

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2021

DEPENDENCIA ENTRE DOS MAGNITUDES CUADRADOS MÍNIMOS II

Lucía Famá - Mauro Silberberg
Valeria Pais, Ayelén Santos



Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la dependencia entre dos magnitudes y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - Modelado

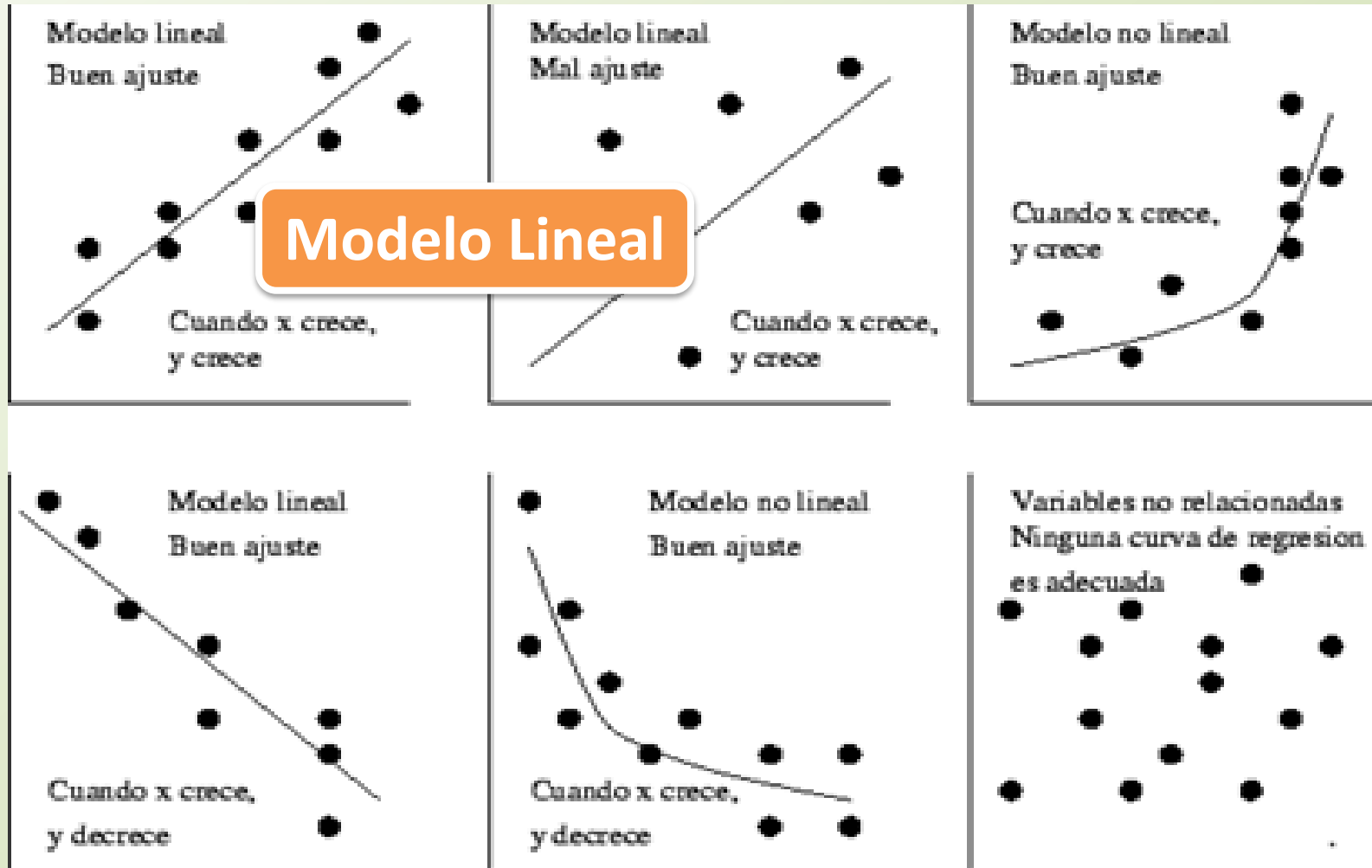
Objetivo de la práctica de hoy y ... Cómo resolverlo

**DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD (g) A PARTIR DE
LOS DATOS DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS
LONGITUDES**

CUADRADOS MÍNIMOS

CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre dos medidas ... caso más sencillo



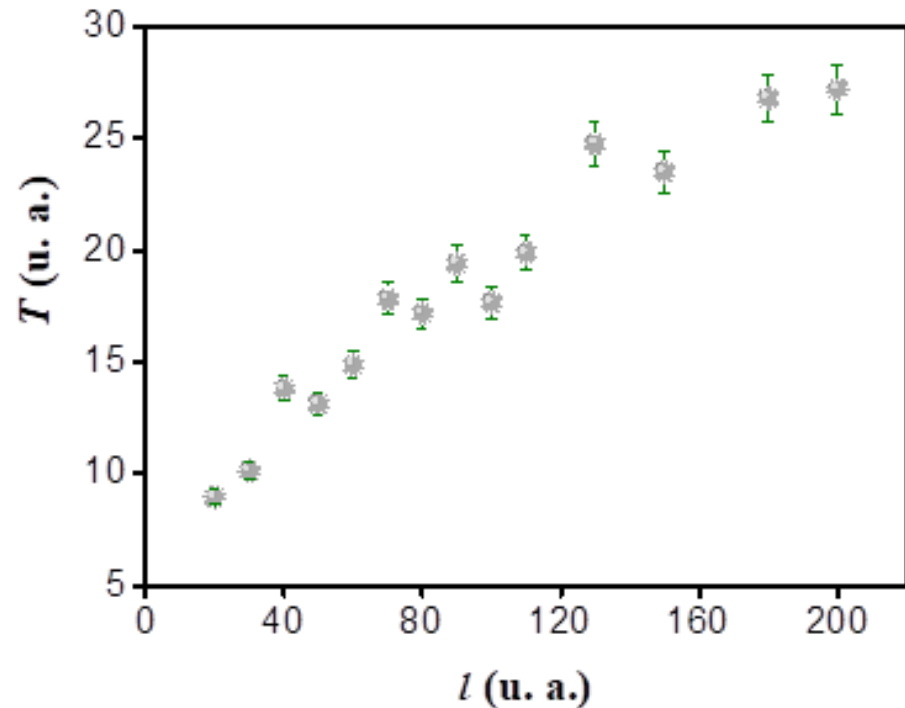
Hoy

ACTIVIDAD 2

OBTENER EL VALOR DE g A PARTIR DE UN MODELO LINEAL

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

T NO ESTÁ RELACIONADO
LINEALMENTE CON l



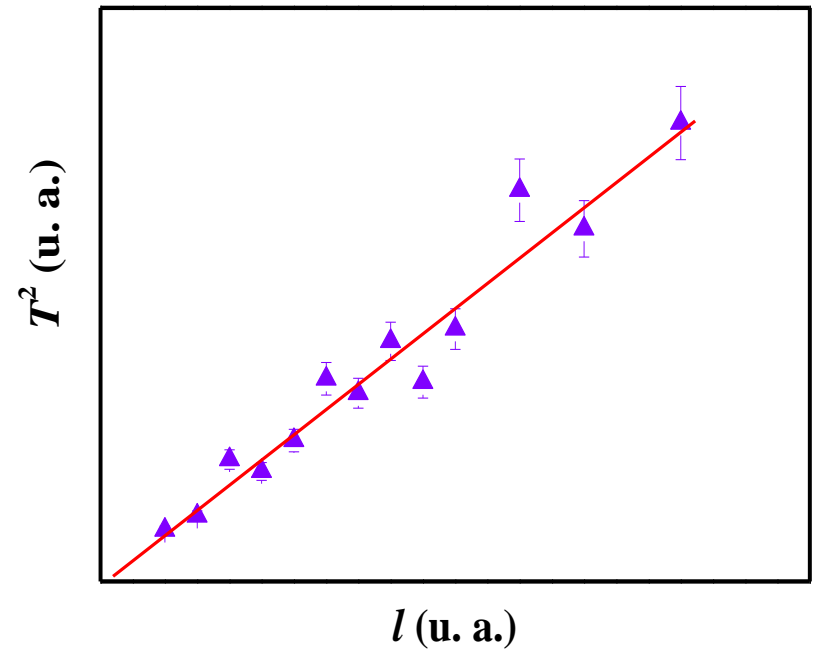
¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

- Linealizar la función de T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Diagram illustrating the linearization of the period T of a simple pendulum. The original equation is $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Two paths are shown with blue arrows:

- Top path: T (y-axis) vs \sqrt{l} (x-axis). The equation is $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{l}$.
- Bottom path: T^2 (y-axis) vs l (x-axis). The equation is $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$. The term $\frac{4\pi^2}{g}$ is circled in blue and labeled "Pendiente" (Slope).



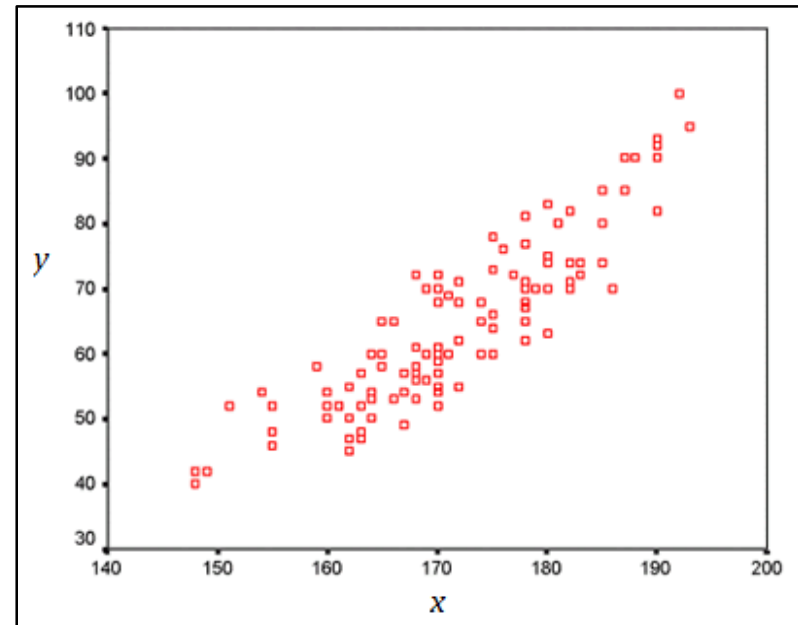
Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)

Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$



Buscamos encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos experimentales

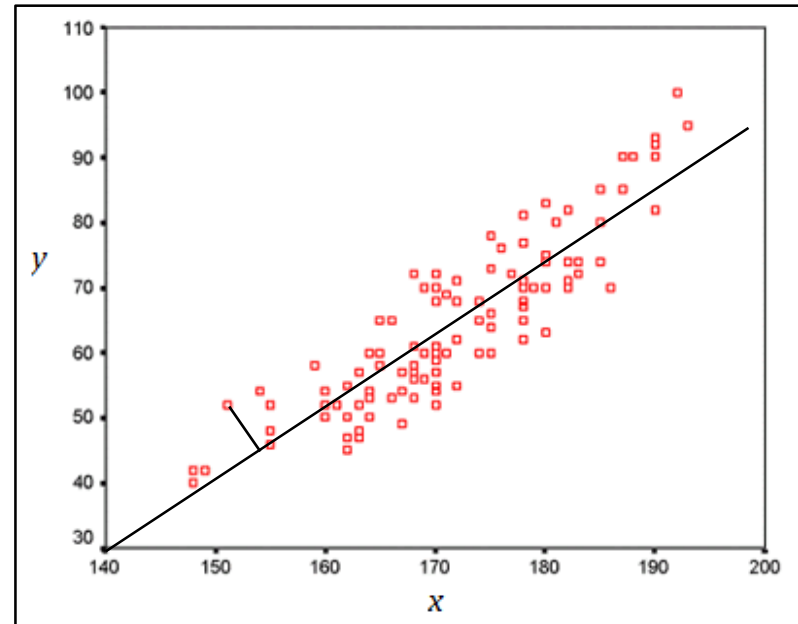
Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)

Partamos asumiendo que la relación es:

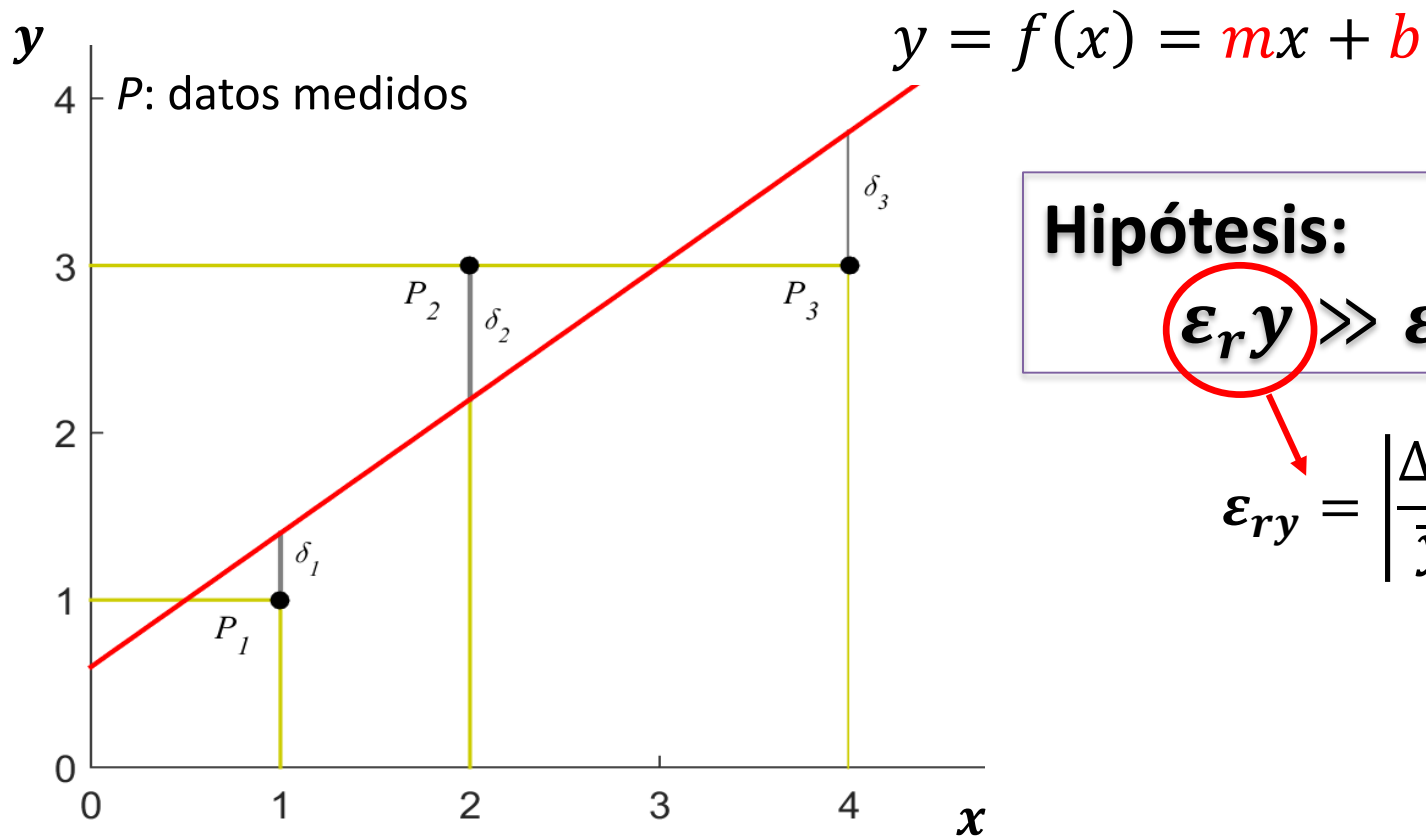
$$y = mx + b$$



Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso aún más sencillo



Hipótesis:

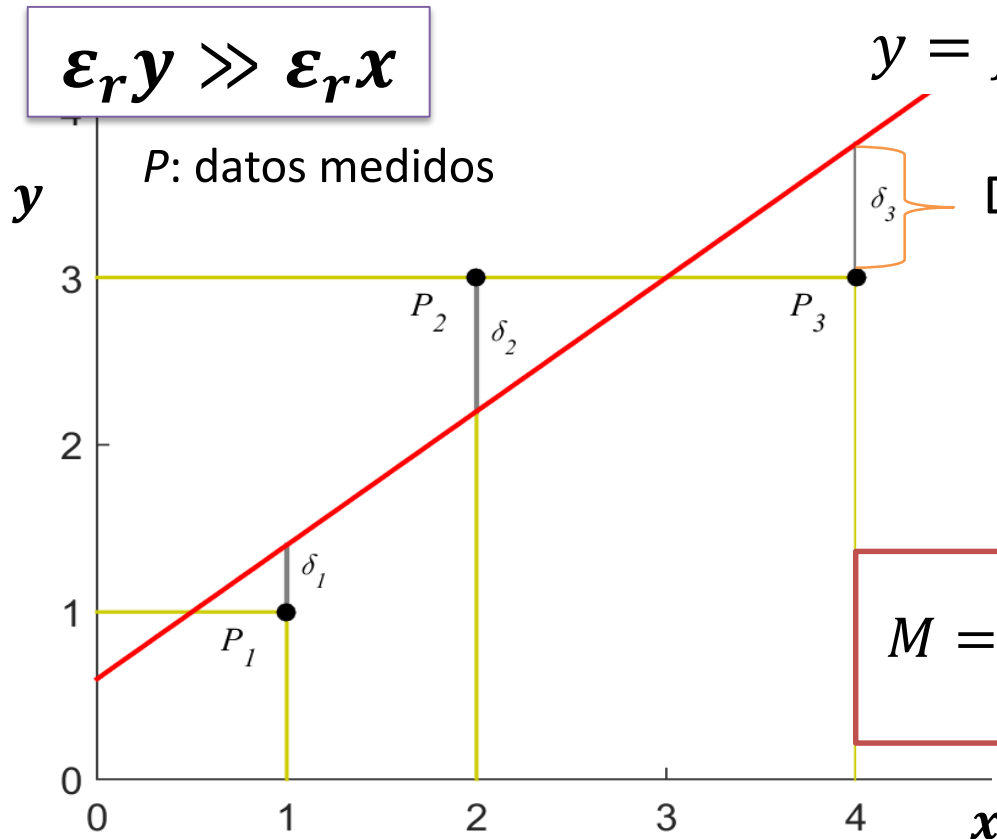
$$\epsilon_{ry} \gg \epsilon_{rx}$$

$$\epsilon_{ry} = \left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right|$$

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO** Ponderados

Cuando todos los datos en y tienen igual incerteza



$$y = f(x) = mx + b$$

Distancia \rightarrow Residuos (δ_i)

$$\delta_i^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots$$

$$M = \sum \delta_i^2 = \sum [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

Caso 1

¿Cómo encontramos los parámetros m y b ?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m, b) = \sum_1^N [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$M(m, b) = \sum_1^N y_i^2 + m^2 \sum_1^N x_i^2 + Nb^2 + 2mb \sum_1^N x_i - 2m \sum_1^N x_i y_i - 2b \sum_1^N y_i$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{array} \right\} 2m \sum_1^N x_i^2 + 2b \sum_1^N x_i - 2 \sum_1^N x_i y_i = 0$$

$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$2Nb + 2m \sum_1^N x_i - 2 \sum_1^N y_i = 0$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Caso 1

Ejemplo

Encontremos la recta que mejor aproxima a los siguientes datos:

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

X	Y	x·y	x ²	
7	2	14	49	
1	9	9	1	
10	2	20	100	
5	5	25	25	
4	7	28	16	
3	11	33	9	
13	2	26	169	
10	5	50	100	
2	14	28	4	
Σ	55	57	233	473

$$m = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{233 - \frac{55 \cdot 57}{9}}{473 - \frac{(55)^2}{9}} \approx -0,84$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{\sum y}{n} - (-0,84) \frac{\sum x}{n} = \frac{57}{9} + 0,84 \cdot \frac{55}{9} = 11,4$$

Caso 1

¿Cómo encontramos S_m y S_b ?

$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

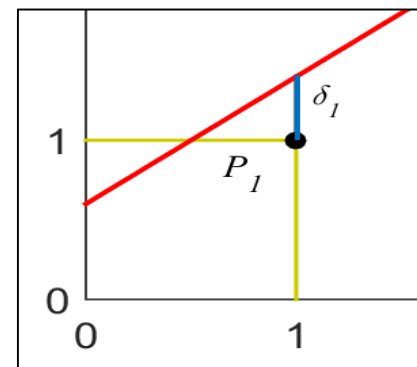
Propagación de errores!!



D. C. Baird. Prentice Hall
(1991). Apéndice 2

Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i



$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

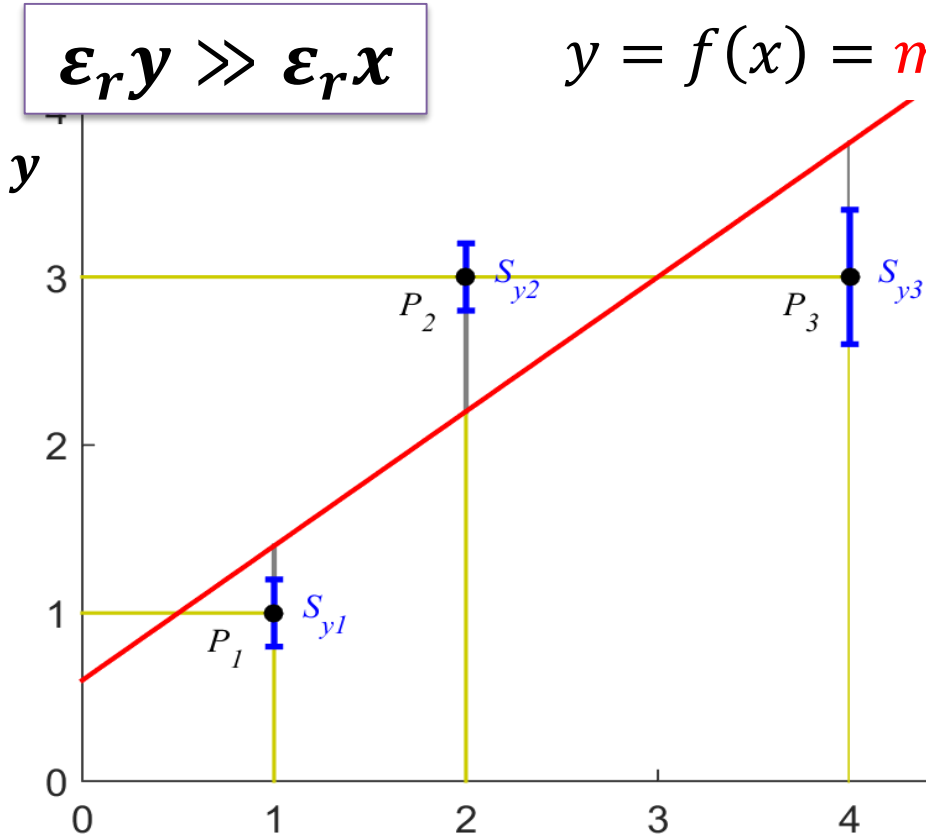
$$\dots \rightarrow S_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{N - 2}}$$

Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso 2

Cuadrados mínimos Ponderados

Cuando los datos en y tienen diferente incerteza



Hipótesis: Considera a las medidas más precisas las más relevantes

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos Normalizados

Caso 2

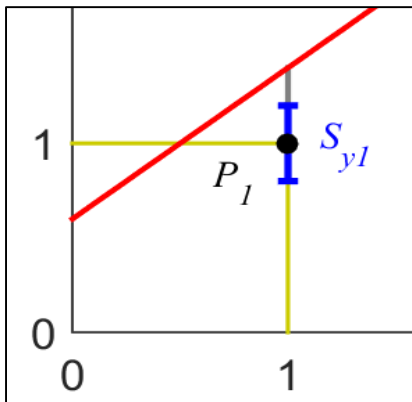
Cuadrados mínimos Ponderados

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i (x_i y_i) - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i \sum w_i x_i^2 - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$S_m^2 = \frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$



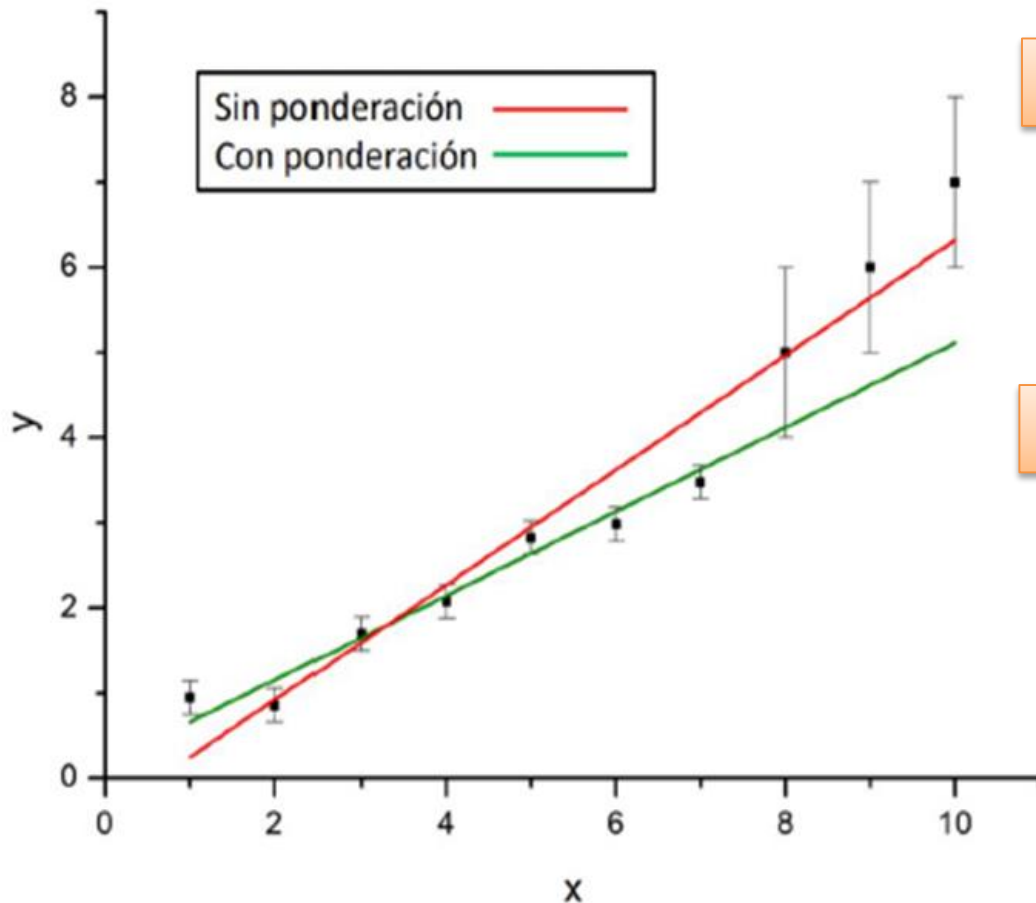
$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

Definiendo:

$$w_i = \frac{1}{(S_{y_i})^2}$$

CON Ponderación vs SIN Ponderación

Al ponderar se da relevancia a las medidas con menor incerteza



CON

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

SIN

$$M = \sum [y_i - (mx_i + b)]^2$$

¿Qué podemos discutir sobre un ajuste?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de
Correlación de Pearson

r →

Da idea de “cuan bueno”
fue el ajuste

Chi-cuadrado
reducido

χ^2_v →

Da idea de “compatibilidad” del
modelo con los datos

Residuos →

Da idea de la “forma” de
distribución de los datos
respecto de la recta

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

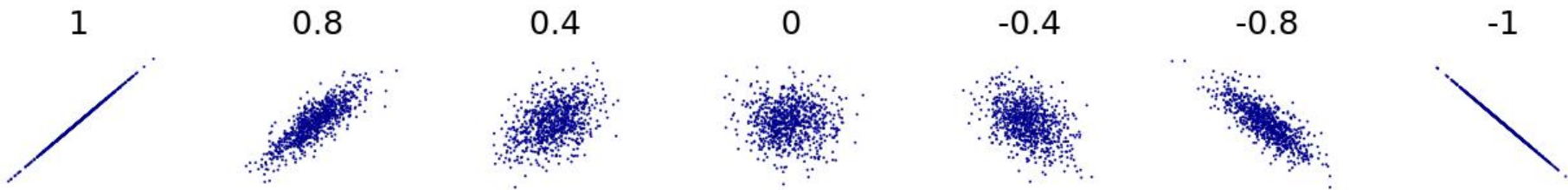
$$\text{Var}(x) = S_x^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{Var}(y) = S_y^2 = \frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$-1 \leq r \leq 1$$

$$\text{Cov}(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$



Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
178	69.8	8.25	0.41	68.06	0.17	3.38
160	67.5	-9.75	-1.89	95.06	3.57	18.43
183	81	13.25	11.61	175.56	134.79	153.83
152	60.8	-17.75	-8.59	315.06	73.79	152.47
168	70.2	-1.75	0.81	3.06	0.66	-1.42
178	75.6	8.25	6.21	68.06	38.56	51.23
188	80.1	18.25	10.71	333.06	114.70	195.46
165	72	-4.75	2.61	22.56	6.81	-12.40
157	59.4	-12.75	-9.99	162.56	99.80	127.37
170	65.3	0.25	-4.09	0.06	16.73	-1.02
165	62.6	-4.75	-6.79	22.56	46.10	32.25
173	68.4	3.25	-0.99	10.56	0.98	-3.22
2037	832.7			1276.25	536.67	716.38

$$\bar{x} = \frac{2037}{12} = 169.75$$

$$\bar{y} = \frac{832.7}{12} = 69.39$$

$$S_{xy} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N}$$

$$S_{xy} = \frac{716.38}{12} = 59.70$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1276.25}{12}}$$

$$S_x = \sqrt{106.35} = 10.31$$

$$S_y = \sqrt{\frac{536.67}{12}} = 6.69$$

$$S_{xy} = 59.70$$

$$S_x = 10.31$$

$$S_y = 6.69$$

Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

$$S_{xy} = 59.70$$

$$S_x = 10.31$$

$$S_y = 6.69$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{59.70}{(10.31)(6.69)} = \frac{59.70}{68.97} = 0.87$$

Coeficiente de determinación

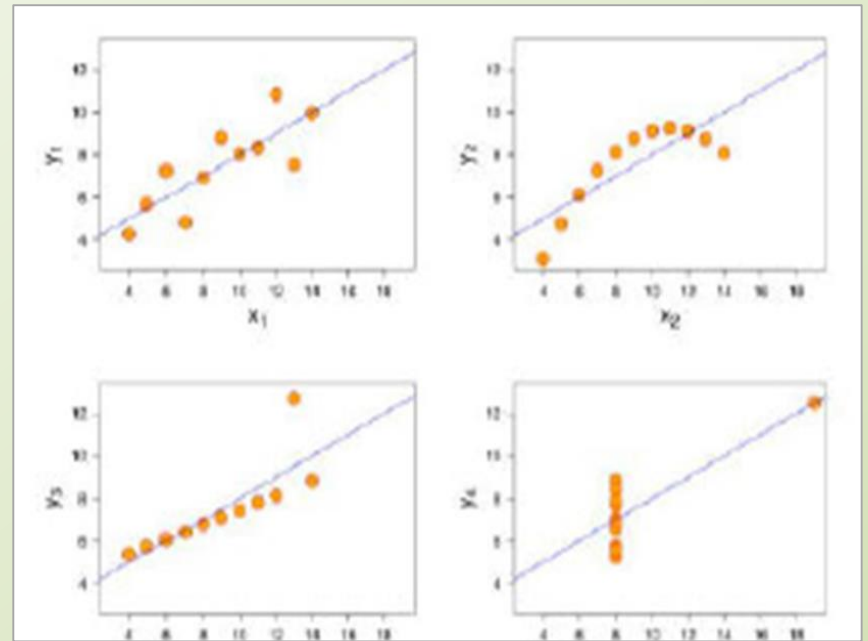
$$r^2 = 0.87^2 = 0.7569 = 75.69\%$$

Pero **OJO!!!!**

Estos cuatro ejemplos tienen igual valor de $|r|$

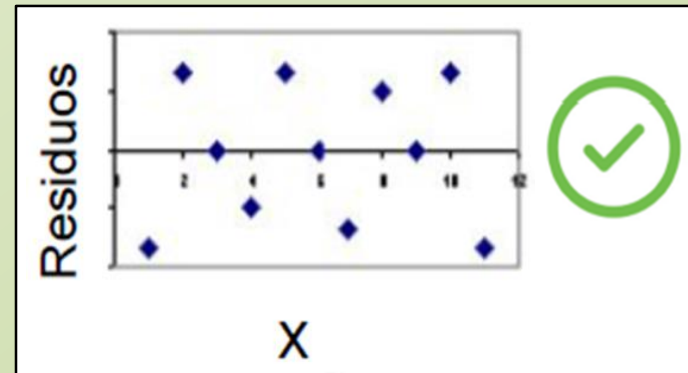
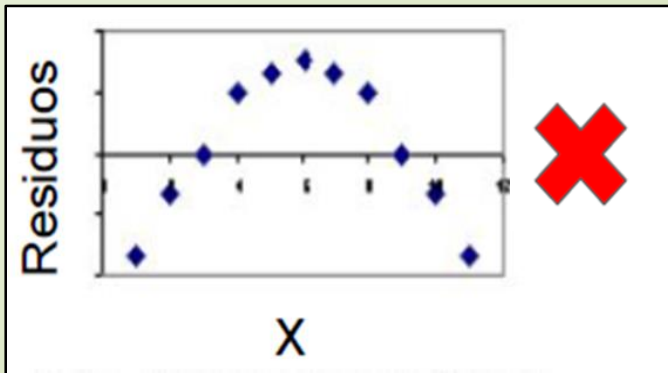
Necesito evaluar algo Más!!

Evaluar los residuos!!!



Residuos

En esos casos sucedió que la distribución de los datos alrededor de la recta no era normal



Chi-cuadrado

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

Chi-cuadrado
reducido

$$\chi^2 \xrightarrow{\text{normalizado}} \chi_v^2$$

$$\chi_v^2 \left\{ \begin{array}{ll} \chi_v^2 \sim 1 & \text{✓} \\ \chi_v^2 \ll 1 & \text{✗} \\ \chi_v^2 \gg 1 & \text{✗} \end{array} \right.$$

¿Qué esperamos?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coefficiente de
Correlación de Pearson

r →

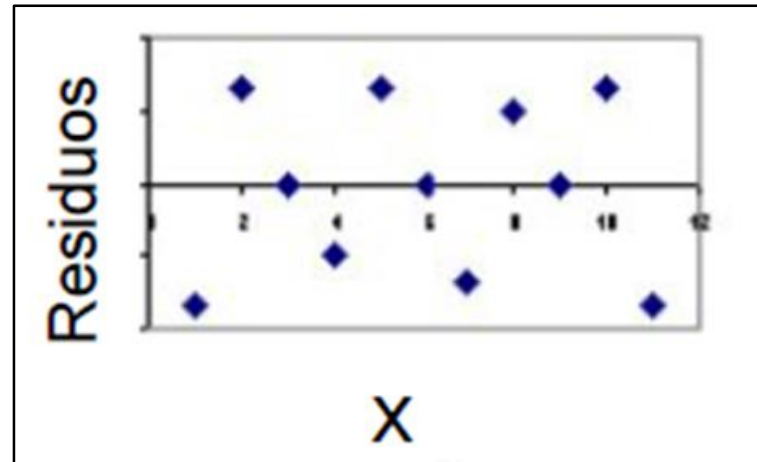
$$|r| \sim 1$$

Chi-cuadrado
reducido

χ^2_v →

$$\chi^2_v \sim 1$$

Residuos →



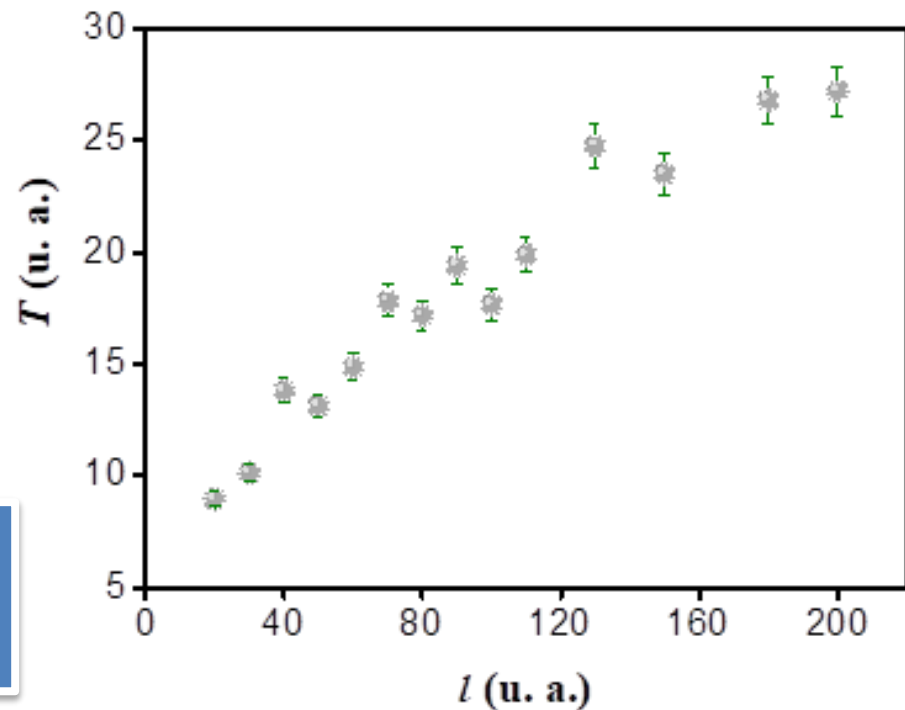
ACTIVIDAD 1

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD (g) A PARTIR DE LOS DATOS DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES – MODELO LINEAL

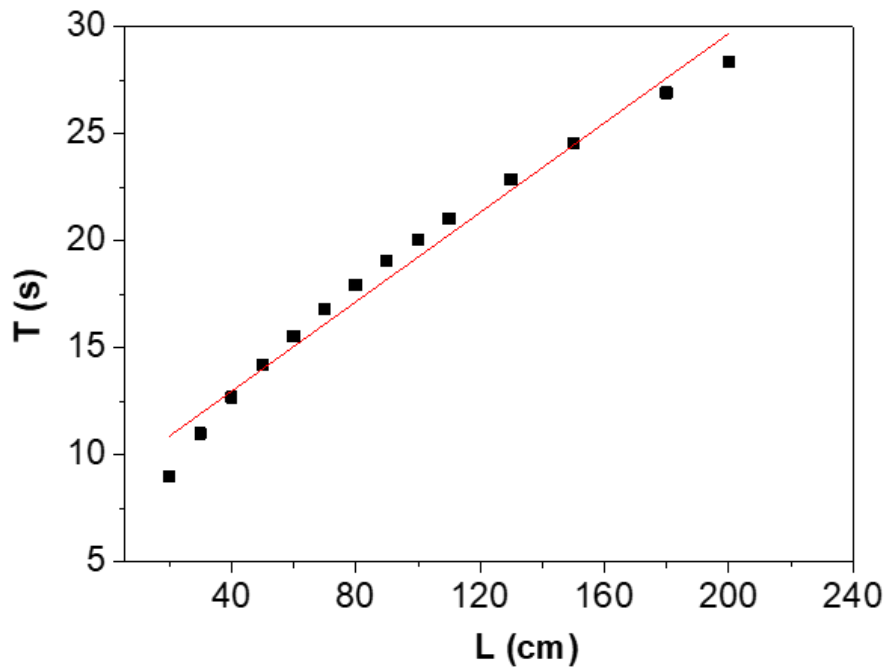
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



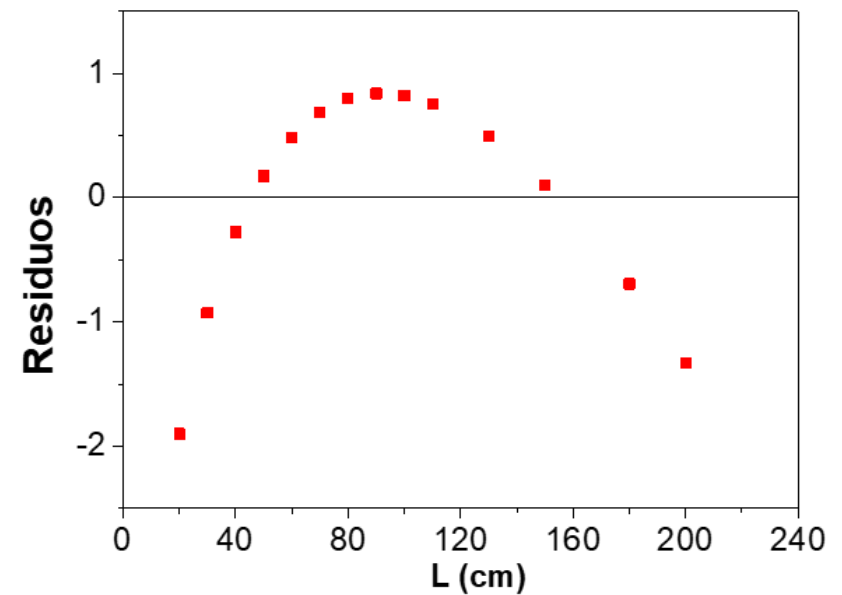
T NO ESTÁ RELACIONADO LINEALMENTE CON l



Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal
a T en función de l !!



$$r = 0,988$$



¿Podría obtener g a partir de los datos del período de un Péndulo y la longitud usando un Modelo lineal?

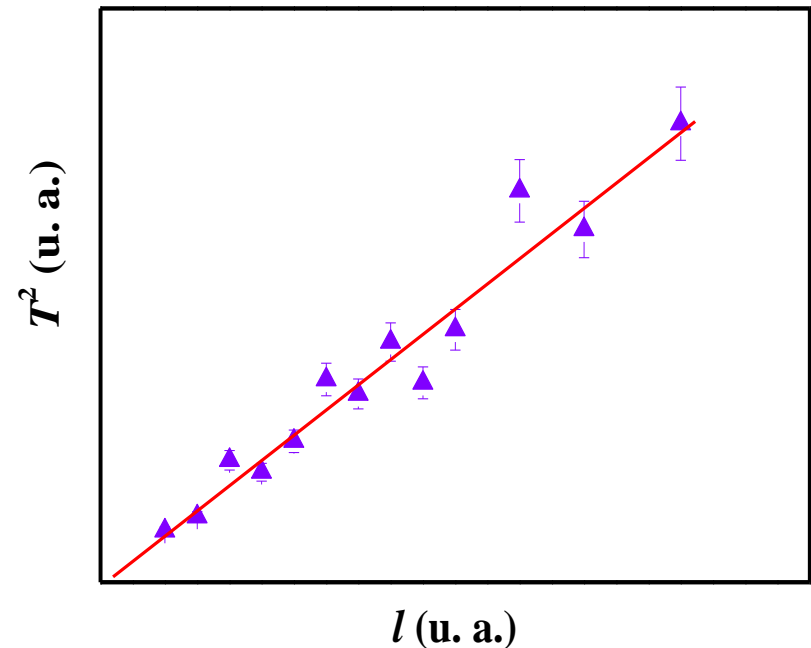
¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Diagram illustrating the linearization of the pendulum period equation:

Top equation: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{l}$. The variables T and \sqrt{l} are circled in red, with y and x labels above them respectively. A blue arrow points from the original equation to this one.

Bottom equation: $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$. The variables T^2 and l are circled in red, with y and x labels below them respectively. The coefficient $\frac{4\pi^2}{g}$ is circled in blue, with a blue arrow pointing to the word "Pendiente" (Slope) below it. A blue arrow points from the original equation to this one.



ACTIVIDAD 1

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD A PARTIR DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES

- Se hará a partir de la relación de T^2 y l . **Propago!!**
- 1- Obtenga los errores absolutos de T^2 y l (ΔT^2 y Δl)
- 2- Obtenga los errores relativos de T^2 y l ($\varepsilon_{r_{T^2}}$ y ε_{r_l}) y compárelos

	A(X1)	B(yEr±)	C(Y1)	D(yEr±)	E(X2)	F(xEr±)	G(Y2)	H(Y2)
Long Name	L	Error L	T	Error T	T^2	Error T^2	Er L	Er T^2
Units	cm	cm	s	s	s^2	s^2		
Comments								
1	20	0,1	18,49	0,12	341,8801	4,4376	0,005	1
2	30	0,1	36	0,12	1296	8,64	0,00333	1
3	40	0,1	38,44	0,12	1477,6336	9,2256	0,0025	1
4	50	0,1	53,29	0,12	2839,8241	12,7896	0,002	1
5	80	0,1	81	0,12	6561	19,44	0,00125	1

ACTIVIDAD 1

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD A PARTIR DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES

- Graficar T^2 en función de l (o l en función de T^2 dependiendo de los ε_r). Colocar con las incertezas de la variable del eje y .
- Realizar un ajuste lineal. Evaluar la calidad (r , Chi-cuadrado, residuos).
- Obtener $g = \bar{g} \pm \Delta g$ utilizando el modelo lineal del método de cuadrados mínimos

ACTIVIDAD 1

AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y ↑
↑ x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \rightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

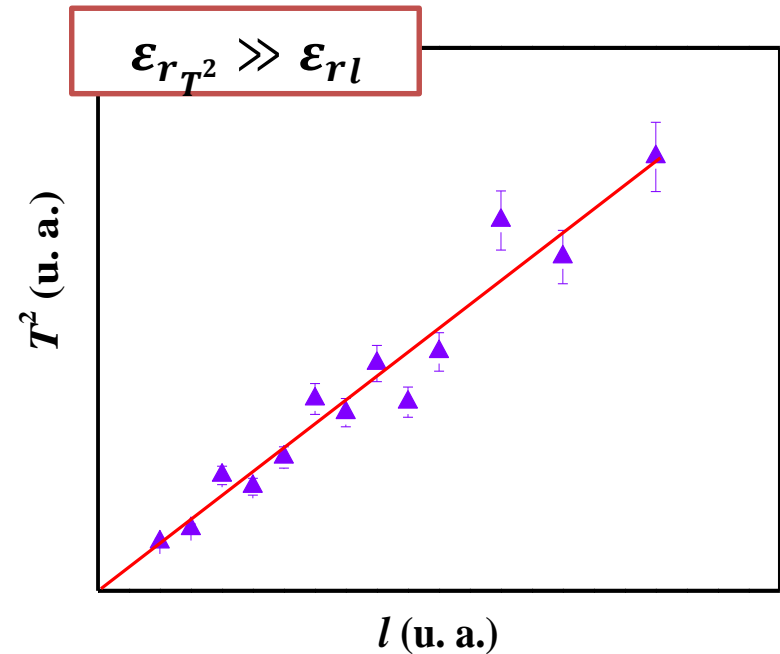
$$\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}$$

¿ Δg ?

Propago!!

$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta \pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π ?



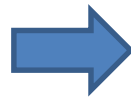
ACTIVIDAD 1

AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r_l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$



$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

The diagram shows the equation $l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$ with annotations: a red circle around l and a red circle around T^2 , both with red arrows pointing up to them labeled y and x respectively. A blue circle highlights the fraction $\frac{g}{4\pi^2}$, with a blue arrow pointing down to the slope equation below.

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \rightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿ Δg ?

Propago!!

ACTIVIDAD 2

DETERMINAR LA RELACIÓN ENTRE T' Y T UTILIZANDO UN MODELO LINEAL Y EL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS PONDERADO

Realice el experimento sólo 1 integrante del grupo

- Medir para una única longitud: T' para $n = 1, 2, \dots, 15$
- Graficar T' en función de n colocar las incertezas de T' ($\Delta T'$)
- Realizar un **ajuste lineal**.
Evaluar los **residuos**.



	A(X)	B(Y)	C(yEr±)
Long Name	n	T'	DT'
Units		s	s
Comments			
1	1	1,81	0,045
2	2	3,61	0,045
3	3	5,42	0,045
4	4	7,22	0,045
5	5	9,03	0,045
6	6	10,83	0,045
7	7	12,64	0,045

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin

(ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

Exp. 4

The screenshot displays the OriginPro 8.5 software interface. The 'Analysis' menu is open, with 'Fitting' selected. The 'Fitting' submenu is also open, showing options like 'Linear Fit', 'Fit Linear with X Error', and 'Polynomial Fit...'. A dialog box titled '1 <Last used>' is open, with 'Open Dialog...' selected. In the background, a graph window titled 'Péndulo relación T vs L' is visible, showing a scatter plot of data points with error bars. The x-axis is labeled 'l (u. a.)'. The status bar at the bottom indicates 'FitLinear: linear regression on XY data' and 'AU : ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]1/4 Radian'.

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

Exp. 4

The image shows a screenshot of the OriginPro 8.5 software interface. The main window displays a graph titled "4 - Copy of Graph1" with a plot of data points (purple triangles) and a linear fit line. The x-axis is labeled "l (u. a.)" and the y-axis is labeled "T (u. a.)".

In the foreground, the "Linear Fit" dialog box is open, showing the "Fit Options" section. The "Errors as Weight" dropdown menu is set to "Instrumental" and is circled in red. Below this, the text "Pondera las incertezas" is written. Other options in the dialog include "Fix Intercept", "Fix Slope", "Use Reduced Chi-Sqr", and "Apparent Fit". The "Quantities to Compute" section is also visible, with "Fit Parameters" checked.

The status bar at the bottom of the window shows "AU : ON", "Dark Colors & Light Grids", "4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14]", "1:[Graph4]114", and "Radian".

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

The image shows a screenshot of the OriginPro 8.5 software interface. The main window displays a graph titled "4 - Copy of Graph1" with a scatter plot of data points and error bars. The x-axis is labeled "l (u. a.)" and the y-axis is labeled "T (u. a.)". A "Linear Fit" dialog box is open in the foreground, showing various options for the fit. The "Fit Statistics" section is expanded, and several checkboxes are checked, with two of them circled in red: "Reduced Chi-Sqr" and "Pearson's r".

Linear Fit Dialog Box Options:

- UCL:
- Confidence Level for Parameters(%): 95
- t-Value:
- Prob>|t|:
- CI Half-Width:
- Fit Statistics:
- Number of Points:
- Degrees of Freedom:
- Reduced Chi-Sqr: (circled in red)
- R Value:
- Residual Sum of Squares:
- Pearson's r: (circled in red)
- R-Square(COD):
- Adj. R-Square:
- Root-MSE (SD):
- Norm of Residuals:

Graph Labels:

- X-axis: l (u. a.)
- Y-axis: T (u. a.)

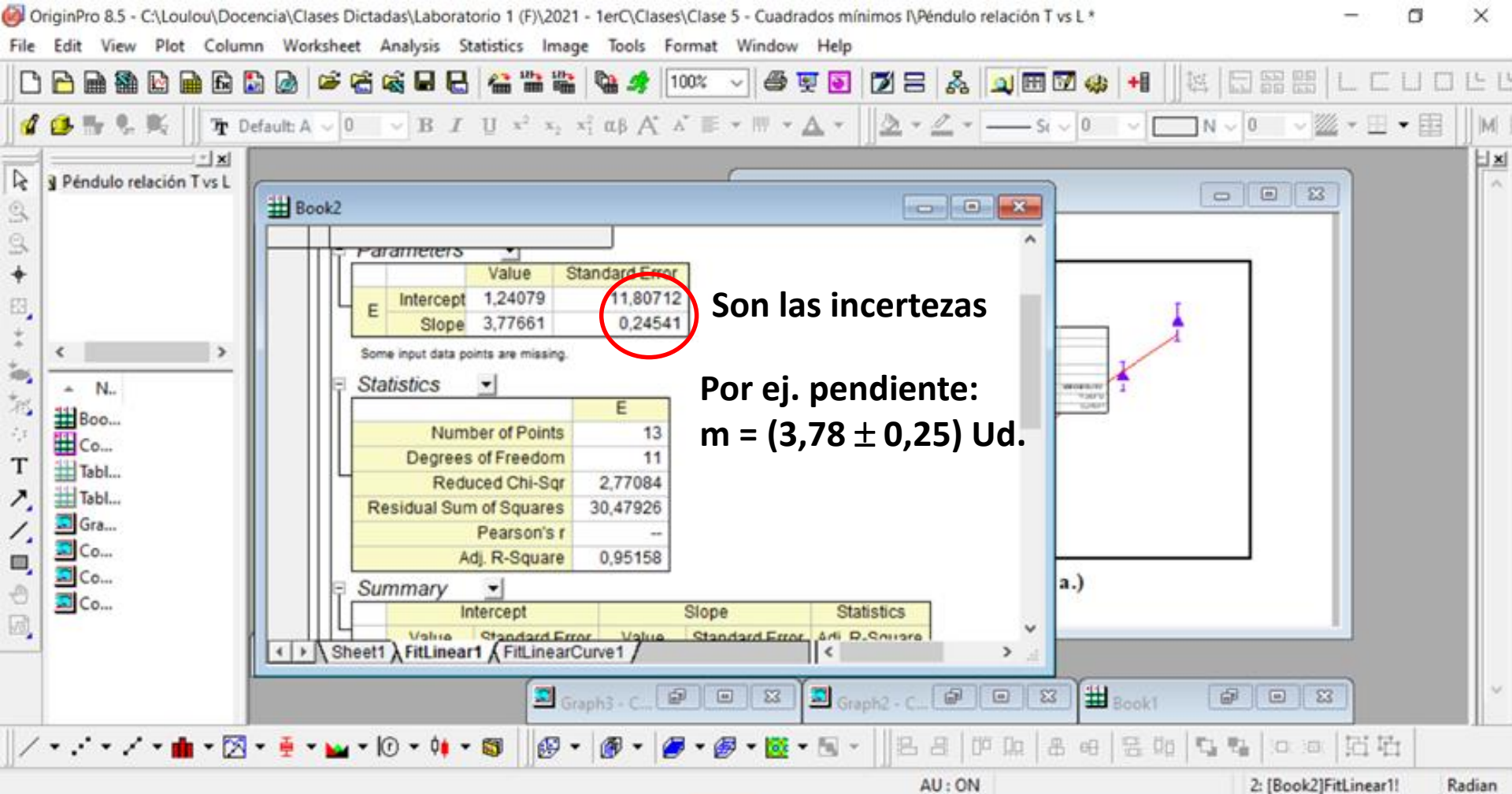
Bottom Status Bar:

- For Help, press F1
- AU: ON
- Dark Colors & Light Grids
- 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14]
- 1:[Graph4]14
- Radian

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

Exp. 4

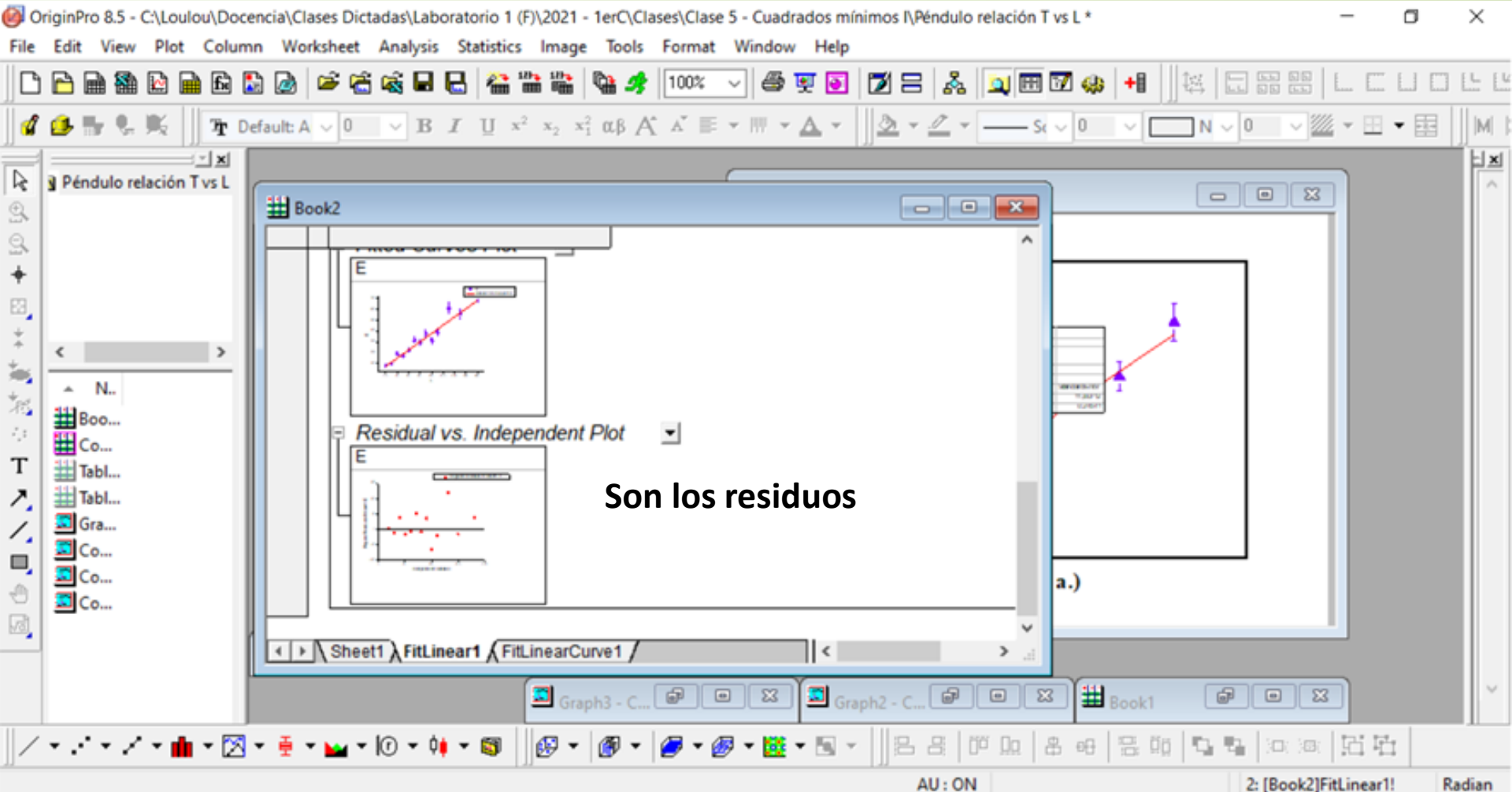


Ayuda para realizar el ajuste en el Origin

(ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

Exp. 4



Son los residuos

a.)