Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2021

Introducción a la Física Experimental

Mediciones directas II

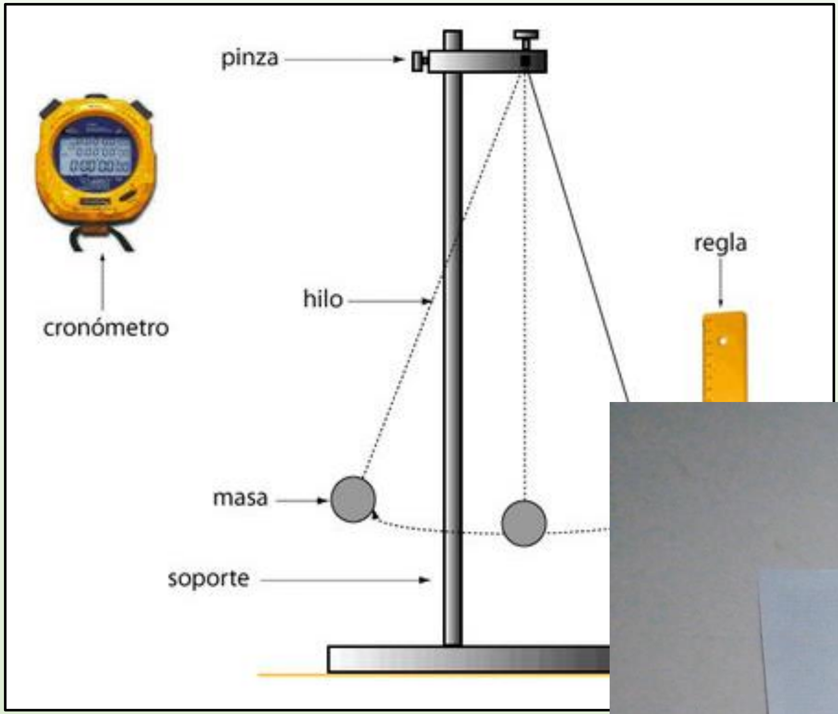
Lucía Famá - Mauro Silberberg

Valeria Pais, Ayelén Santos

Universidad de Buenos Aires - Exactas

departamento de física

DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Repaso: Resultado y una MF y forma de expresarlo

Si mido dentro del error instrumental $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\sigma_{ap}}$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_{ap} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{ap}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Expresión

$$x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right) Ud.$$

Si mido fuera del error instrumental $\rightarrow$ Error estadístico

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S)\ Ud.$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

¿Cómo dependen los parámetros estadísticos y la distribución de los datos si modifico N?

¿Cuál es la probabilidad que una nueva medición se encuentre en el intervalo de confianza $\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$?

¿Cuándo aparece σ_e y cómo lo obtengo?

Si mido fuera del error instrumental → Error estadístico

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S)\ Ud.$$

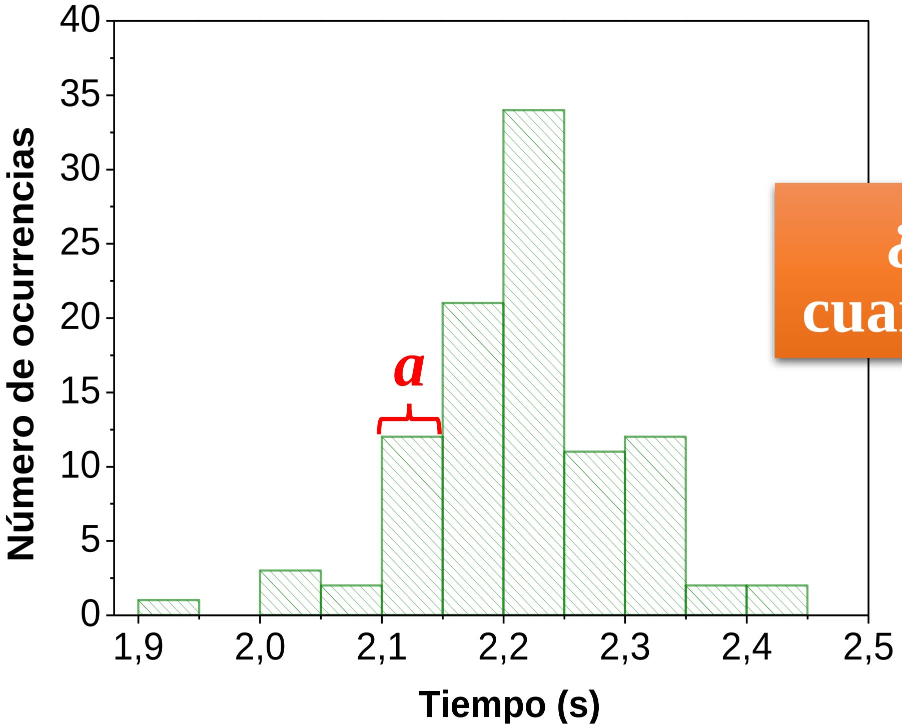
$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

Distribución de datos

Supongamos que tomamos *N* mediciones de MF → Tenemos $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$

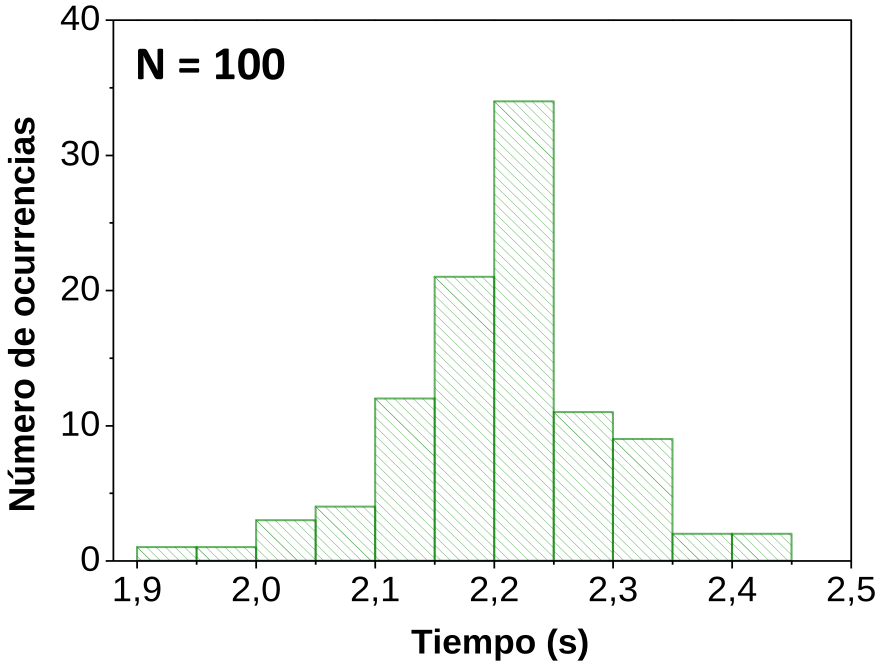
Histograma

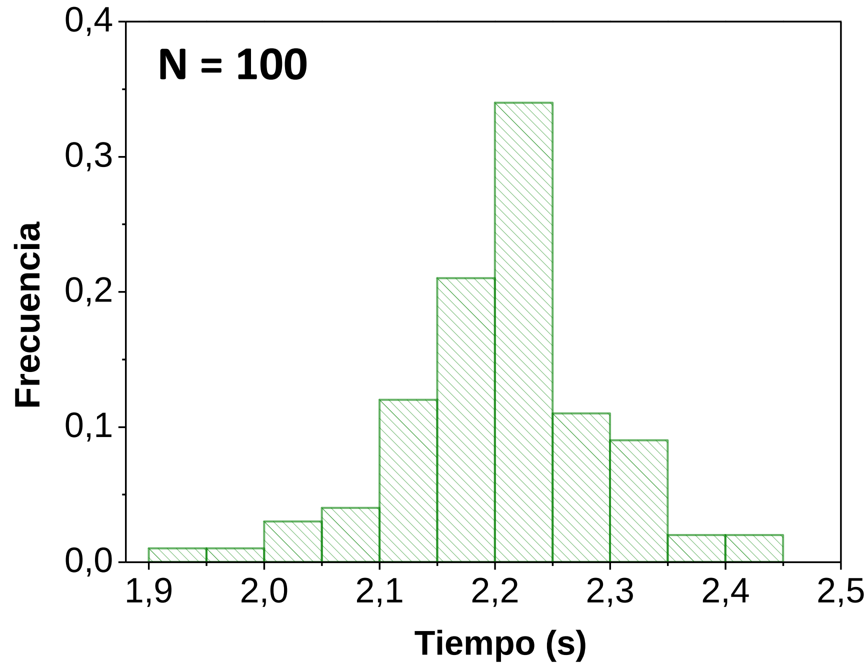
Representación gráfica en coordenadas cartesianas de la distribución de datos



¿Qué pasa cuando varío N?

Para comparar histogramas



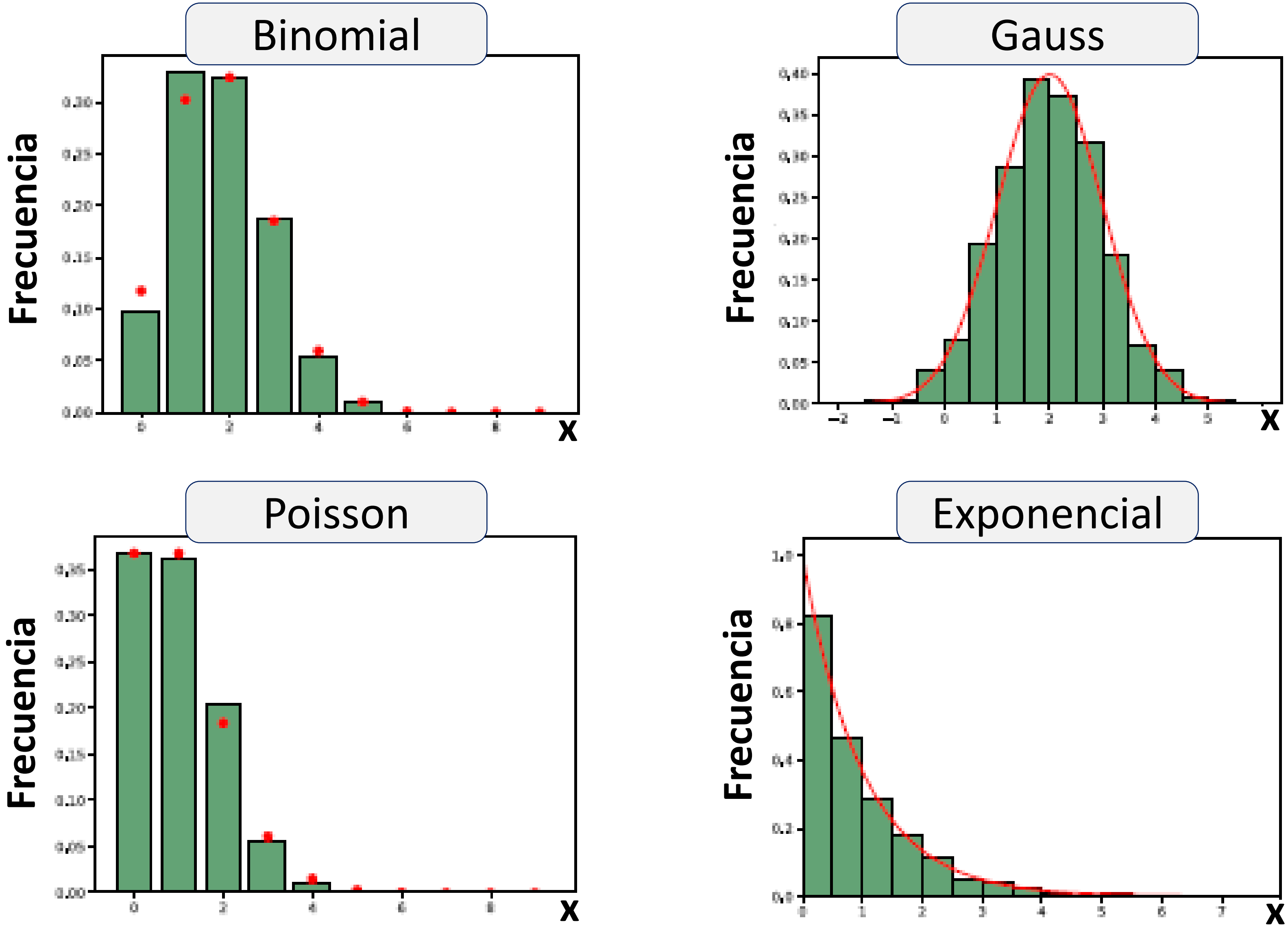


$$\frac{Número\ de\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$

$$\sum_i NO_i = N \rightarrow \sum_i F_i = 1$$

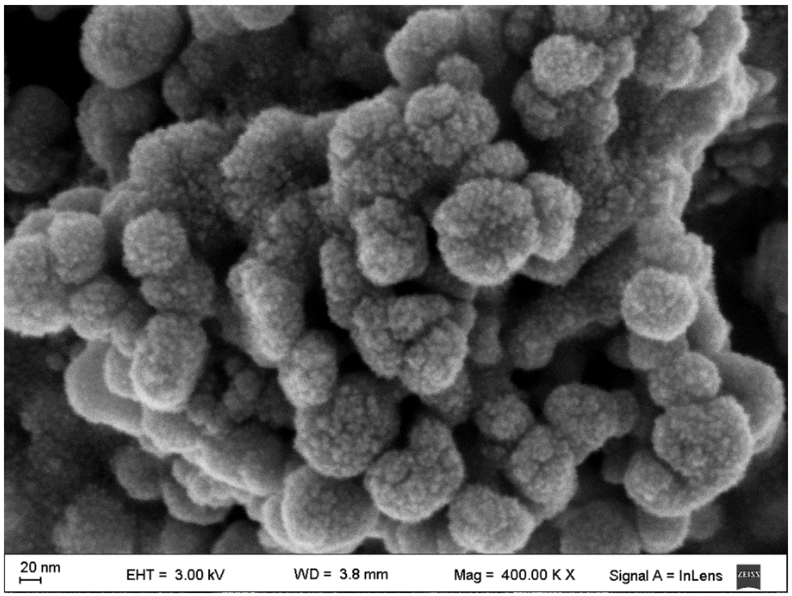
Condición de Normalización

Ejemplos de distribuciones

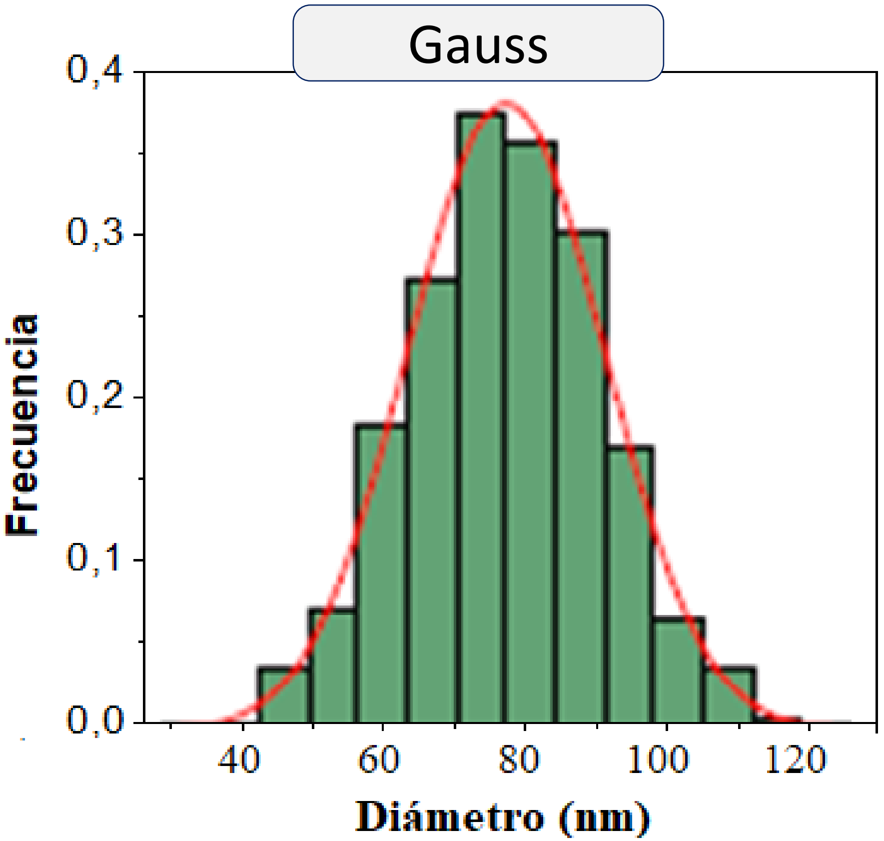


Distribución Gaussiana

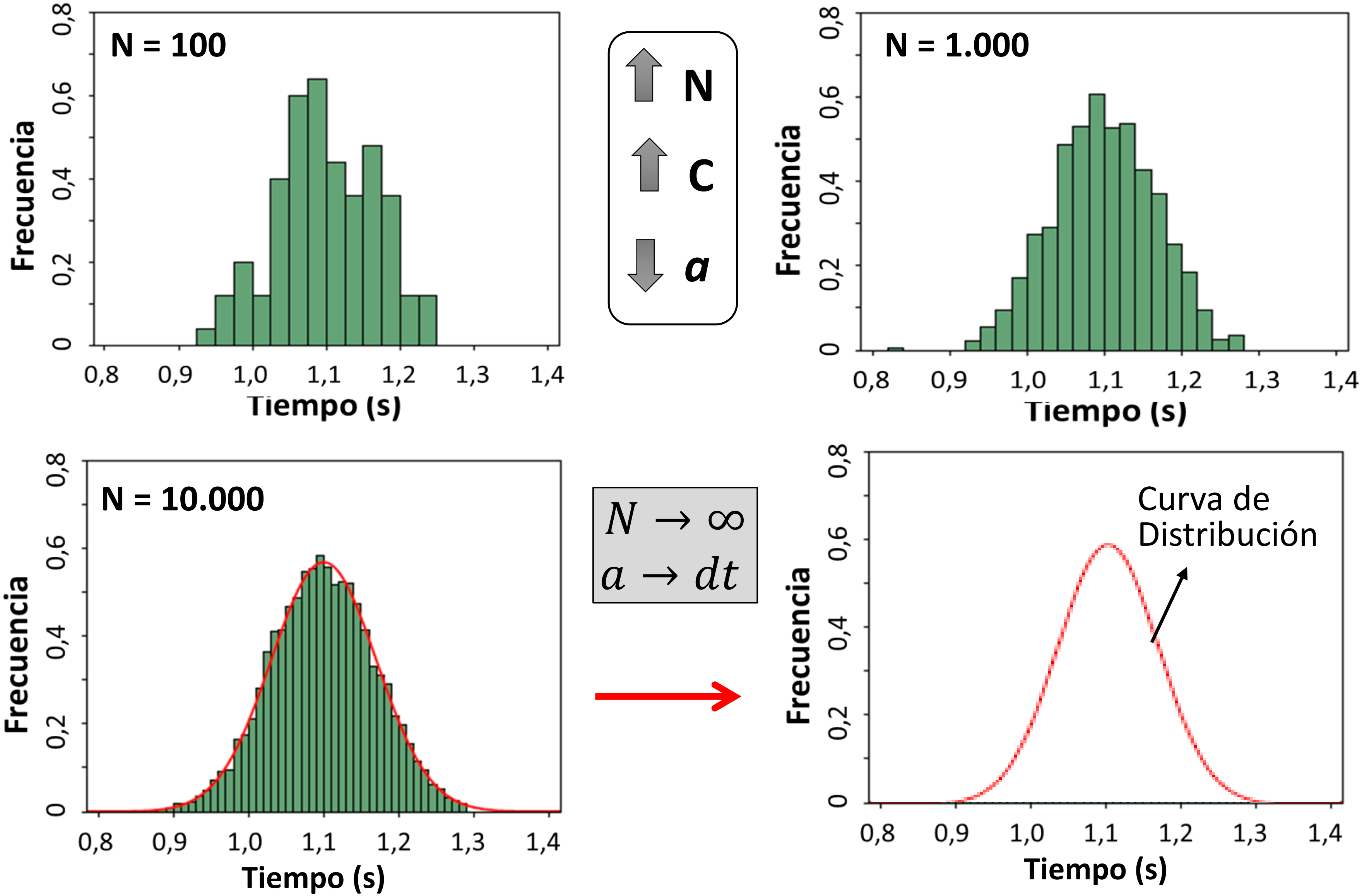
Microscopía electrónica de barrido (SEM)



Nanopartículas de Plata sintetizadas con almidón (AgNP). *Trabajo del LP&MC*

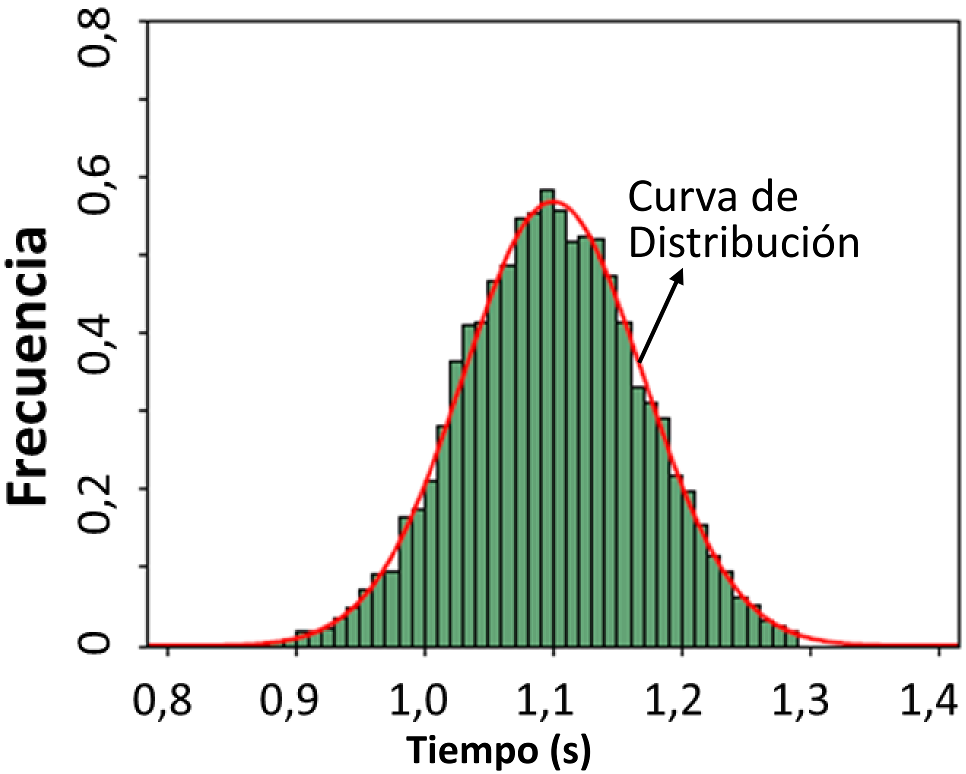


¿Si aumenta N?



N = 100
Frecuencia
Tiempo (s)
N
C
a
N = 1.000
Frecuencia
Tiempo (s)
N = 10.000
Frecuencia
Tiempo (s)
$N \to \infty$
$a \to dt$
Curva de Distribución
Frecuencia
Tiempo (s)

¿Si aumenta N?



$$N \to \infty$$

$$a \to dt$$

$$F_i \to f(t)dt$$

$f(t)$: *Función de distribución de probabilidades*

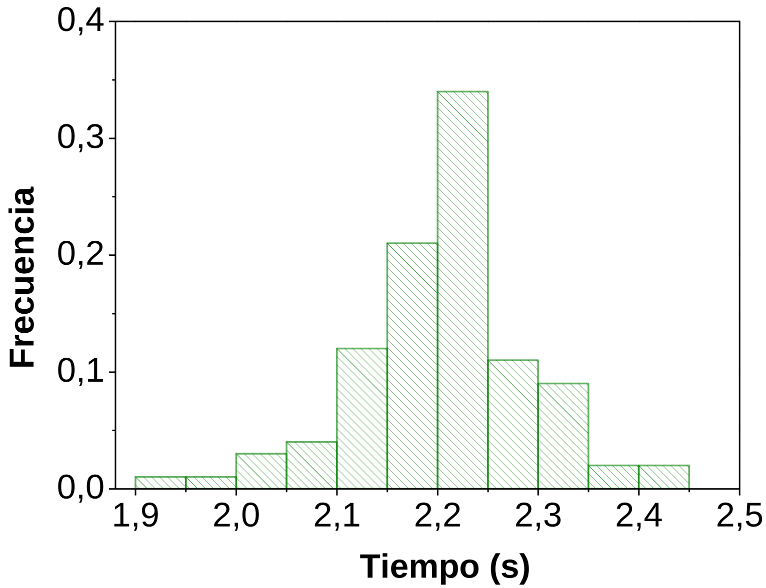
Condición de Normalización

$$\sum_i F_i = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dx = 1$$

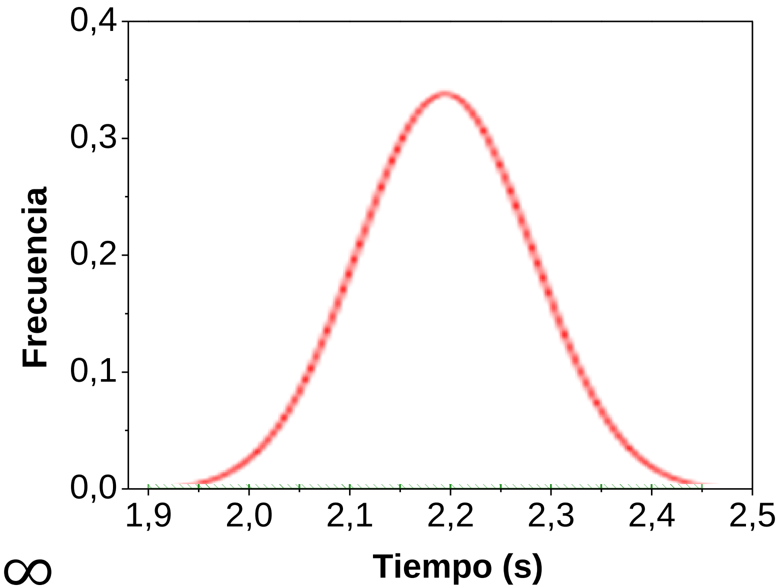
Objetivo

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos estimamos los parámetros de la distribución



$N \to \infty$

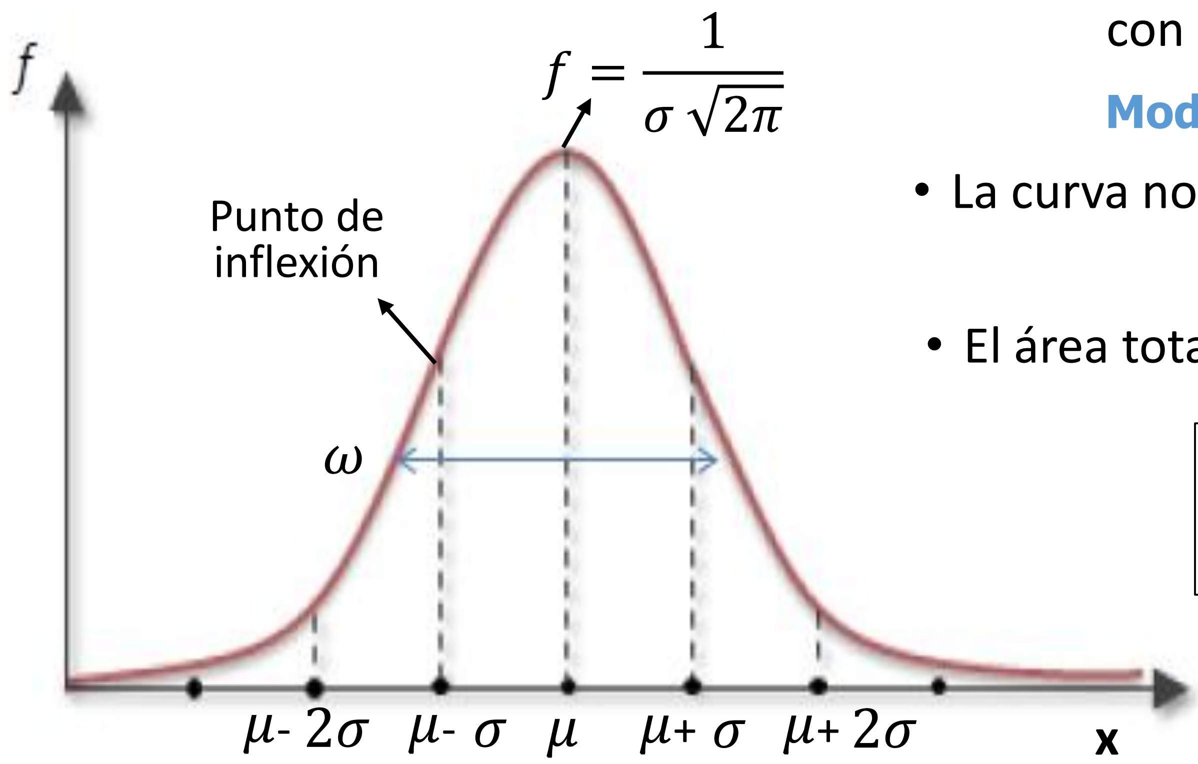


$\bar{x} \longrightarrow ?$

$S \longrightarrow ?$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Algunas propiedades relevantes

- Es simétrica con respecto a su media
- Tiene una única moda, que coincide con la media y mediana

Moda=Mediana=Media

- La curva normal es asintótica al eje de abscisas
- El área total bajo la curva es igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Función de distribución: Gauss

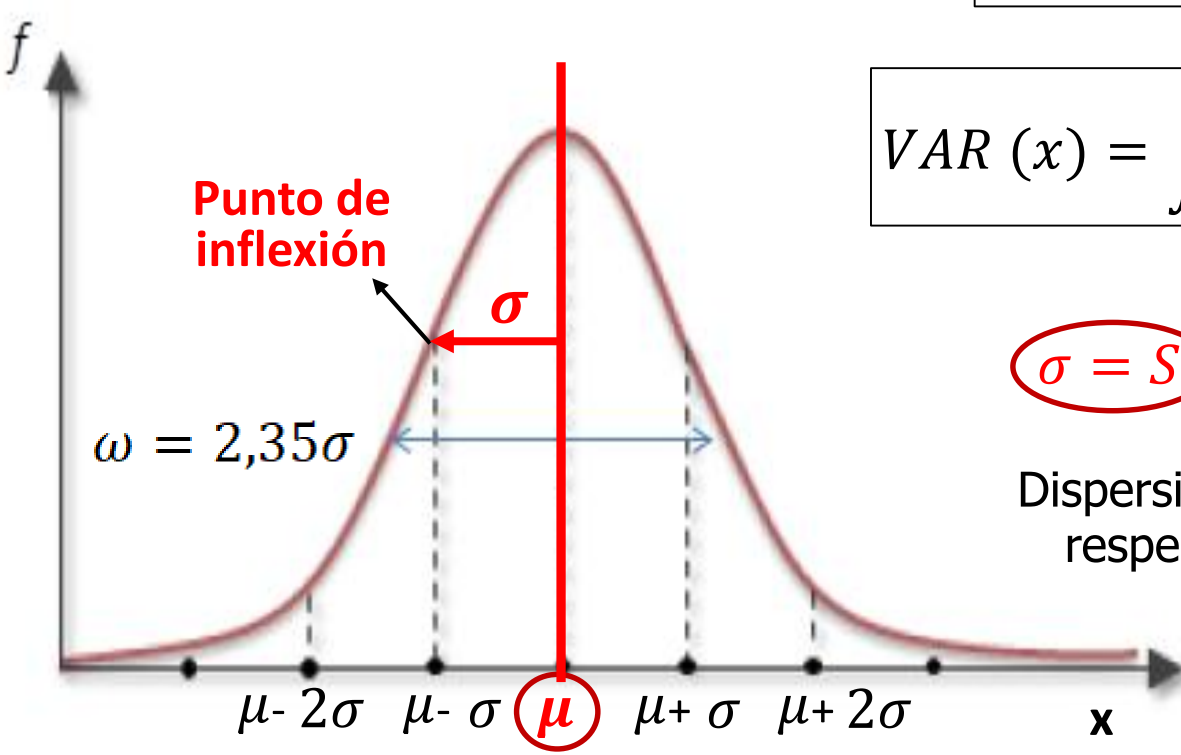
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR\ (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x) dx$$

$$\sigma = S = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Dispersión de los datos x_i respecto de la media



Función de distribución: Gauss

Características de la función

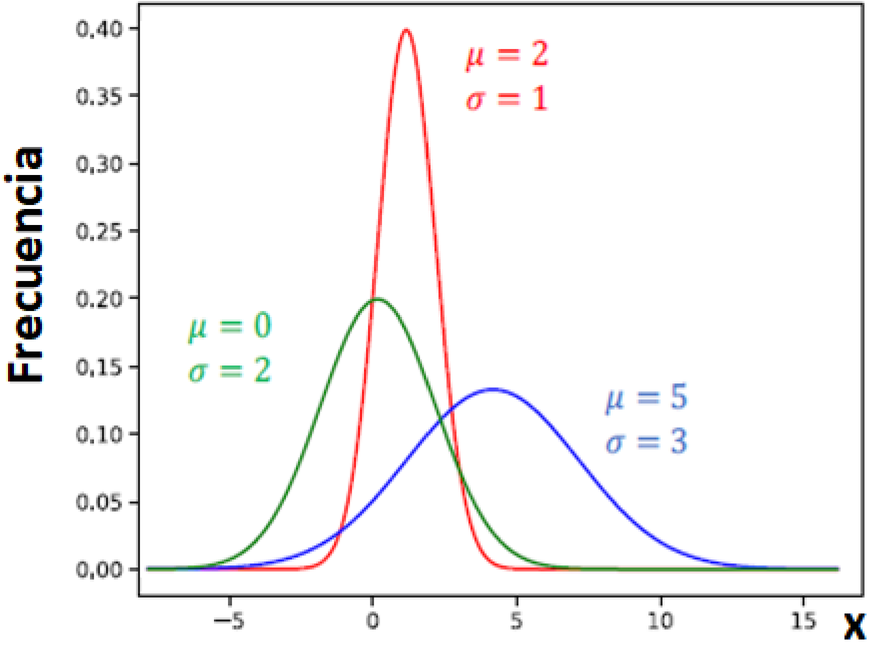
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ⟶ Está centrada en $x = \mu$
- ⟶ Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- ⟶ Tiende exponencialmente a 0 para $|x-\mu| \gg \sigma$
- ⟶ El parámetro σ da una idea del ancho de la curva

Función de distribución de 3 Muestras

μ ↑ Corrimiento en x hacia la derecha

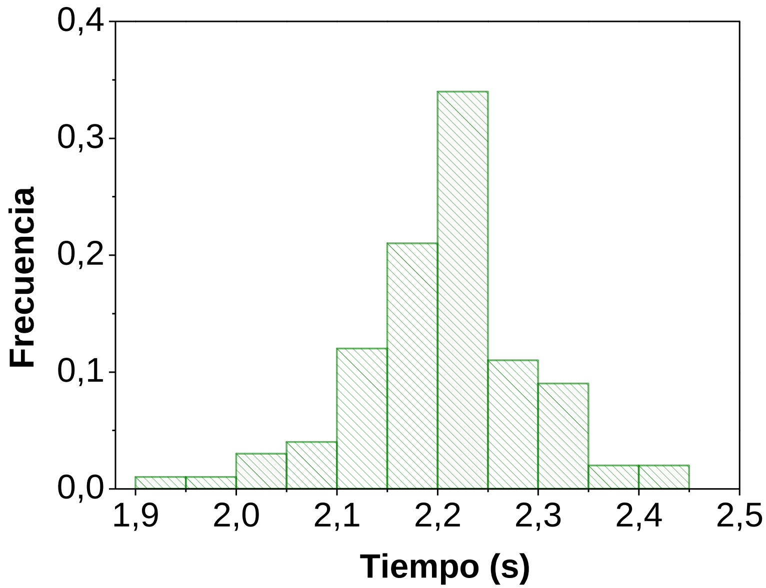
σ ↑ Aumento del ancho de la distribución



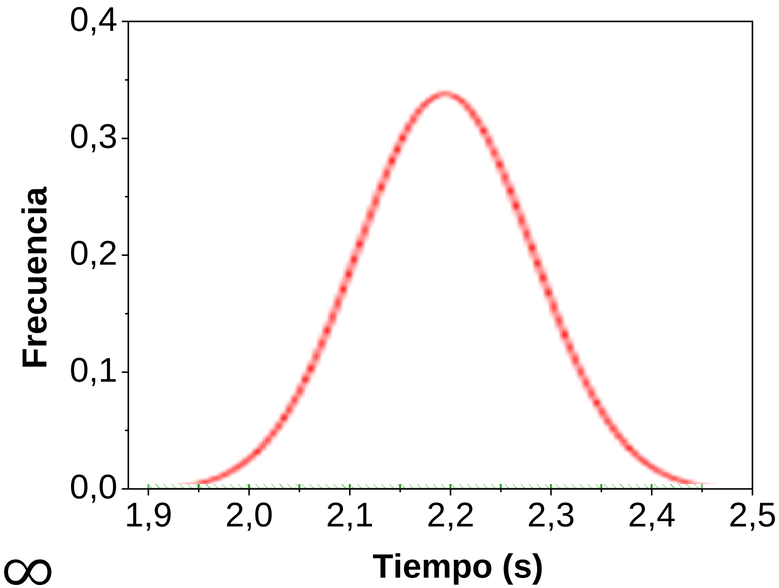
Objetivo

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos estimamos los parámetros de la distribución



$N \to \infty$



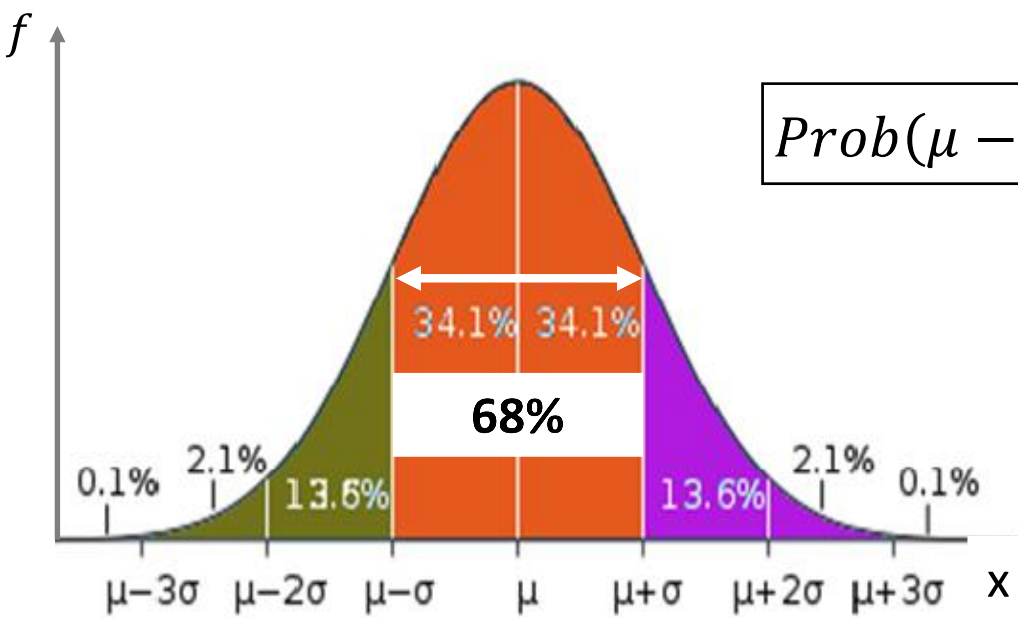
$\bar{x} \longrightarrow \mu$

$S \longrightarrow \sigma$

Si realizamos una nueva medición x, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo $\boldsymbol{\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma}$?

$$\boxed{Prob(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx}$$

$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx}$$



$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}}$$

68%

1º CASO a evaluar: 1 Muestra con N medidas

Parámetros de la distribución

1 Serie de mediciones

$$N \to \infty$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \longrightarrow \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

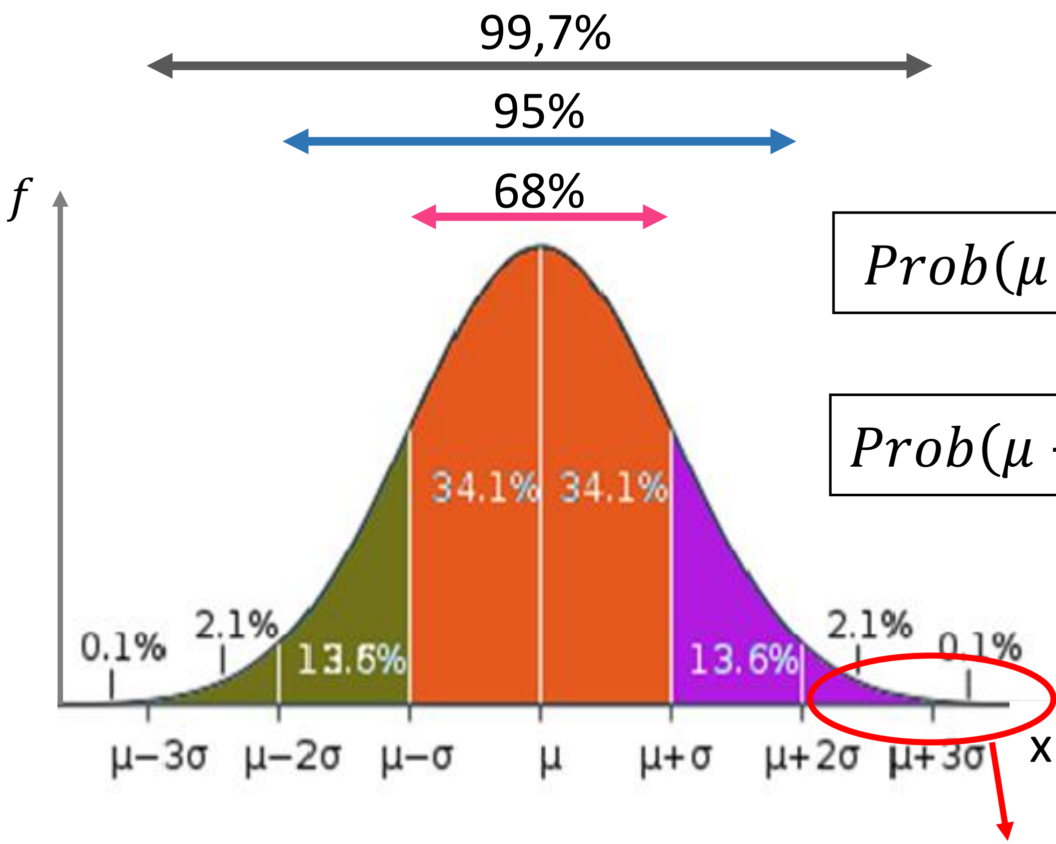
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}} \longrightarrow VAR\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$\sigma = \sqrt{VAR\,(x)}$$

Si realizamos una nueva medición x_i, ésta tendrá una probabilidad de $\sim$ 68% de encontrarse en el intervalo:

$$(\bar{x} - S\,, \bar{x} + S) \longrightarrow (\mu - \sigma\,, \mu + \sigma)$$

Si realizamos una nueva medición x,
¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo
$\boldsymbol{\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma}$ **?** **¿Y en** $\boldsymbol{\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma}$ **?**



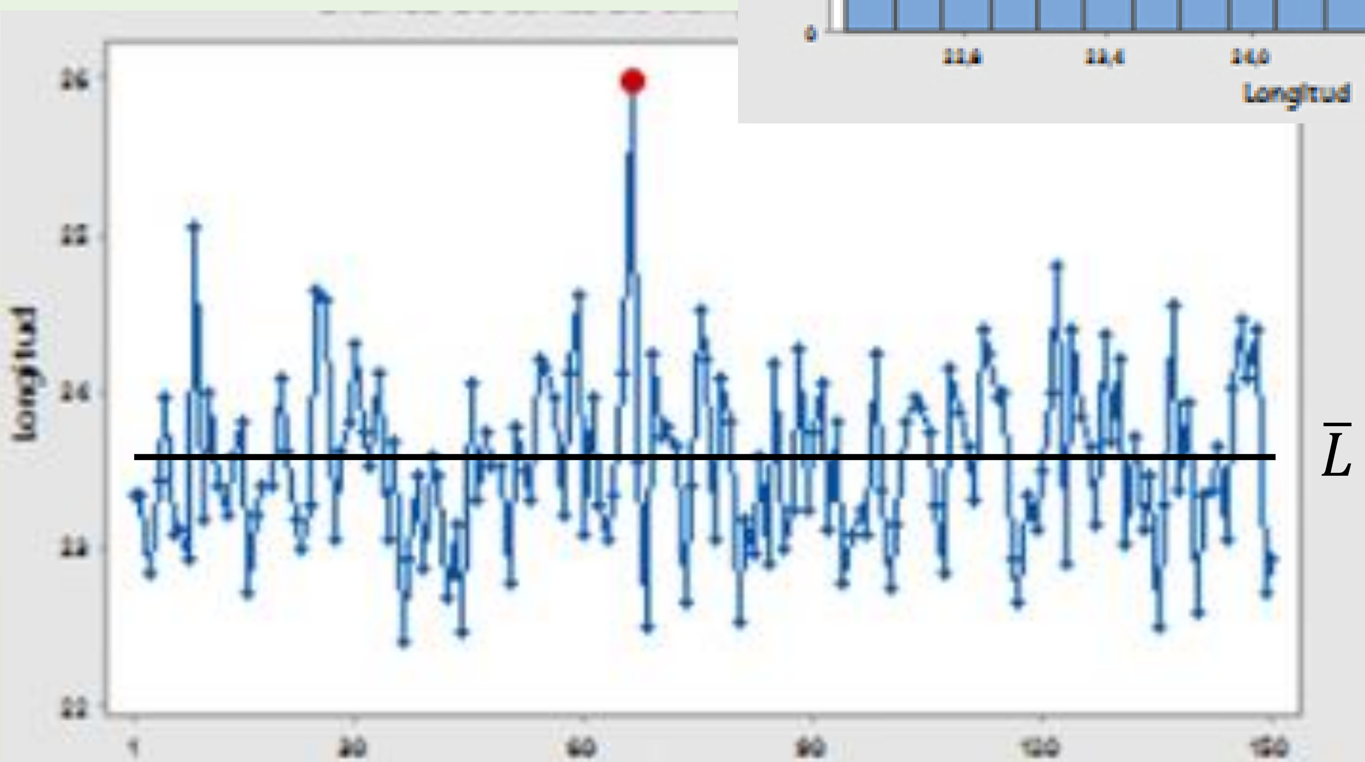
$\boxed{Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong 0{,}95}$

$\boxed{Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0{,}997}$

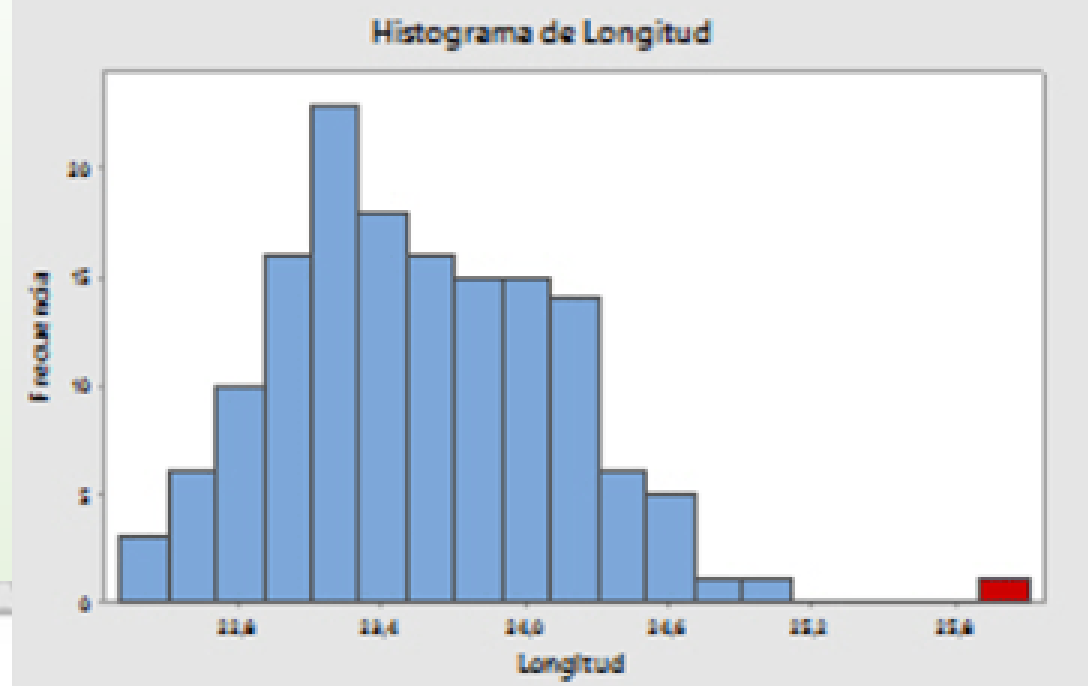
Los punto fuera del intervalo $\boldsymbol{\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma}$
deberían ser medidos nuevamente

Residuos

Oscila alrededor de la Media

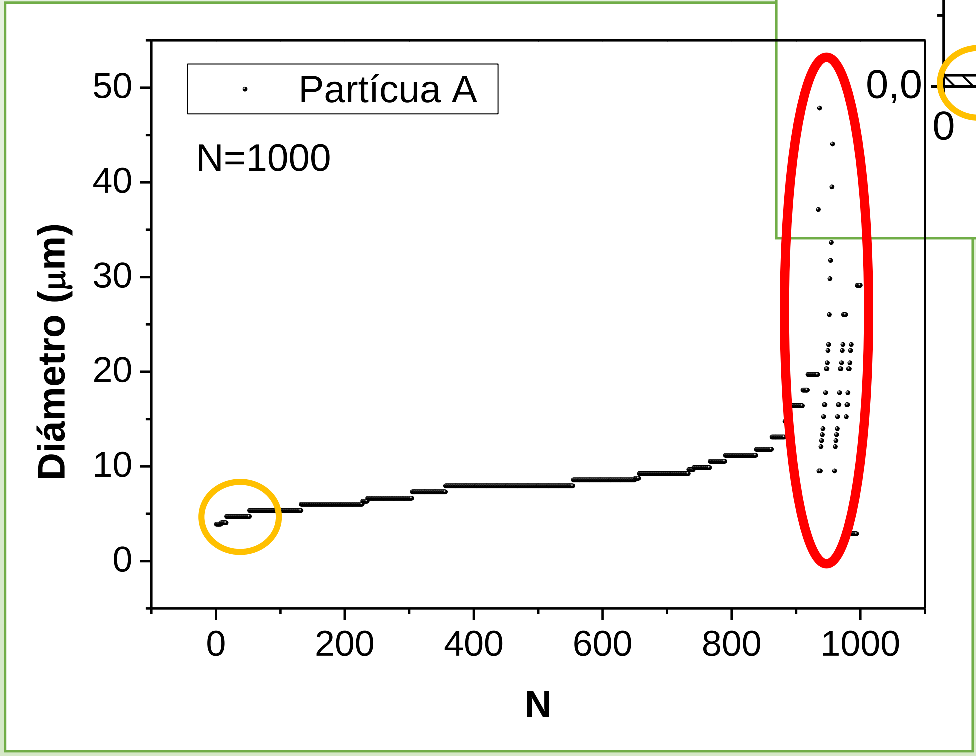


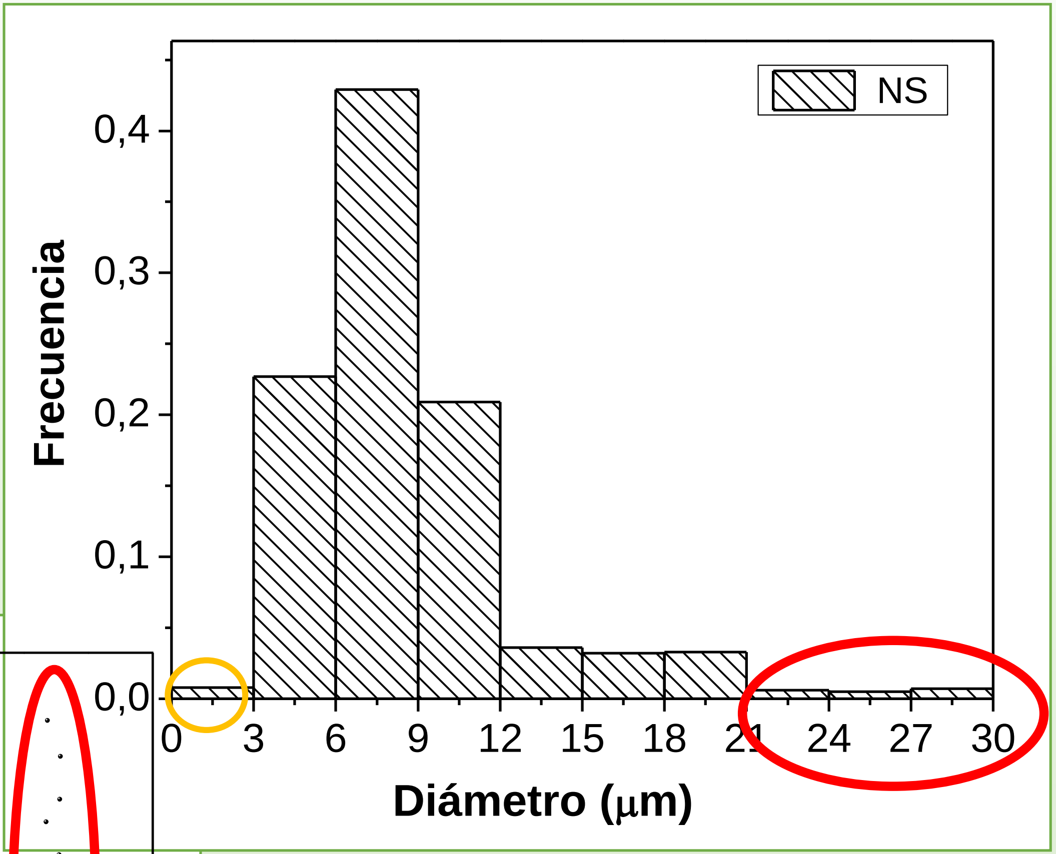
$\bar{L}$



Residuos

Un Ejemplo con los datos ordenados de menor a mayor





¿Cómo dependen los parámetros estadísticos y la distribución de los datos si modifico N?

¿Cuál es la probabilidad que una nueva medición se encuentre en el intervalo de confianza $\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$?

¿Cuándo aparece σ_e y cómo lo obtengo?

Si mido fuera del error instrumental → Error estadístico

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S)\ Ud.$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

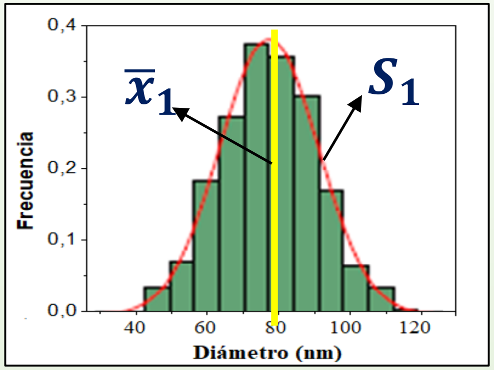
2º CASO a evaluar: 1 Muestra Poblacional

Tomamos n muestras de *N* medidas

Repetimos n veces el experimento …

Exp. 1 → N mediciones de x → $\bar{x}_1 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

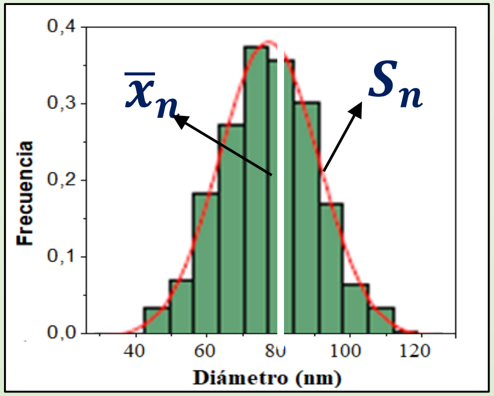
S_{x1}, σ_{x1}



⋮

Exp. n → N mediciones de x → $\bar{x}_n = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

S_{xN}, σ_{xN}

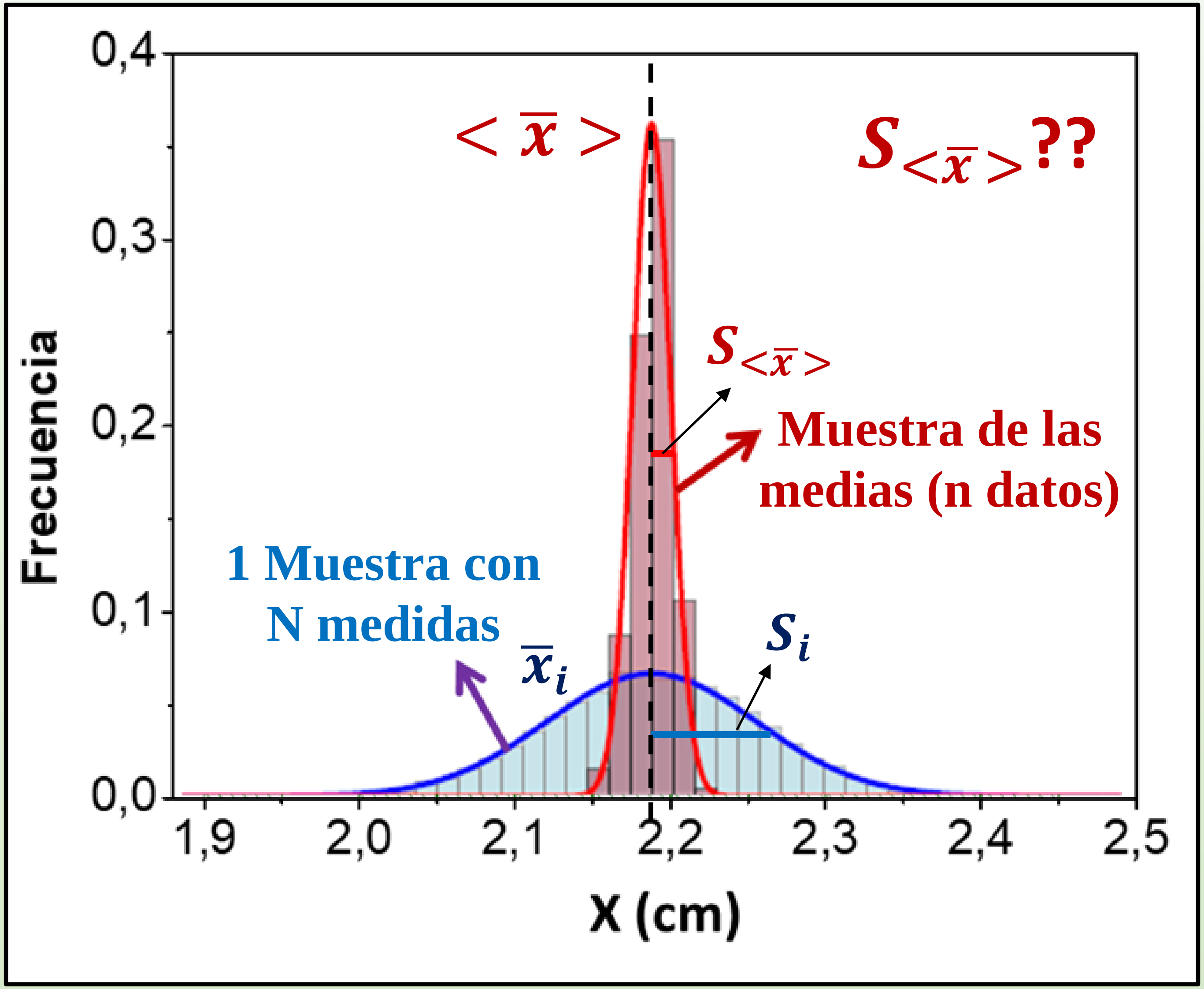


$\boxed{n \text{ Series}}$

Los valores de x_i del caso Poblacional serán $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$

Definimos: $\boxed{<\bar{\boldsymbol{x}}> \quad \text{y} \quad \boldsymbol{S}_{<\bar{x}>}}$

Comparando casos …



Teorema Central del Límite (TCL)

- Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

- **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $<\bar{x}>$

$$\boxed{<\bar{x}>= \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} \bar{x}_i}$$

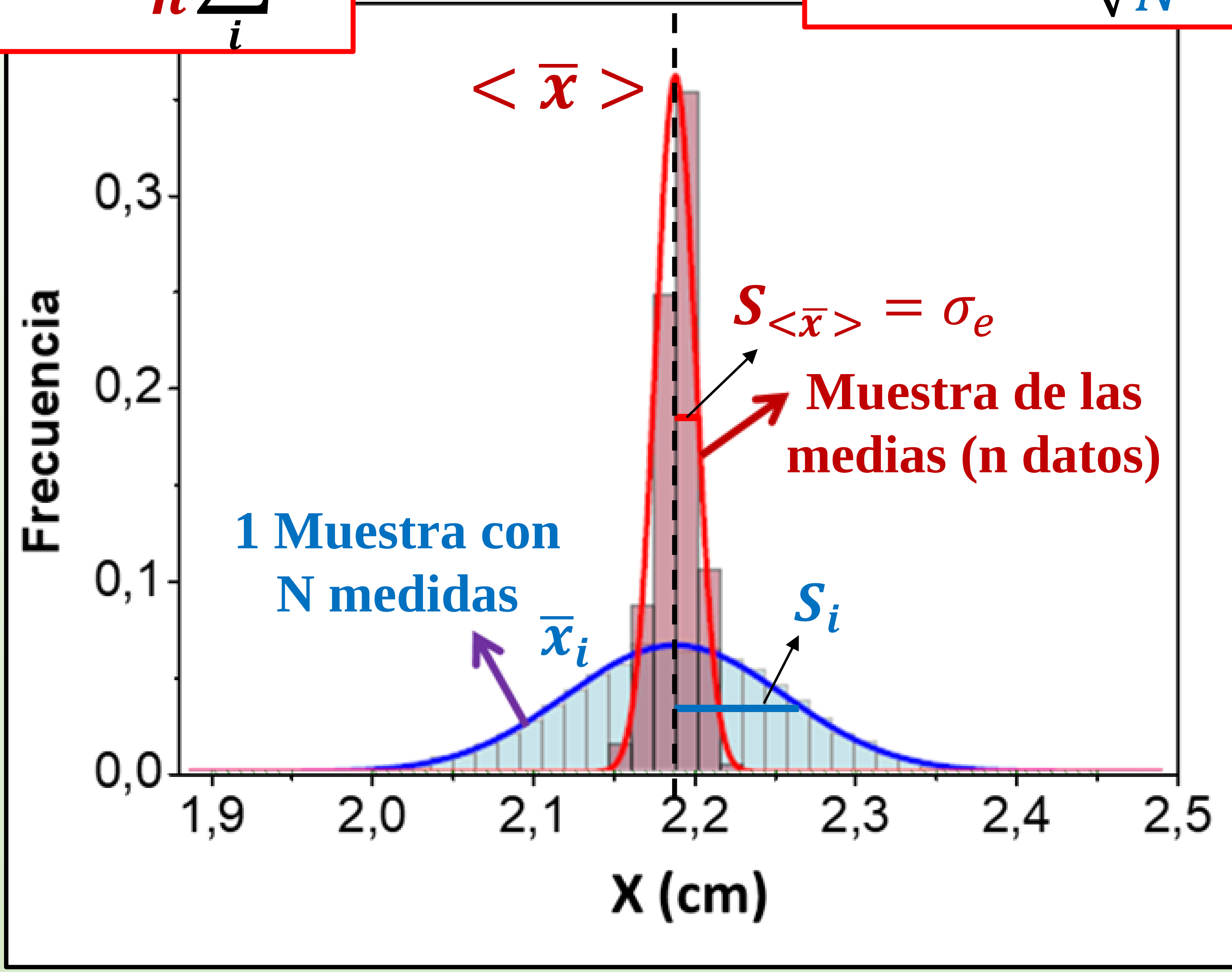
$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(<\bar{x}> - \bar{x}_i)^2}{n}}}$$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

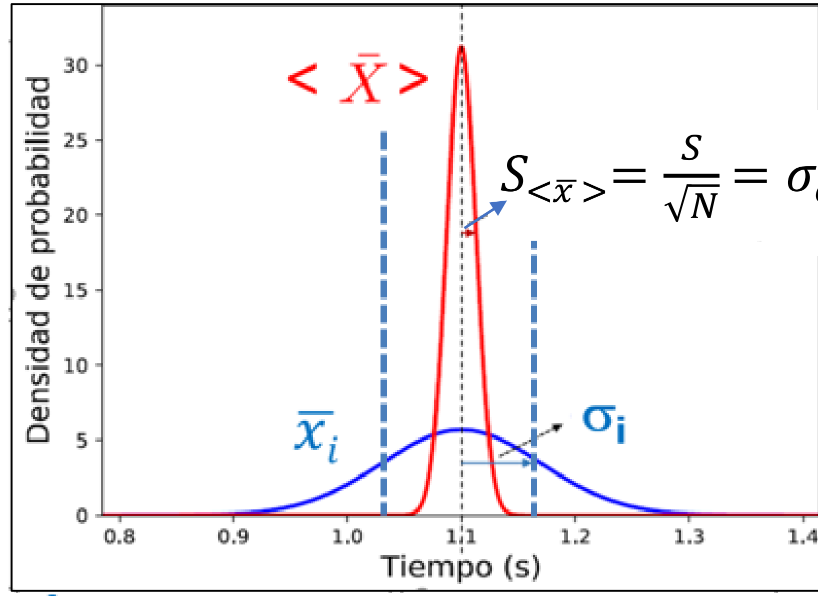
$$< \bar{x} > = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} \bar{x}_i$$

$$S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e$$



Dada una serie de N mediciones con un dado de $\overline{x}$ y un dado σ

¿Cual es el intervalo en el que hay un 68 % de probabilidades que se encuentre :



A) Una nueva medición de la misma serie

B) El valor promedio de una nueva serie de mediciones

PROBABILIDAD	Una nueva medida de x_i	una nueva medida de $\overline{x}_i$
• ~68%	$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$	$(<\bar{x}> -\sigma_e, <\bar{x}> +\sigma_e)$
• ~95%	$(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$	$(<\bar{x}> -2\sigma_e, <\bar{x}> +2\sigma_e)$
• ~99%	$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$	$(<\bar{x}> -3\sigma_e, <\bar{x}> +3\sigma_e)$

Expresiones para MF en MD

1- 1 Muestra con N medidas: 1 nueva medida x_i

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Con un 68%	$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$
Con un 95%	$(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$
Con un 99,7%	$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$

2- n muestras de N medidas: *una nueva muestra con* $\bar{x}_i$

$$< \bar{x} >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$$

$$S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e$$

Con un 68%	$(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$
Con un 95%	$(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)$
Con un 99,7%	$(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)$

En general se toma una única muestra de N medidas

Si se toma como hipótesis que nuestra serie que comportará como otra medida de la misma MF bajo la misma metodología:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

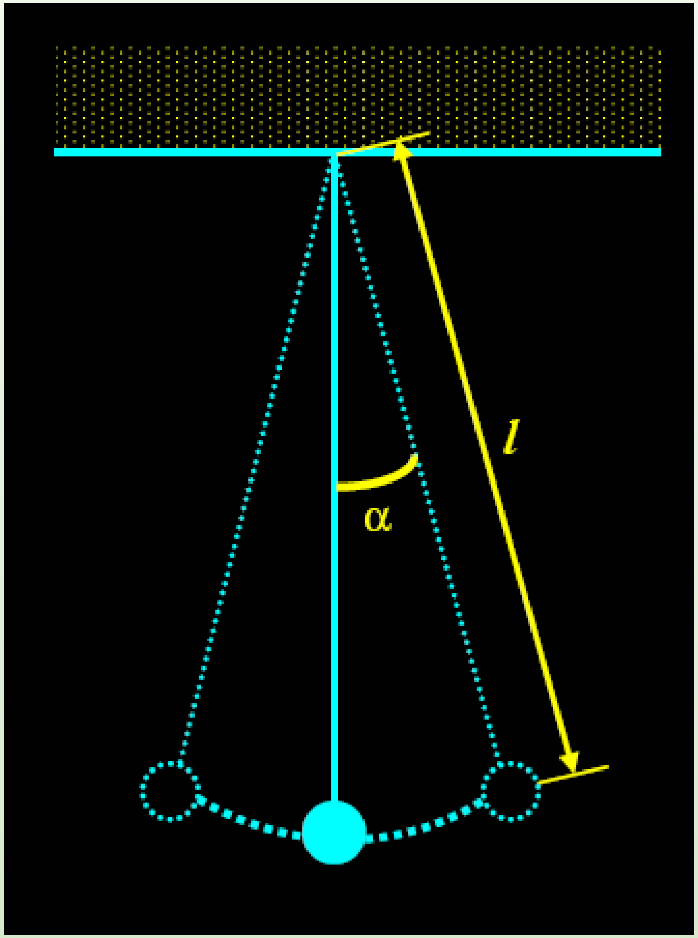
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e$$

PROBABILIDAD

- *~68%* $\quad \boxed{(\bar{x} - \sigma_e \,, \bar{x} + \sigma_e)}$
- *~95%* $\quad \boxed{(\bar{x} - 2\sigma_e \,, \bar{x} + 2\sigma_e)}$
- *~99%* $\quad \boxed{(\bar{x} - 3\sigma_e \,, \bar{x} + 3\sigma_e)}$

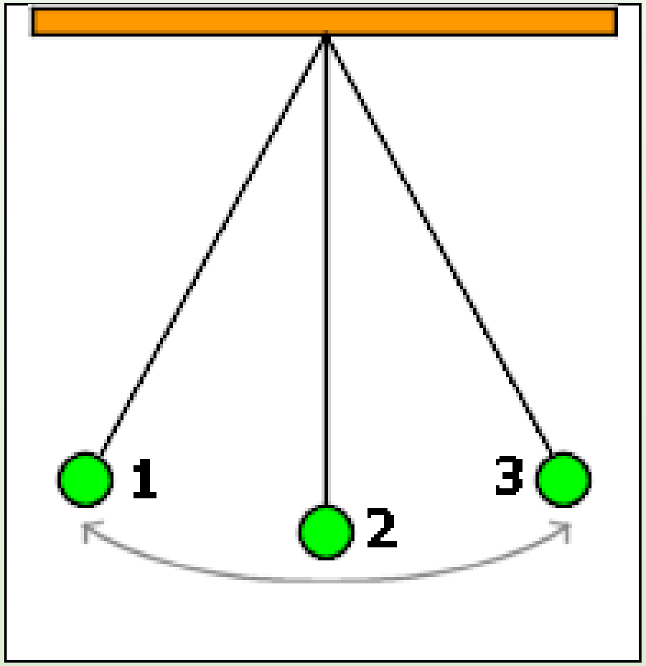
PÉNDULO SIMPLE



El **péndulo simple** (**péndulo ideal**) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa ***m*** que está suspendida mediante un **hilo inextensible y sin peso**. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

Período de un Péndulo Simple

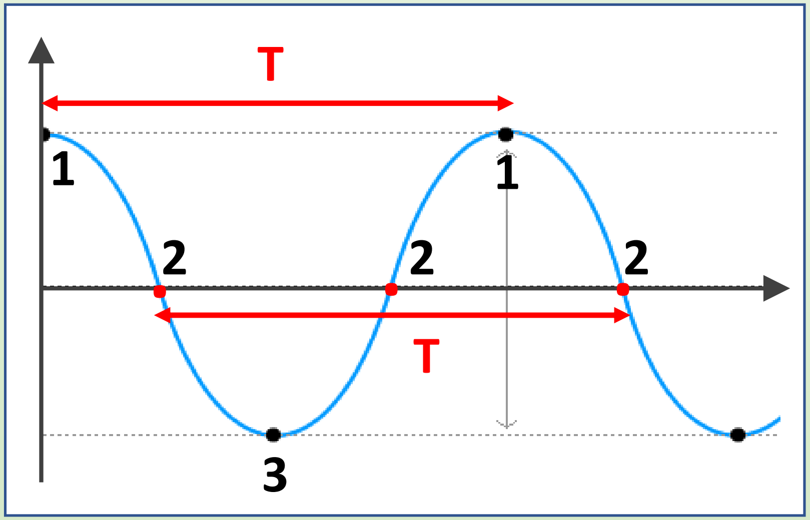
Período del péndulo



¿Y si comienzo a medir cuando pasa por el punto de equilibrio (2)?

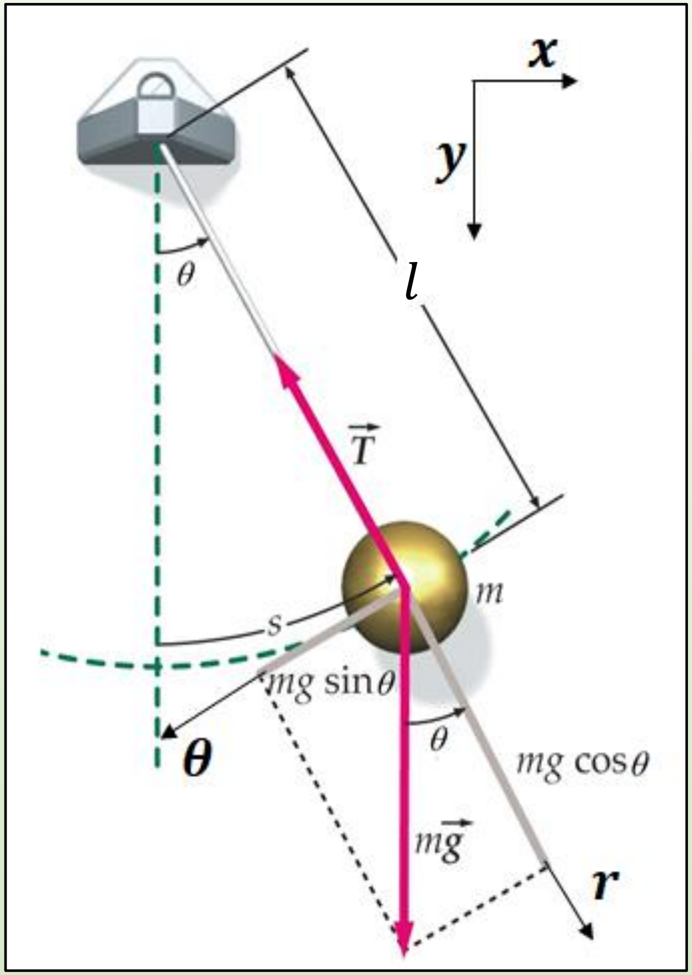
Tiempo de una oscilación completa

Tiempo que tarda el péndulo en partir desde uno de sus extremos de amplitud (1), pasar por el punto de equilibrio (2), llegar al otro extremo de amplitud (3) y regresar nuevamente al primer punto (1)



Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}: mgcos\theta - T = ma_r \longrightarrow a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \longrightarrow a_\theta = -gsen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

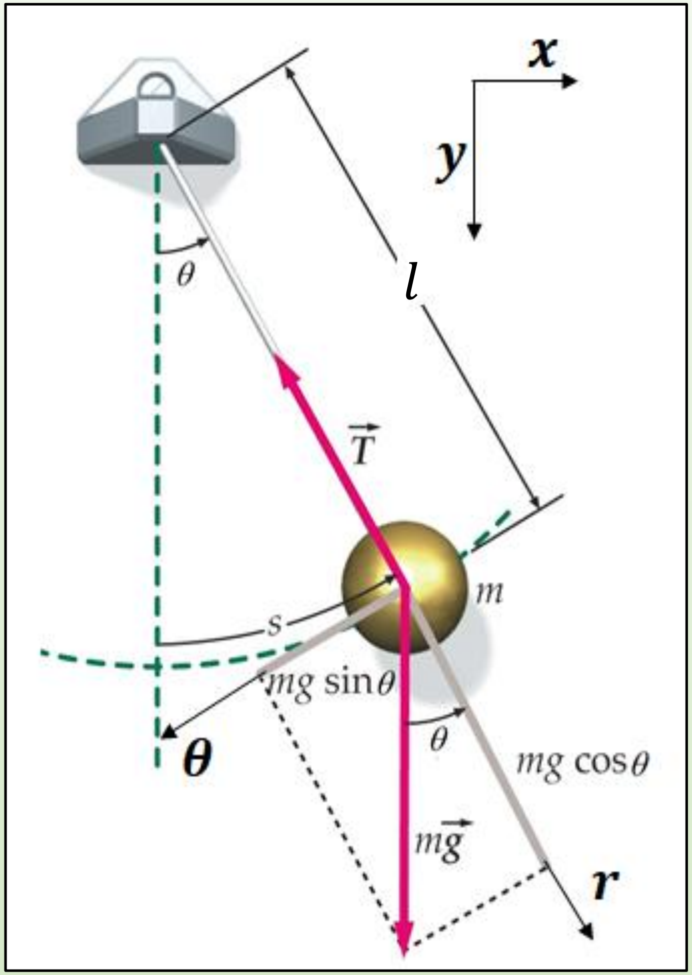
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$\theta \ll 1 \;\Rightarrow sen\theta \approx \theta$ $\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Solución: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)}$ $\qquad \theta_0 \ll 1$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\qquad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi}$ $\qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Período de un Péndulo Simple

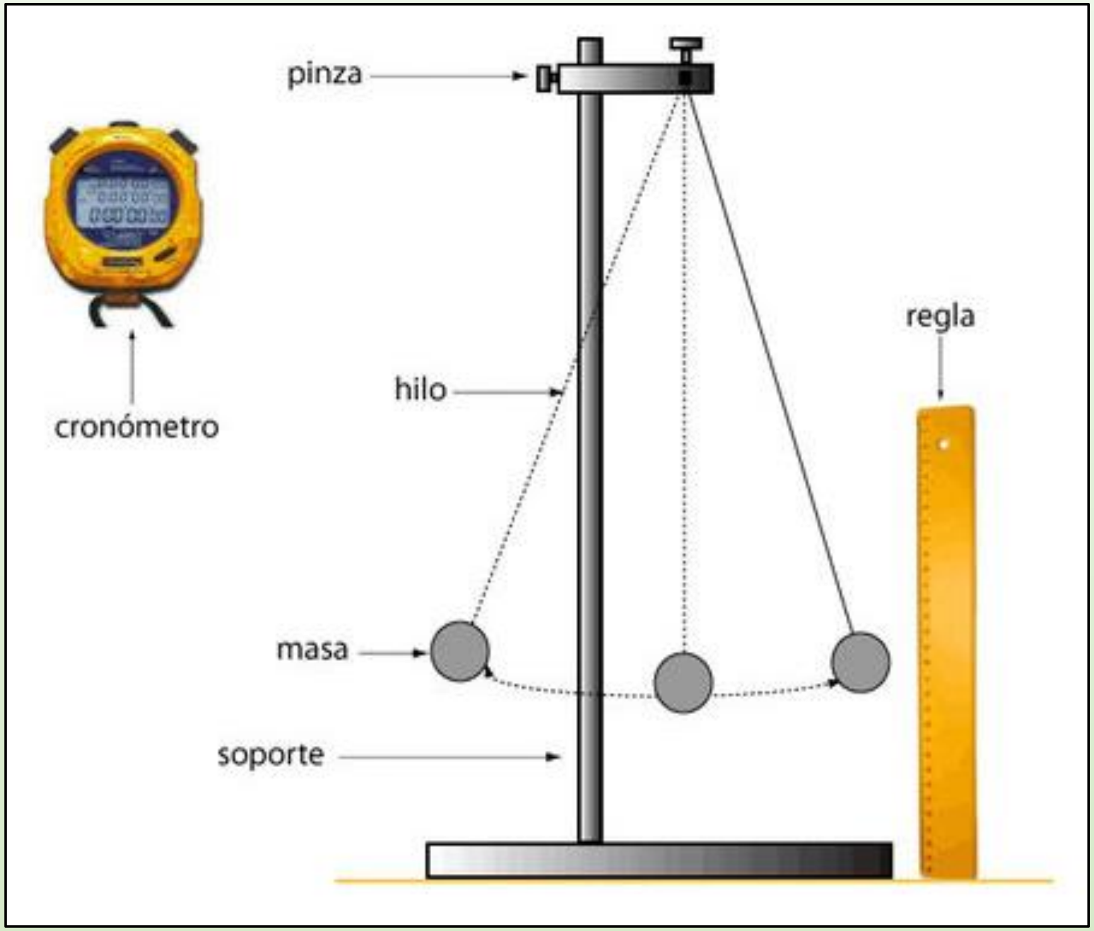
- Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2do orden

$$l\,\ddot{\theta} + g sen\theta = 0$$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO

ACTIVIDAD 1

- Péndulo de alrededor de **80-100 cm**
- Realice **20 mediciones** del período del péndulo ($\theta < 10°$) (**N = 20**)
- Siga midiendo hasta tener un total de **200 mediciones** (**N = 200**)

ACTIVIDAD 2

*Trabajamos con **N = 20, N = 70 y N = 200***

- Realice un histograma para cada caso. *¿Dependen de N?*
- Calcule $\bar{\boldsymbol{T}}$ y $\boldsymbol{S}$ y compare. *¿Dependen de N?*
- Reporte el valor de *T* de cada grupo como: $\boldsymbol{T} = (\bar{\boldsymbol{T}} \pm \boldsymbol{S})\ \boldsymbol{Ud}$.

EXPERIMENTO

Exp. 2

ACTIVIDAD 3

- Tome el grupo ***N = 200*** y arme **10 grupos de 20 mediciones** cada uno.
- Calcule **$\bar{T}$ y S de cada grupo**. Evalúe si $S_1 \cong S_2 \cong \cdots S_i$
- Realice un histograma con **n = 10** y superpóngalo al de **N = 20**
- Calcule $< \bar{T} >$ y $S_{<\bar{T}>}$ y reporte $T = (< \bar{T} > \pm S_{<\bar{T}>})\ Ud.$
- ¿Es comparable $S_{<\bar{T}>}$ de **n = 10** con $\frac{S}{\sqrt{N}}$, con S del grupo de 200 y **N = 20**?

ACTIVIDAD 4

- Reporte el valor del período del péndulo como $T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud.$ considerando que **N = 200** es representativo para su experimento.

Es decir, usando:

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i \qquad \Delta T = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$