C5

Laboratorio 1

Universidad de Buenos Aires – Exactas
departamento de física

Octubre 2020

Ajuste por Mínimos cuadrados

Recta

Búsqueda del mejor ajuste de una colección de **N pares de datos (x_i, y_i)** por una **recta y= a + b.x**

$$\boxed{D = 1/\sigma_y^2 \, \Sigma \, (y-y_i)^2 = 1/\sigma_y^2 \, \Sigma \, (a+b.x_i - y_i)^2}$$

Busco parámetros a y b tal que minimicen D

$$\partial D/\partial a=0$$

$$\partial D/\partial b=0$$

Ref. J. Taylor, An introduction to error análisis 1997

$$\partial D/\partial a = 2/\sigma_y^2 \, \Sigma \, (a + b.x_i - y_i) = 0$$

$$\partial D/\partial b = 2/\sigma_y^2 \, \Sigma \, (a + b.x_i - y_i) \, x_i = 0$$

Que puedo re escribir como

$$a \, N \quad + b \, \Sigma \, x_i = \Sigma \, y_i$$

$$a \, \Sigma \, x_i + b \, \Sigma \, x_i \, .x_i = \Sigma \, y_i \, .x_i$$

2 ecuaciones con dos incógnitas: a y b !

La solución de las ecuaciones da como resultado,

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$b = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta},$$

Con Δ el determinante:

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2.$$

Como podría determinarse el error en ***y***?

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(y_i - A - Bx_i)^2}.$$

$$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - A - Bx_i)^2},}$$

El error en los parámetros se deduce por propagación de errores, suponiendo el error en ***y*** es constante e igual a $\boldsymbol{\sigma_y}$
y el error en *x* despreciable:

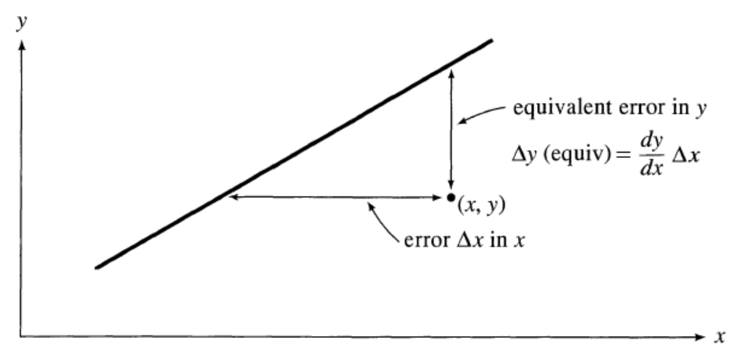
$$\boxed{\sigma_A = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}}$$

$$\boxed{\sigma_B = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}}}$$

Hemos supuesto únicamente un error significativo en la medida de ***y*** y no en la de ***x.*** Si en cambio el error en ***x*** fuera mas importante que el de ***y*** e igual para todas las mediciones en ***x*** el problema es totalmente equivalente a lo descripto

Si ambos parámetros tienen errores comparables

$$\sigma_y(\text{equiv}) = \sqrt{\sigma_y{}^2 + (B\sigma_x)^2}.$$



Hemos considerado en los ejemplos anteriores que el error en ***y*** es constante

$\boldsymbol{\sigma_{yi}}$ podría ser diferente para cada medida de y_i entonces las distintas medidas tendrían distinto peso, definido como $\boldsymbol{\omega_i = 1/\sigma_{yi}^2}$

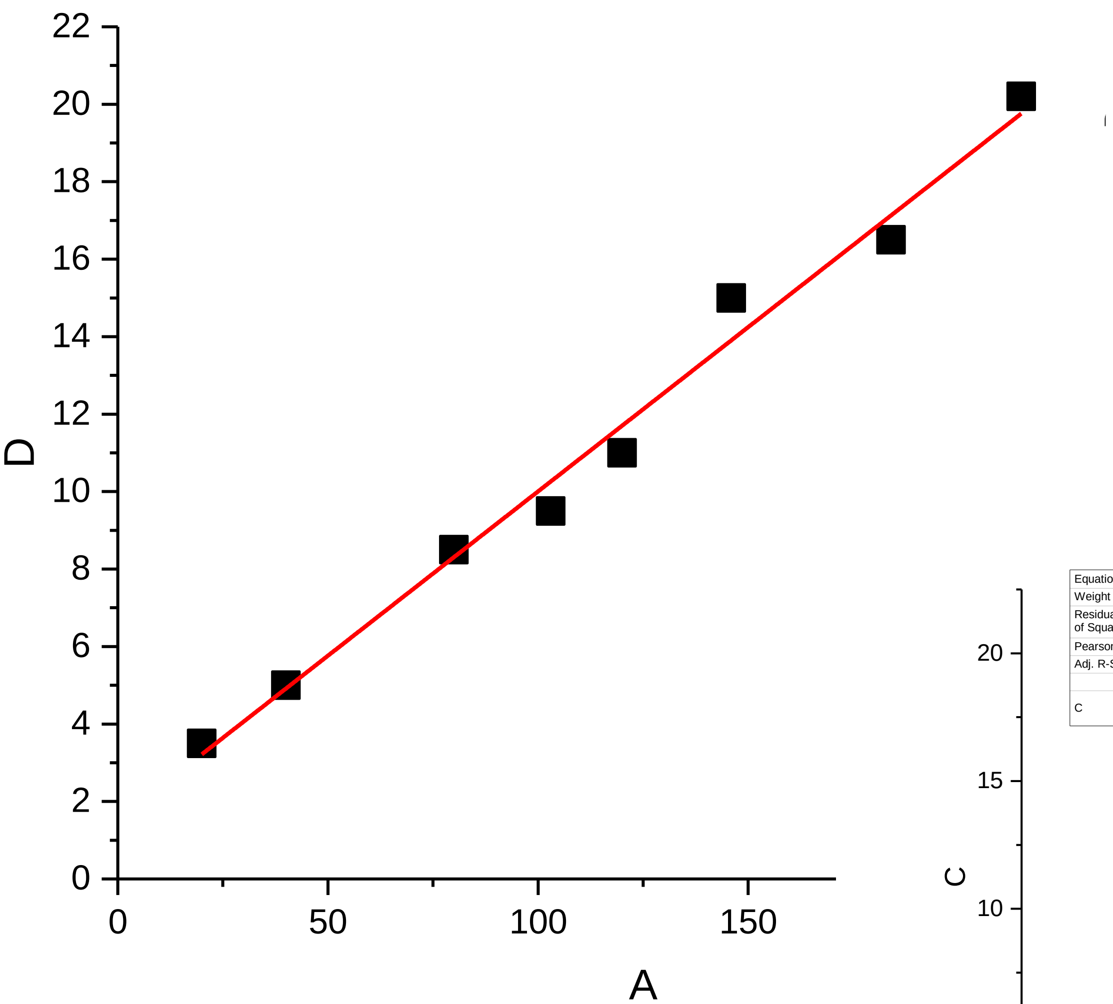
OJO Recordar que antes lo habíamos puesto constante!!

Ahora los parámetros **a** y **b** quedarían:

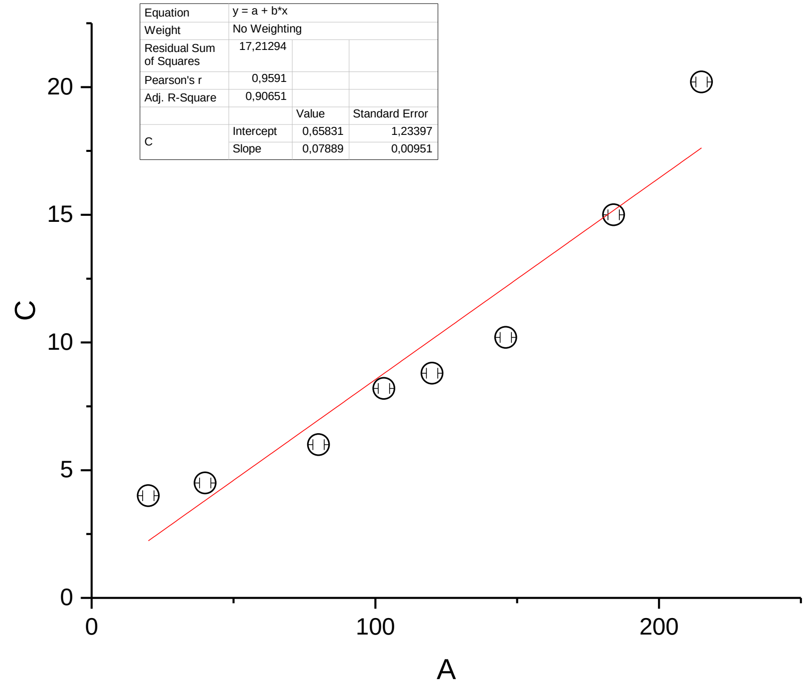
$$a = \frac{\Sigma wx^2 \, \Sigma wy - \Sigma wx \, \Sigma wxy}{\Delta}$$

$$b = \frac{\Sigma w \Sigma wxy - \Sigma wx \, \Sigma wy}{\Delta}$$

$$\Delta = \Sigma w \, \Sigma wx^2 - (\Sigma wx)^2.$$



Equation	y = a + b*x		
Weight	No Weighting		
Residual Sum of Squares	2,97742		
Pearson's r	0,99355		
Adj. R-Square	0,98499		
		Value	Standard Erro
D	Intercept	1,52138	0,51321
	Slope	0,08483	0,00395



Equation	y = a + b*x		
Weight	No Weighting		
Residual Sum of Squares	17,21294		
Pearson's r	0,9591		
Adj. R-Square	0,90651		
		Value	Standard Error
C	Intercept	0,65831	1,23397
	Slope	0,07889	0,00951

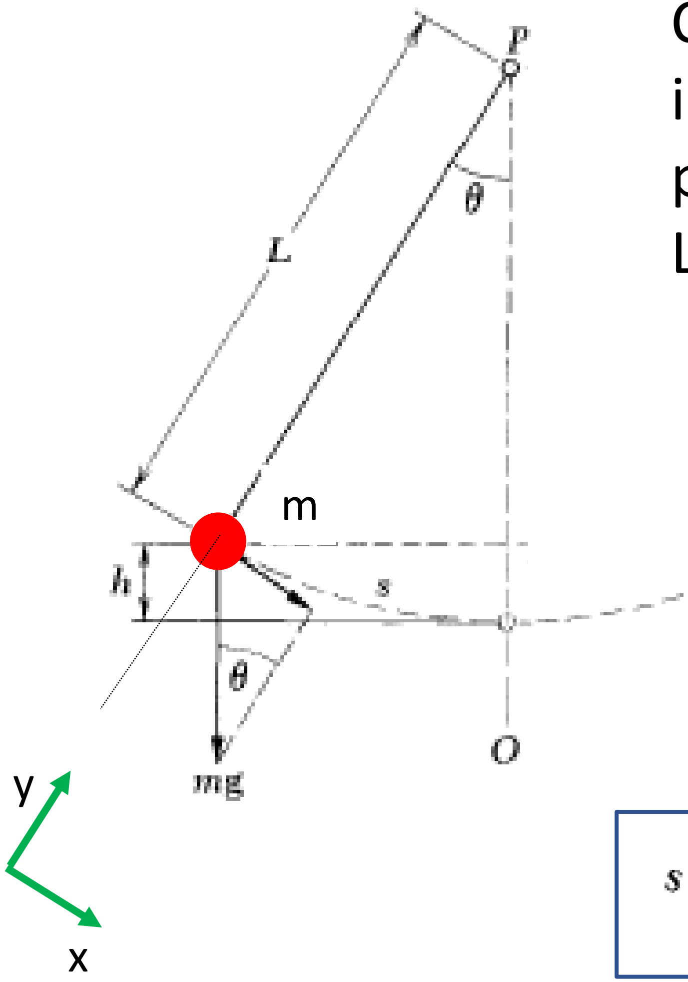
Practica 3 PENDULO SIMPLE

Una medida indirecta de la aceleración de la gravedad **g**

Péndulo simple

Consiste en una masa **m** suspendida de un hilo inextensible, sin masa de longitud **L** fijo en un punto **P**

La masa se mueve sobre un arco de curva *s*



$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}$$

Fuerzas presentes ➡ T, P

Angular P. sen θ = *m*. a$_\theta$

(recordar L constante!)

$$s = L\theta \qquad v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta} \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$mg \sin\theta = -mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

C. Kittel, W. Knight, M. Ruderman, Mechanics, Berkeley Physics Course, Volume 1. Second Edition, 1973

$$\boxed{mg\sin\theta = -mL\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

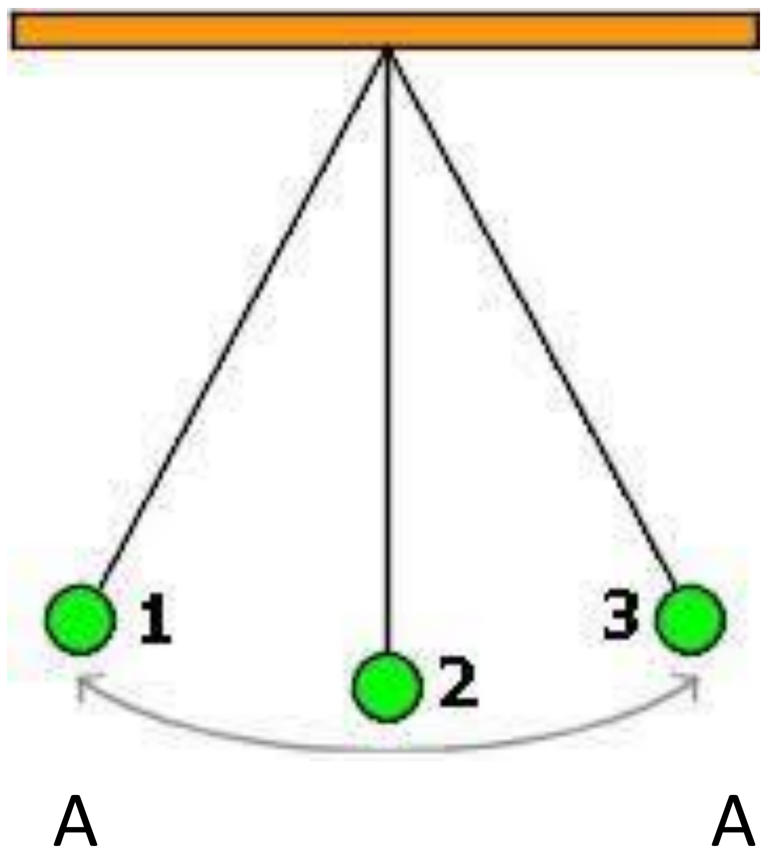
Para el caso de oscilaciones pequeñas: $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\cdots$

Ecuación de movimiento $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$

Cuya solución es $\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

Donde w_0 es la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$

Y sabiendo que T= 2π /w entonces $\boxed{T_0 = 2\pi\,(L/g)^{1/2}}$



El **periodo** T es el tiempo transcurrido entre dos pasos de la masa por un mismo lugar y en el mismo sentido!!

Tomar 6 pares de medidas (L_i, T_i) y analizar

(a) Calculando g por cada par de datos o bien (Fig. 1)
(b) Grafico T2 vs. L y realizo una regresión lineal. (Fig. 2)

Analizar incerteza para cada caso

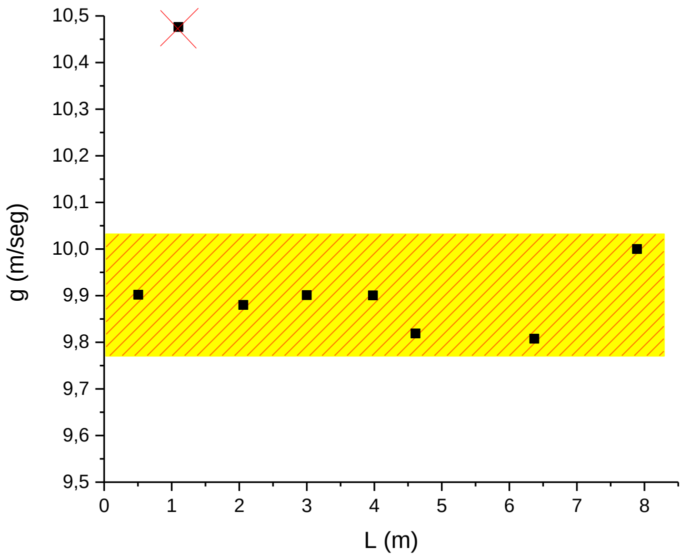


Fig. 1: g vs L

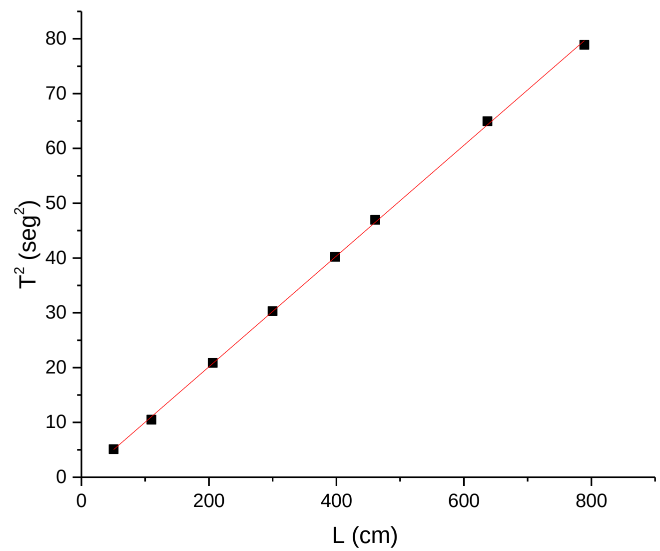


Fig. 2: T^2 vs L