

$m_d$  → Masa del dispositivo oscilando dentro del agua

$m_p$  → Masa extra que se puede añadir al sistema

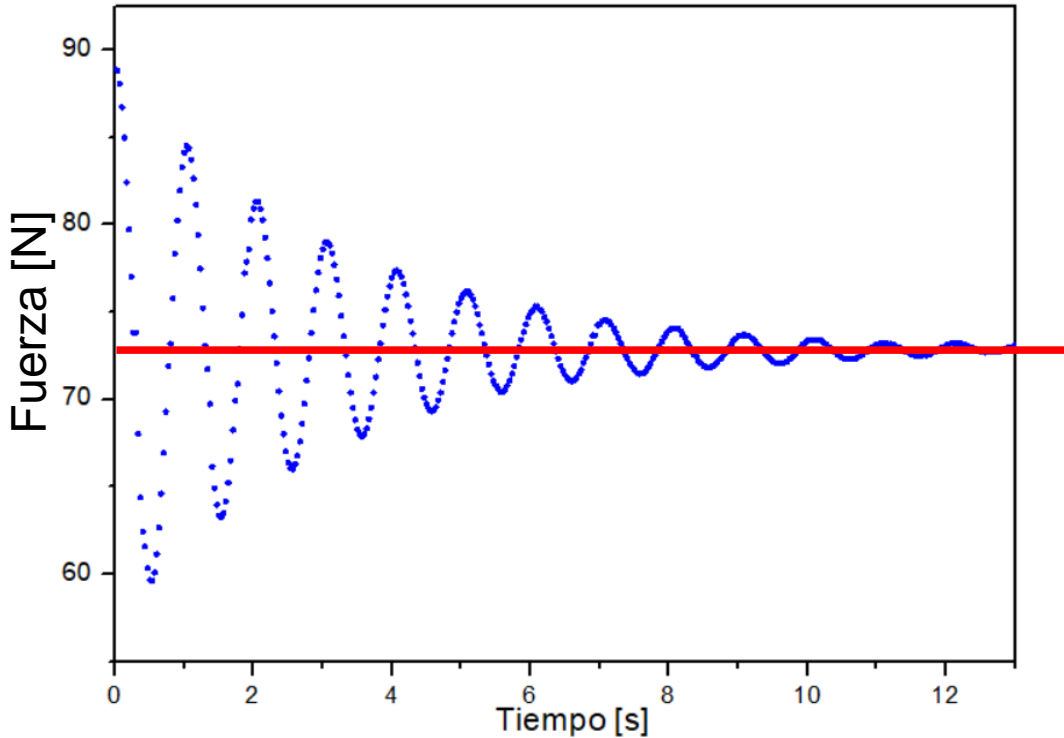
Masa total efectiva del sistema:

$$m = \frac{m_r}{3} + m_d + m_p$$

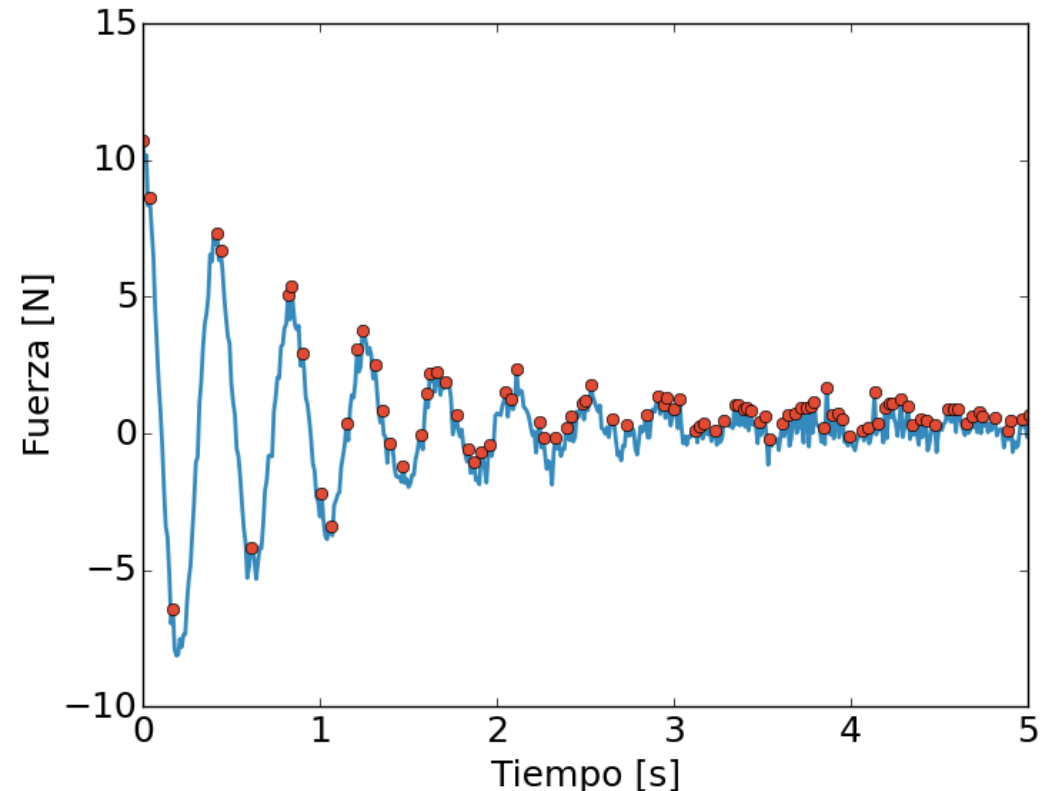
La masa efectiva del sistema con un resorte de longitud  $L$  y constante  $k$  se puede determinar encontrando su energía cinética  $T$ .

# Comentarios finales

- Sugerencia: conviene empezar con  $\rightarrow$
- 1- Hacer estadística sobre los datos de la **fuerza** y calcular la media.
- 2- Restar el valor medio a todos los valores de la posición (usar Set Colum Values del Origin). Así tengo la señal oscilando en torno a 0.
- 3- Ahora sí aplicar los métodos 1, 2, 3 y 4 para obtener  $\gamma$ .



La masa oscila alrededor de la posición de equilibrio. Ese valor lo puedo encontrar a partir de la media de la posición.



Con una señal real, buscar picos puede no ser tan fácil.

## Resumen de actividades (al menos)

- Calibrar el sensor de fuerza
- Determinar la constante elástica del resorte
- Caso amortiguado: Describir el problema para una sola masa. Buscar picos y calcular  $\gamma$  con distintos métodos. ¿Qué otros parámetros se pueden medir?
- Hacer mediciones para distintas masas y relacionarlas . Calcular el coeficiente de viscosidad  $b$  *por distintos caminos*.
- ¿Son consistentes los resultados? ¿Funciona el modelo?