



universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física
Juan José Giambiagi

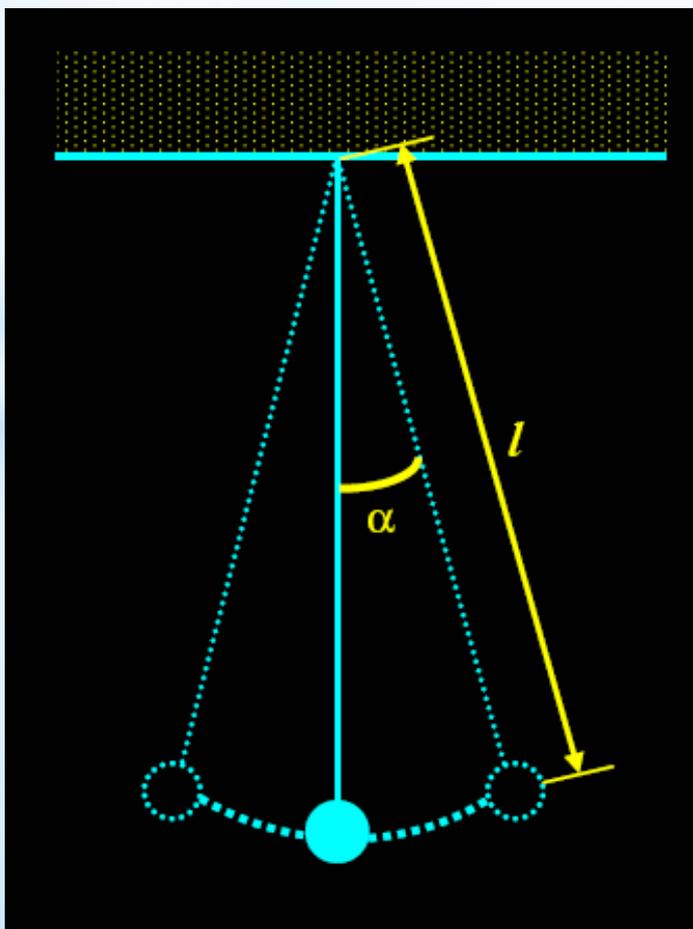
Péndulo Simple

Cuadrados Mínimos

Laboratorio 1

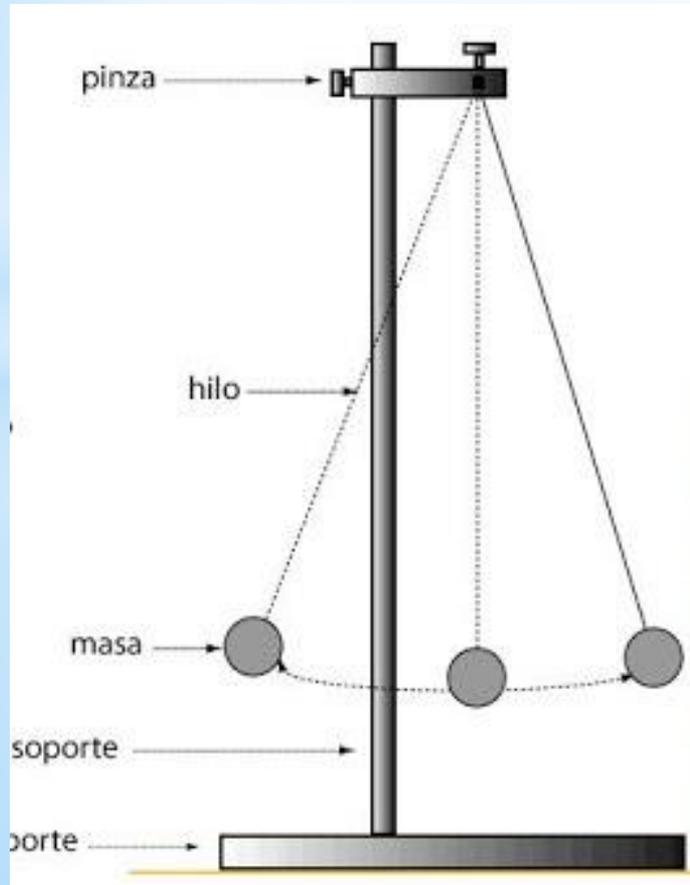
Departamento de Física -FCEyN - UBA

PÉNDULO

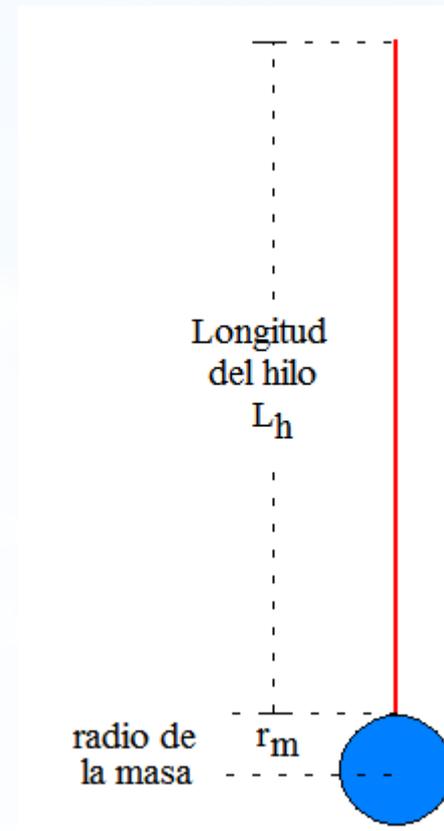


El péndulo simple (también llamado péndulo ideal) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa m que está suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

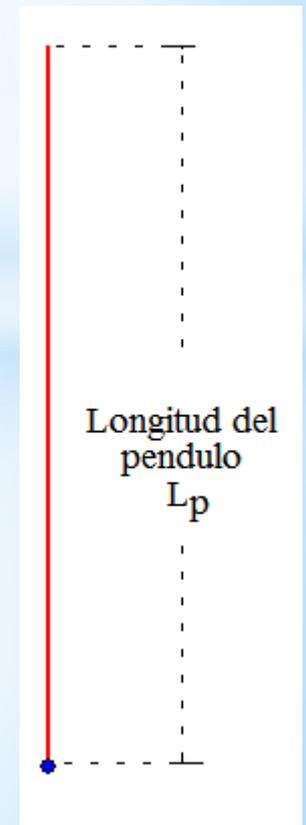
PÉNDULO



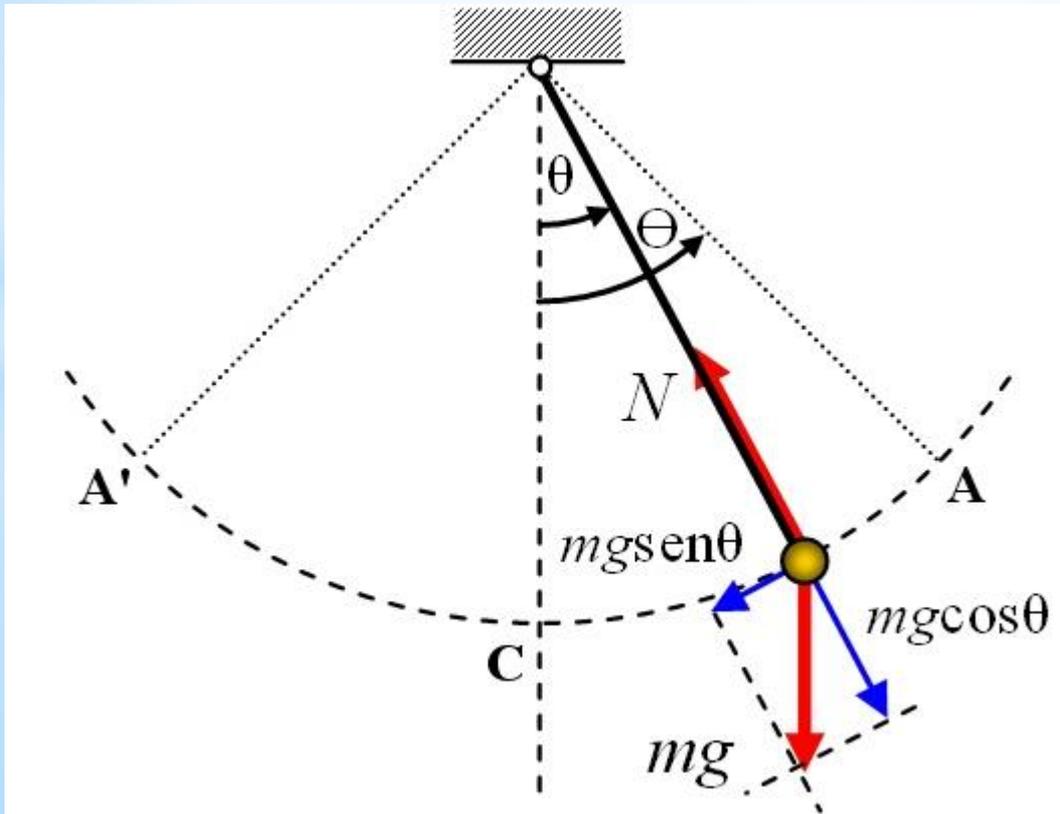
Caso real



Caso ideal



PÉNDULO



Ecuación de Movimiento:

$$F_t = -mg \sin \theta = ma_t$$

Relación entre aceleración tangencial y angular:

$$a_t = l\ddot{\theta}$$

Ecuación diferencial del movimiento plano del péndulo simple:

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

PÉNDULO: aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación de Movimiento:

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

$\Theta(^{\circ})$	$\Theta(\text{rad})$	$\text{sen}\Theta$	dif. %	$\Theta(^{\circ})$	$\Theta(\text{rad})$	$\text{sen}\Theta$	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

Ecuación de movimiento armónico simple: $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$

Solución: $\theta = \Theta \sin(\omega t + \phi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

PÉNDULO: aproximación de pequeñas oscilaciones

Donde **T** es el **Período**:

Tiempo utilizado en realizar una oscilación completa, llegamos a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{ec. 9}$$

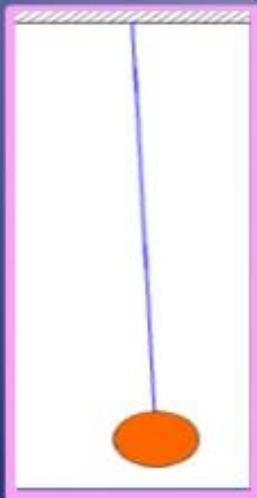
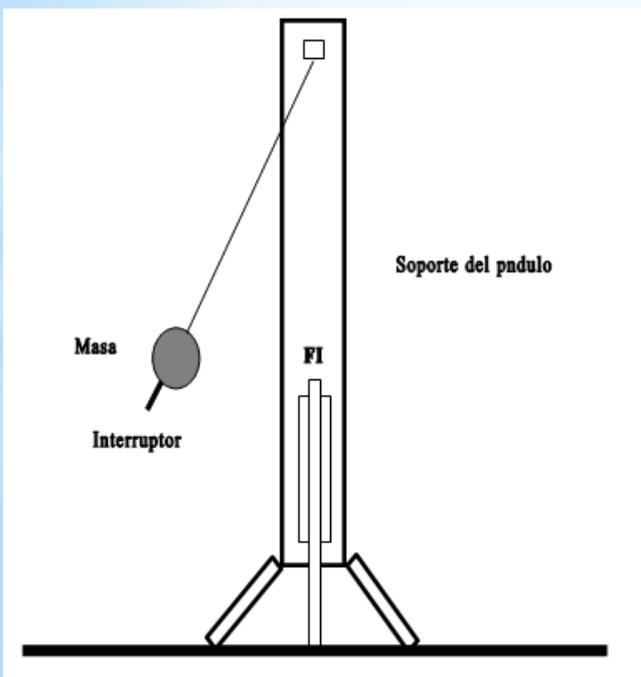


Fig. 2

g es la gravedad cuyo valor es 9.8m/s^2
L es la longitud de la cuerda

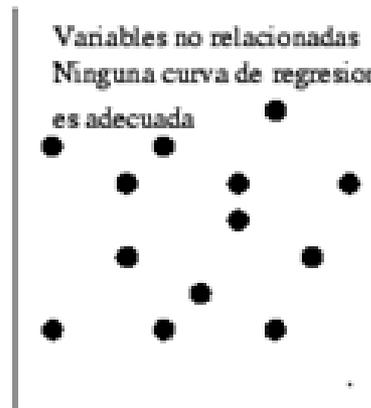
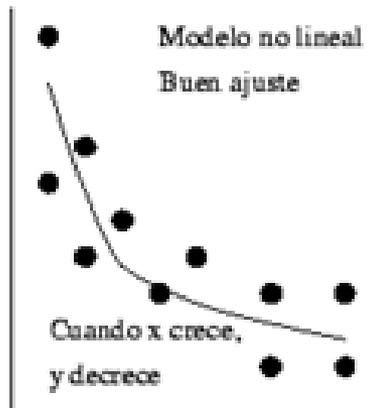
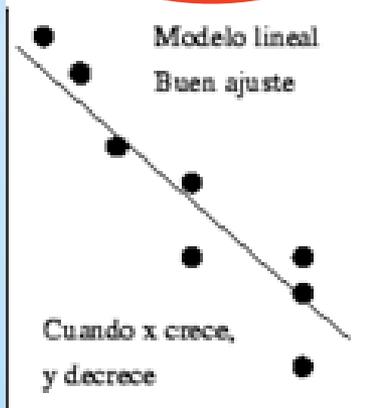
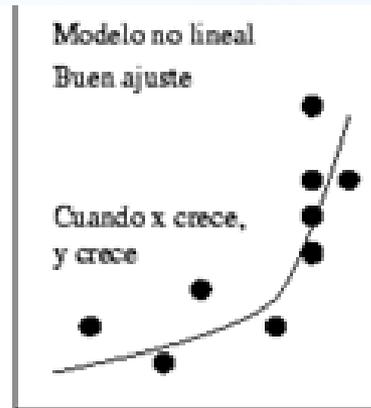
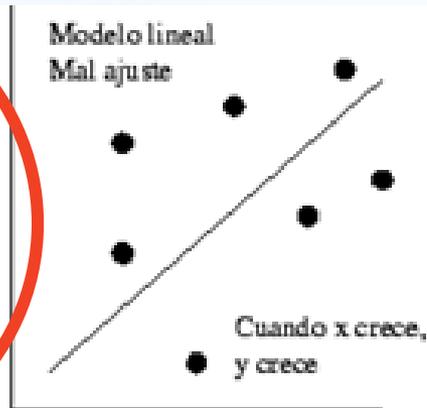
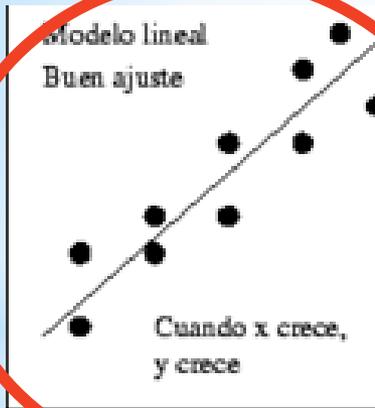
CONCLUSION: ESTA ECUACION SUGIERE QUE ESTAS MAGNITUDES DEPENDEN SÓLO DE LA LONGITUD DEL HILO Y DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

PÉNDULO: experimento



- Preparar el experimento según el esquema.
- Rango de variación de la longitud del péndulo
Longitud mínima: masa puntual.
Longitud máxima: condiciones del equipamiento.
- Amplitud inicial del péndulo (el modelo considera ángulos pequeños). Determinar en forma aproximada el ángulo máximo admisible para que el período sea aproximadamente constante.
- Paso de variación en la longitud del péndulo.
- Realizar el experimento para al menos 10 diferentes longitudes del péndulo.

PÉNDULO: ¿Cómo depende el período con la longitud?

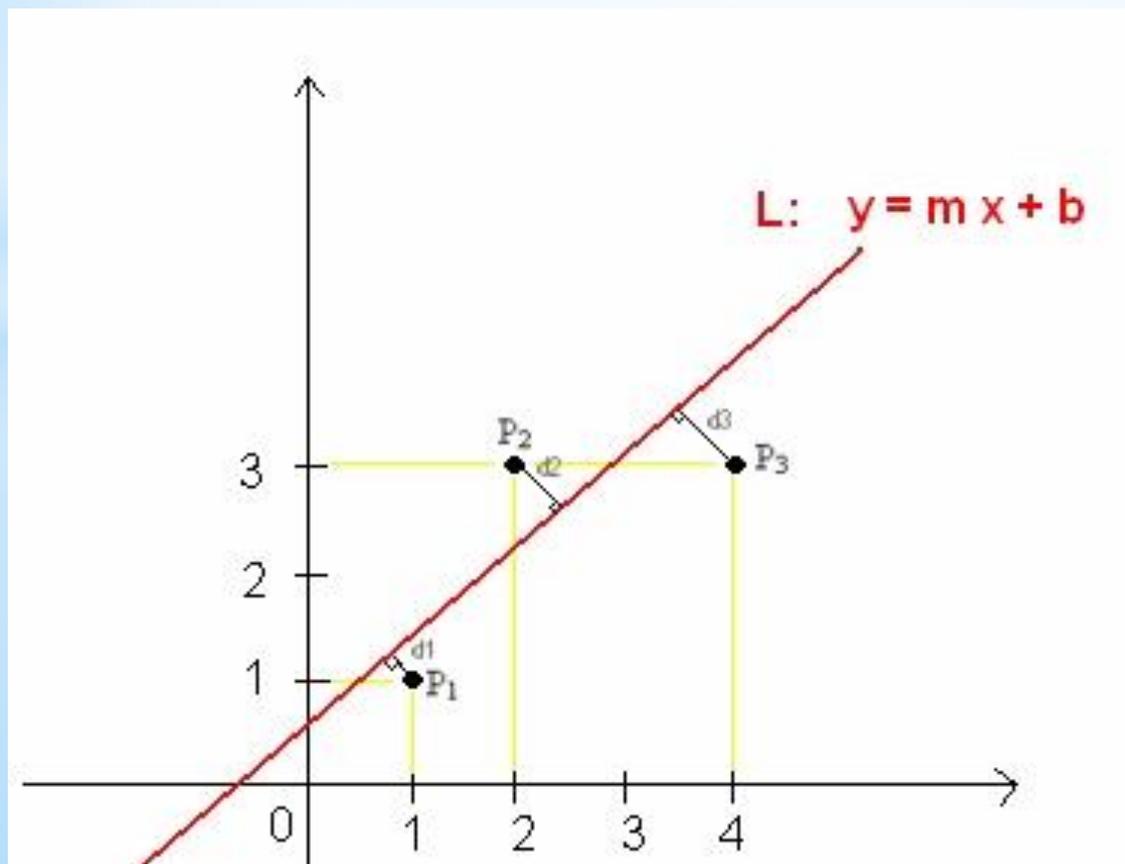


$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\ell}$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?



$$y = mx + b$$

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b)$$

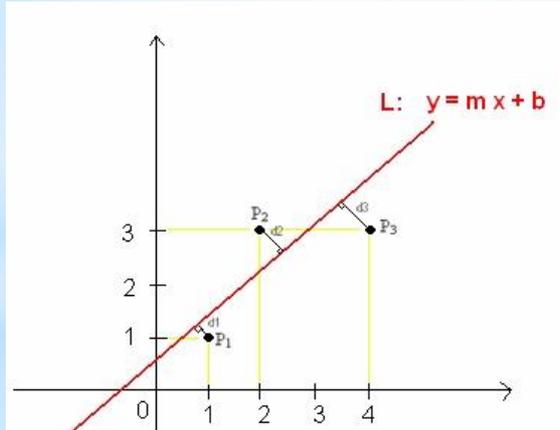
$$(\delta y_i)^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\begin{aligned} M &= \sum (\delta y_i)^2 \\ &= \sum y_i^2 + m^2 \sum x_i^2 + nb^2 \\ &\quad + 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i \\ &\quad - 2b \sum y_i \end{aligned}$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

Mejor recta: la que minimice M

$$y = mx + b$$



$$M = \sum(\delta y_i)^2$$

$$= \sum y_i^2 + m^2 \sum x_i^2 + nb^2 + 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i - 2b \sum y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0$$

$$2m \sum x_i^2 + 2b \sum x_i - 2 \sum (x_i y_i) = 0$$

$$2nb + 2m \sum x_i - 2 \sum y_i = 0$$

$$m = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

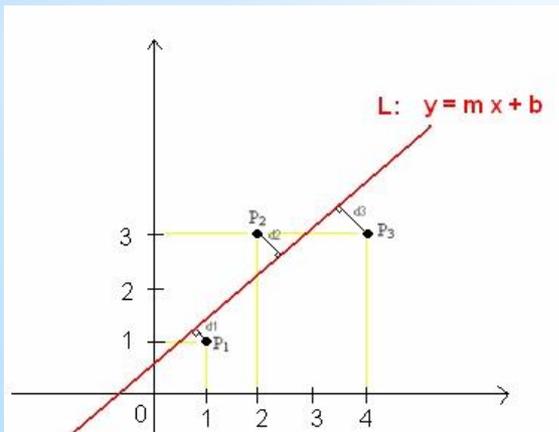
¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

m y b son funciones de y_i

$$m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

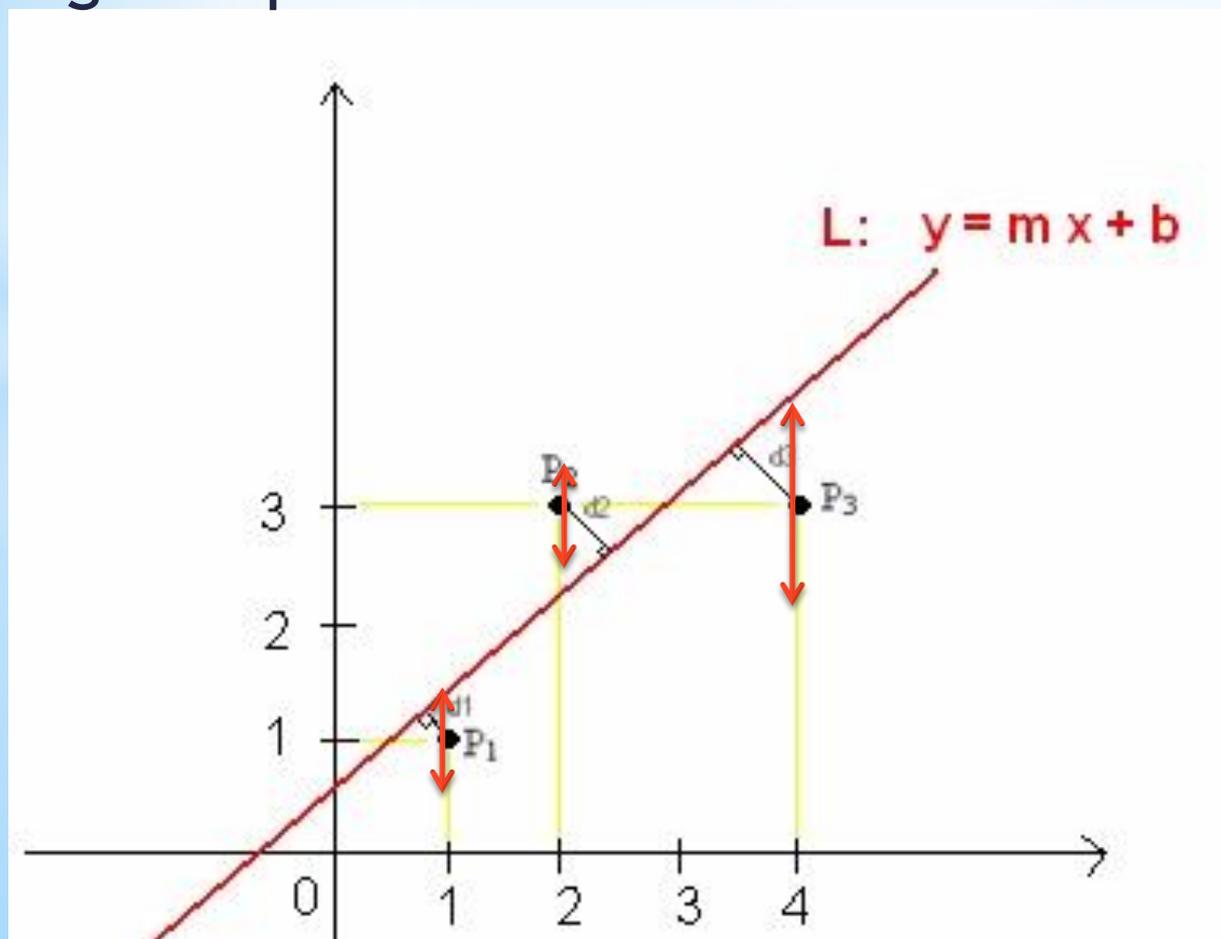
$$S^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 s_{y_i}^2$$



$$\delta y_i = y_i - (m x_i + b)$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{N - 2}}$$

¿Todos los puntos son equivalentes? ¿Confiamos mas en alguno que en otro?



Media ponderada

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{S_i^2}}{\sum \frac{1}{S_i^2}}$$

Desviación standard de la media ponderada

$$S^2 = \frac{\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_i^2}}{(N - 1) \sum \frac{1}{S_i^2}}$$



¿Todos los puntos son equivalentes? ¿Confiamos mas en alguno que en otro?

Cuadrados mínimos ponderados

$$b = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \right)^2}$$

$$m = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} (x_i y_i) - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \right)^2}$$



¿Todos los puntos son equivalentes? ¿Confiamos mas en alguno que en otro?

Cuadrados mínimos ponderados:
incertezas

$$S_m^2 = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2} \right)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{\sum \frac{x_i y_i}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2} \right)^2}$$