Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2021

DEPENDENCIA ENTRE DOS MAGNITUDES
CUADRADOS MÍNIMOS II

Lucía Famá - Mauro Silberberg

Valeria Pais, Ayelén Santos

Universidad de Buenos Aires - Exactas

departamento de física

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la dependencia entre dos magnitudes y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - Modelado

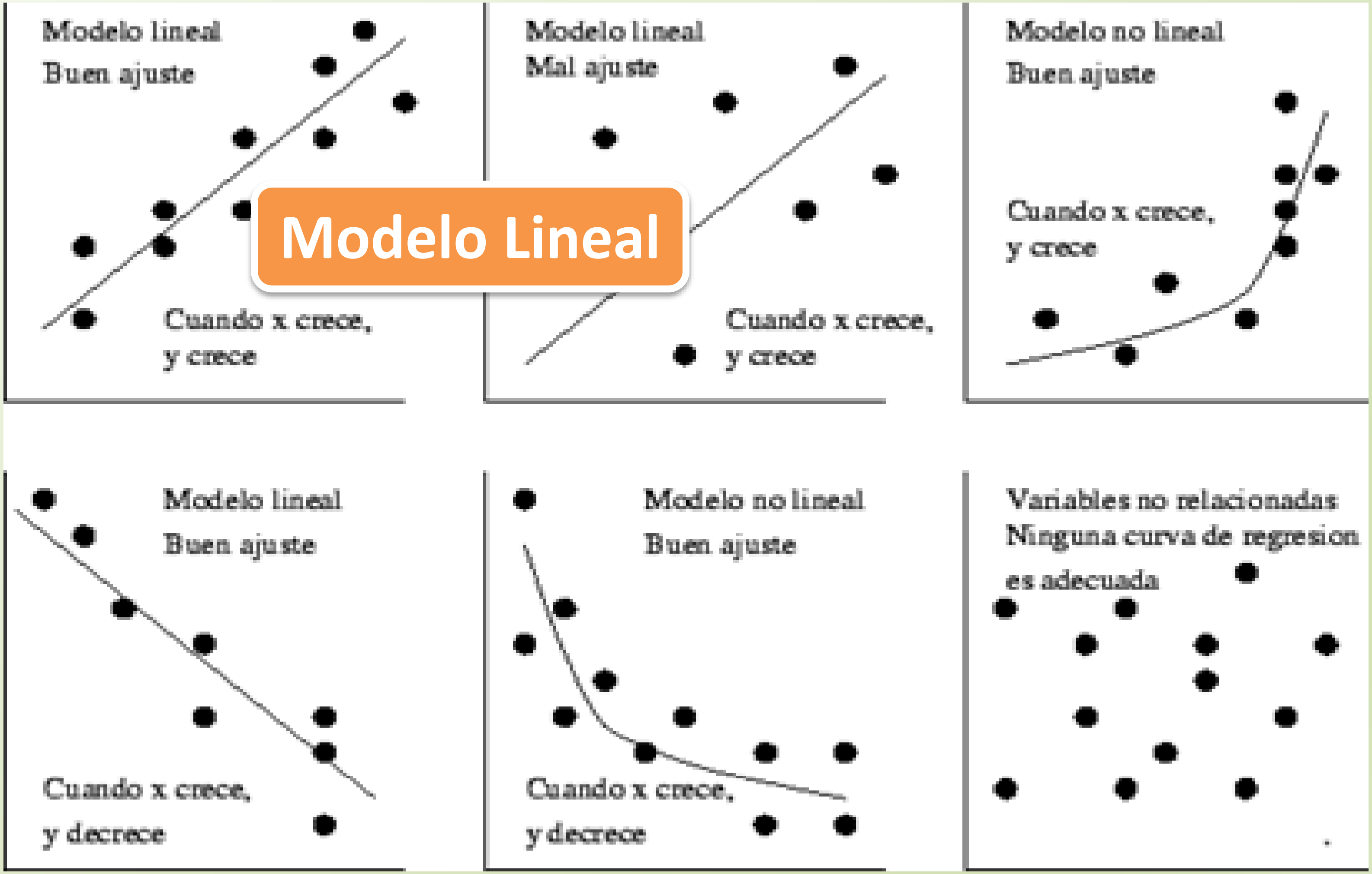
Objetivo de la práctica de hoy y …. Cómo resolverlo

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD (g) A PARTIR DE LOS DATOS DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES

CUADRADOS MÍNIMOS

Cuadrados Mínimos

Relación entre dos medidas … caso más sencillo



ACTIVIDAD 2

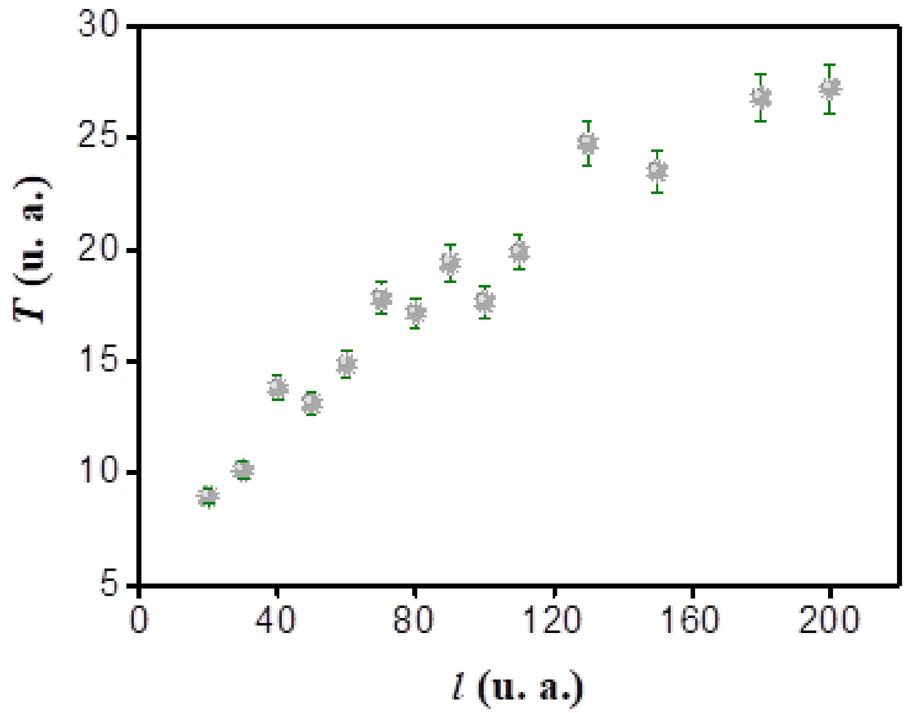
Hoy

EXPERIMENTO

Exp. 4

OBTENER EL VALOR DE g A PARTIR DE UN MODELO LINEAL

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



T NO ESTÁ RELACIONADO LINEALMENTE CON l

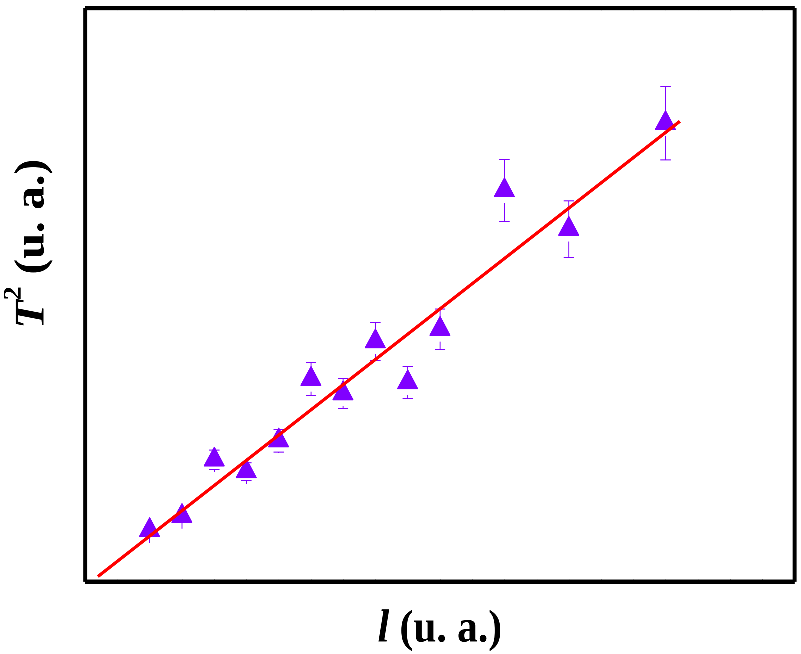
¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

- Linealizar la función de T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\overset{y}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\overset{x}{\sqrt{l}}$$

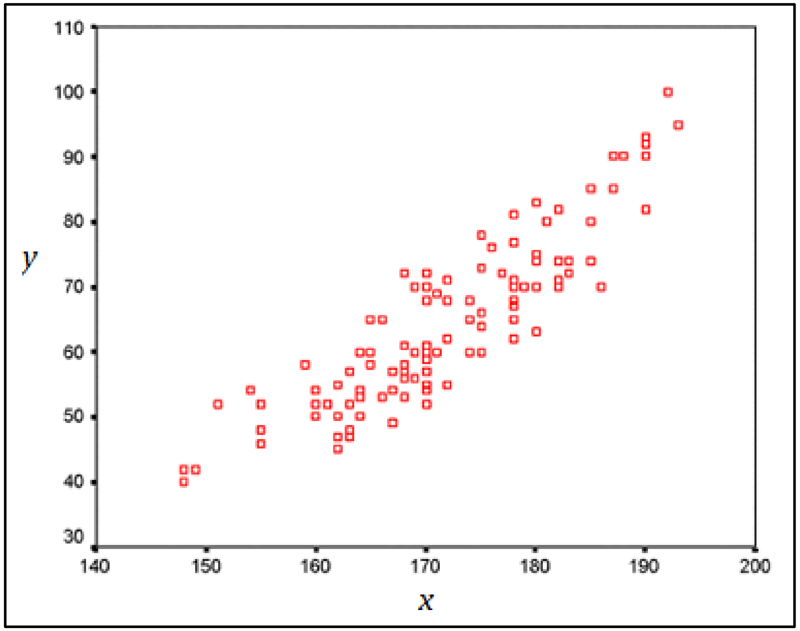
$$\underset{y}{T^2} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\underset{x}{l}$$



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

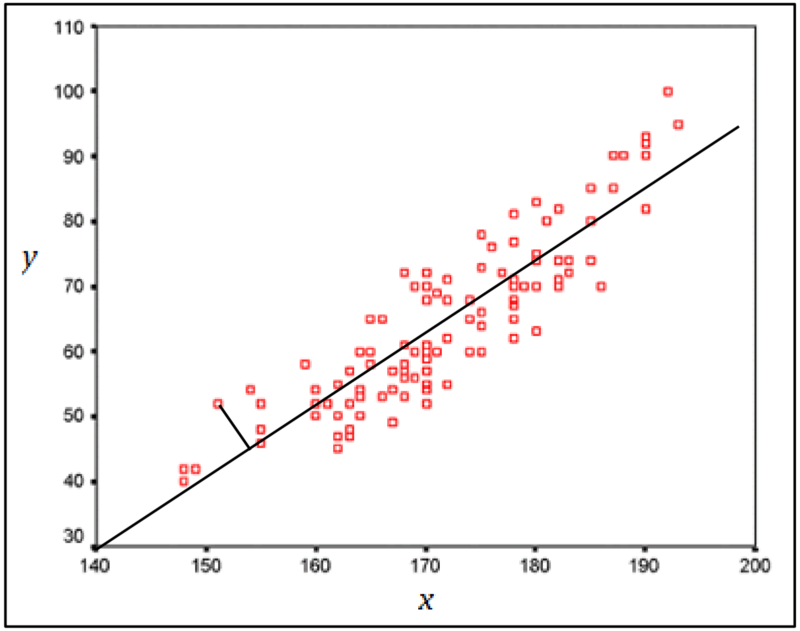
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos experimentales

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

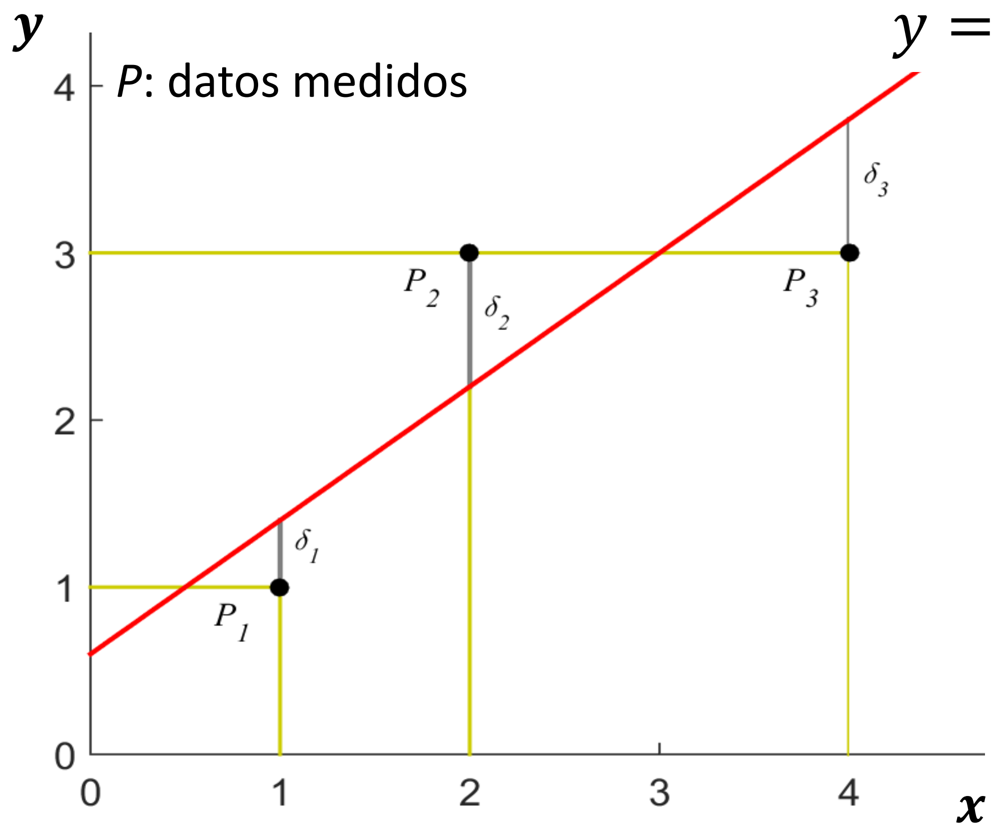
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso aún más sencillo

$$y = f(x) = mx + b$$



Hipótesis:

$$\varepsilon_r y \gg \varepsilon_r x$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|$$

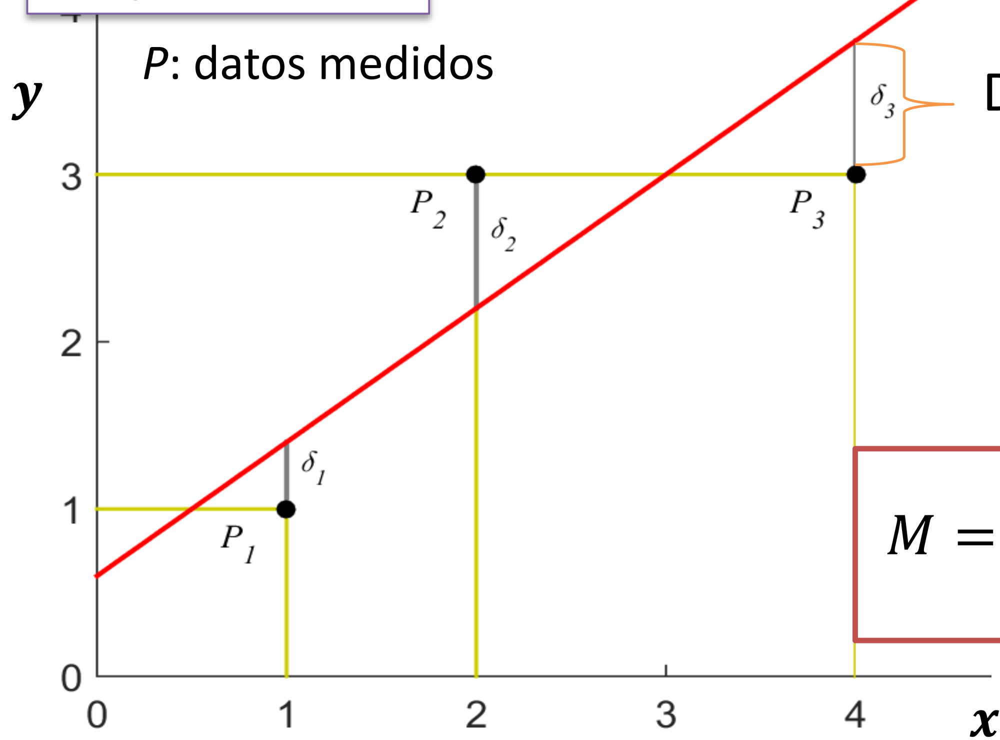
Caso 1

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en y tienen igual incerteza

$$\varepsilon_r y \gg \varepsilon_r x$$

$$y = f(x) = mx + b$$



Distancia ➡ Residuos (δ_i)

$$\delta_i{}^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 + \ \ldots$$

$$M = \sum \delta_i{}^2 = \sum [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

Caso 1

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m,b) = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$M(m,b) = \sum_{1}^{N} {y_i}^2 + m^2 \sum_{1}^{N} {x_i}^2 + Nb^2 + 2mb \sum_{1}^{N} x_i - 2m \sum_{1}^{N} x_i y_i - 2b \sum_{1}^{N} y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \qquad 2m \sum_{1}^{N} {x_i}^2 + 2b \sum_{1}^{N} x_i - 2 \sum_{1}^{N} x_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0 \qquad 2Nb + 2m \sum_{1}^{N} x_i - 2 \sum_{1}^{N} y_i = 0$$

$$\boxed{m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Caso 1

Ejemplo

Encontremos la recta que mejor aproxima a los siguientes datos:

$$\boxed{y = mx + b}$$

$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

	x	y	x.y	x^2
	7	2	14	49
	1	9	9	1
	10	2	20	100
	5	5	25	25
	4	7	28	16
	3	11	33	9
	13	2	26	169
	10	5	50	100
	2	14	28	4
Σ	55	57	233	473

$$m = \frac{\Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}} = \frac{233 - \frac{55 \cdot 57}{9}}{473 - \frac{(55)^2}{9}} \simeq -0{,}84$$

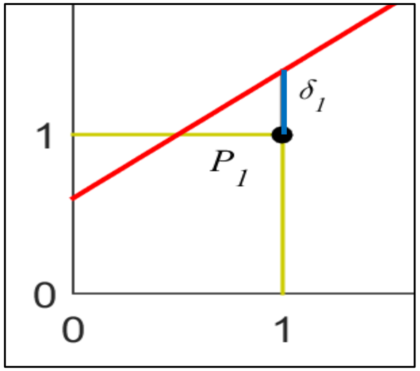
$$b = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{\Sigma y}{n} - (-0{,}84)\frac{\Sigma x}{n} = \frac{57}{9} + 0{,}84 \cdot \frac{55}{9} = 11{,}4$$

Caso 1

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$\boxed{S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \qquad \boxed{S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \quad \to \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

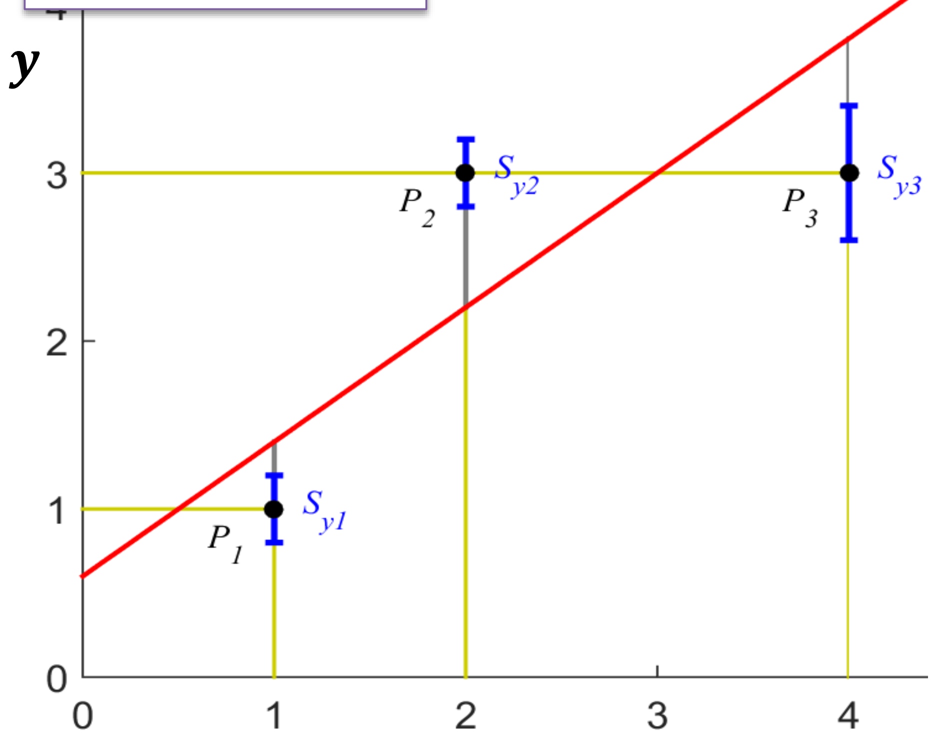
Caso 2

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando los datos en y tienen diferente incerteza

$\boldsymbol{\varepsilon_r y \gg \varepsilon_r x}$

$$y = f(x) = mx + b$$



Hipótesis: Considera a las medidas más precisas las más relevantes

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos Normalizados

Caso 2

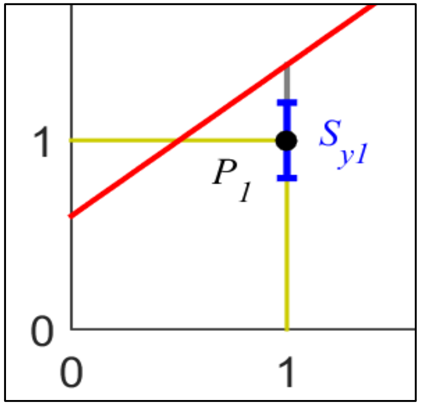
Cuadrados mínimos **Ponderados**

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i (x_i y_i) - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i \sum w_i {x_i}^2 - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$${S_m}^2 = \frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i {x_i}^2)^2}$$

$${S_b}^2 = \frac{\sum w_i {x_i}^2}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i {x_i}^2)^2}$$



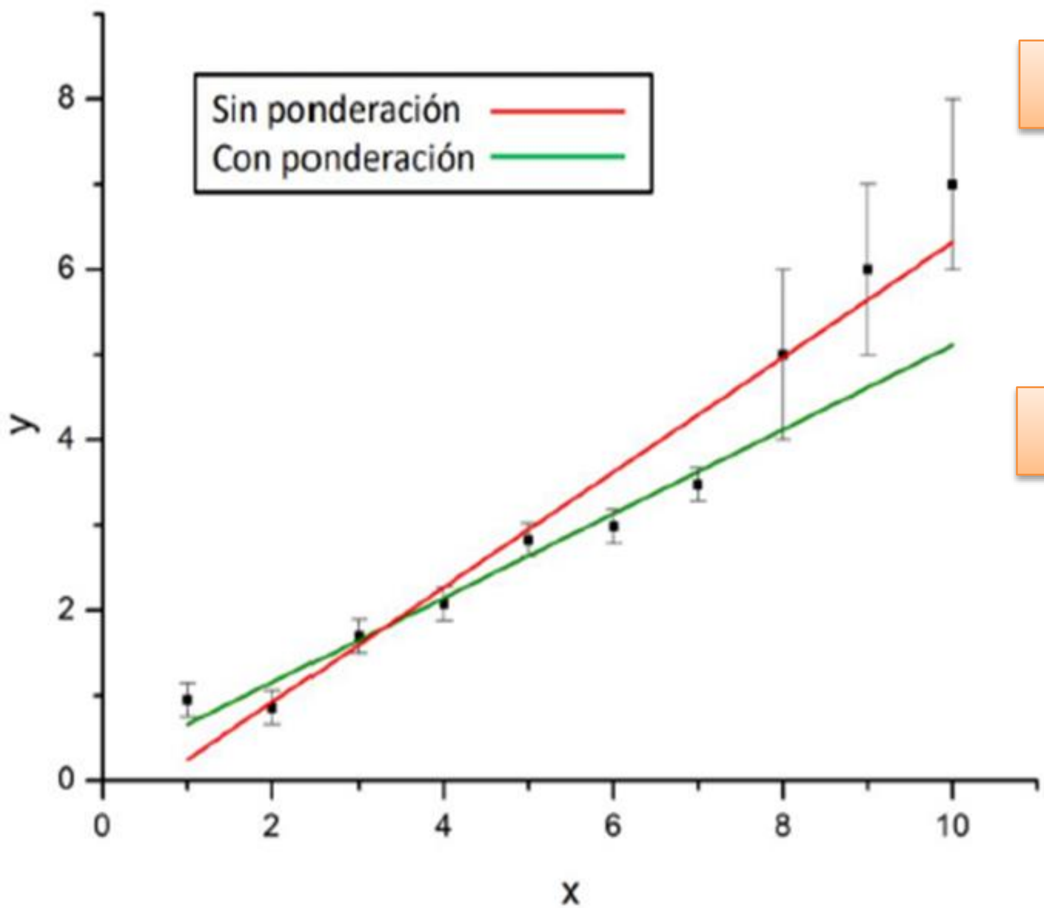
$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (m x_i + b)}{S_i}\right]^2$$

Definiendo:

$$w_i = \frac{1}{(S_{yi})^2}$$

CON Ponderación vs SIN Ponderación

Al ponderar se da relevancia a las medidas con menor incerteza



CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

SIN

$$M = \sum [y_i - (mx_i + b)]^2$$

¿Qué podemos discutir sobre un ajuste?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson	r	$\Rightarrow$	Da idea de “cuan bueno” fue el ajuste
Chi-cuadrado reducido	χ_v^2	$\Rightarrow$	Da idea de “compatibilidad” del modelo con los datos
Residuos		$\Rightarrow$	Da idea de la “forma” de distribución de los datos respecto de la recta

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$\boxed{r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}}$$

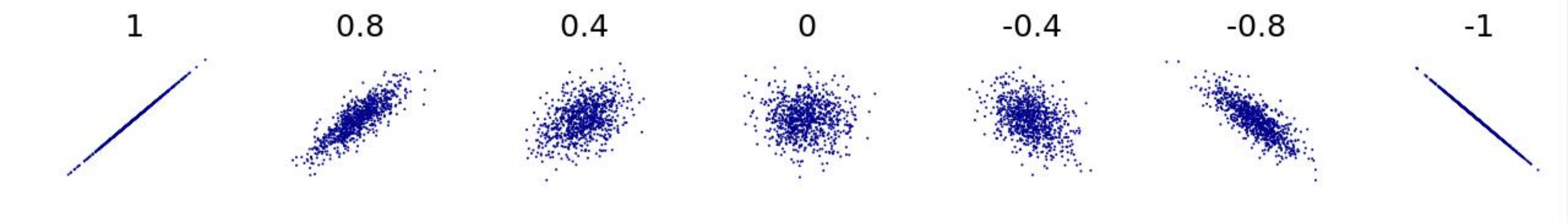
$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{-1 \leq r \leq 1}$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$



Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
178	69.8	8.25	0.41	68.06	0.17	3.38
160	67.5	-9.75	-1.89	95.06	3.57	18.43
183	81	13.25	11.61	175.56	134.79	153.83
152	60.8	-17.75	-8.59	315.06	73.79	152.47
168	70.2	-1.75	0.81	3.06	0.66	-1.42
178	75.6	8.25	6.21	68.06	38.56	51.23
188	80.1	18.25	10.71	333.06	114.70	195.46
165	72	-4.75	2.61	22.56	6.81	-12.40
157	59.4	-12.75	-9.99	162.56	99.80	127.37
170	65.3	0.25	-4.09	0.06	16.73	-1.02
165	62.6	-4.75	-6.79	22.56	46.10	32.25
173	68.4	3.25	-0.99	10.56	0.98	-3.22
2037	832.7			1276.25	536.67	716.38

$$\bar{x} = \frac{2037}{12} = 169.75$$

$$\bar{y} = \frac{832.7}{12} = 69.39$$

$$S_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N}$$

$$S_{xy} = \frac{716.38}{12} = 59.70$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1276.25}{12}}$$

$$S_x = \sqrt{106.35} = 10.31$$

$$S_y = \sqrt{\frac{536.67}{12}} = 6.69$$

$\boxed{S_{xy} = 59.70}$ $\boxed{S_x = 10.31}$ $\boxed{S_y = 6.69}$

Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

$\boxed{S_{xy} = 59.70}$ $\boxed{S_x = 10.31}$ $\boxed{S_y = 6.69}$

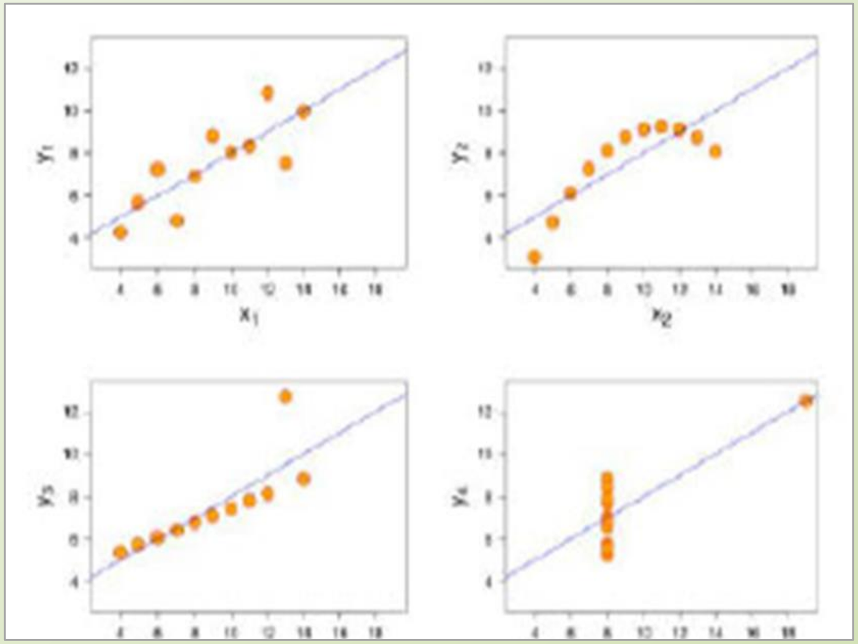
$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{59.70}{(10.31)(6.69)} = \frac{59.70}{68.97} = 0.87$$

Coeficiente de determinación

$$r^2 = 0.87^2 = 0.7569 = 75.69\%$$

Pero **OJO!!!!**

Estos cuatro ejemplos tienen igual valor de $|r|$

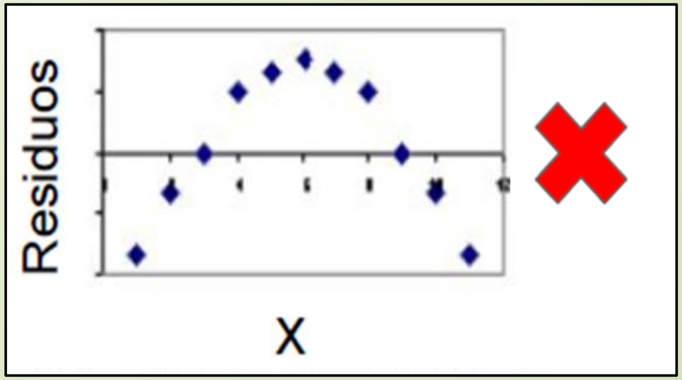


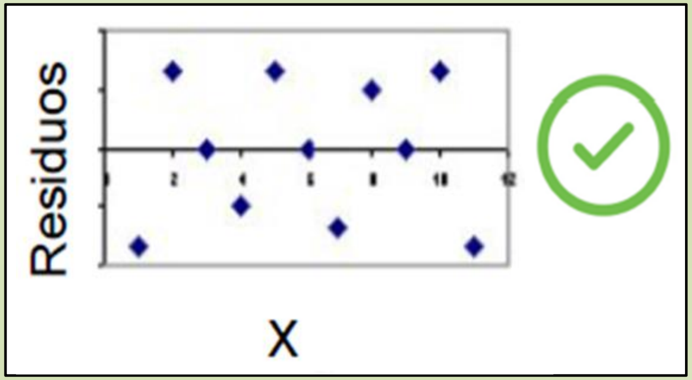
Necesito evaluar algo Más!!

Evaluar los residuos!!!

Residuos

En esos casos sucedió que la distribución de los datos alrededor de la recta no era normal





Chi-cuadrado

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

Chi-cuadrado reducido

$$\boldsymbol{\chi^2} \xrightarrow{\text{normalizado}} \boldsymbol{\chi_v^2}$$

$$\boldsymbol{\chi_v^2} \begin{cases} \boldsymbol{\chi_v^2 \sim 1} \\ \boldsymbol{\chi_v^2 \ll 1} \\ \boldsymbol{\chi_v^2 \gg 1} \end{cases}$$

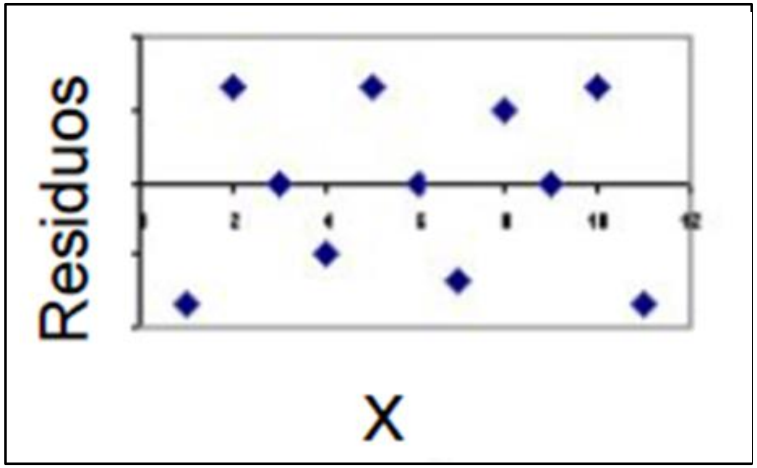
¿Qué esperamos?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson r → $|r| \sim 1$

Chi-cuadrado reducido χ_v^2 → $\chi_v^2 \sim 1$

Residuos →



EXPERIMENTO

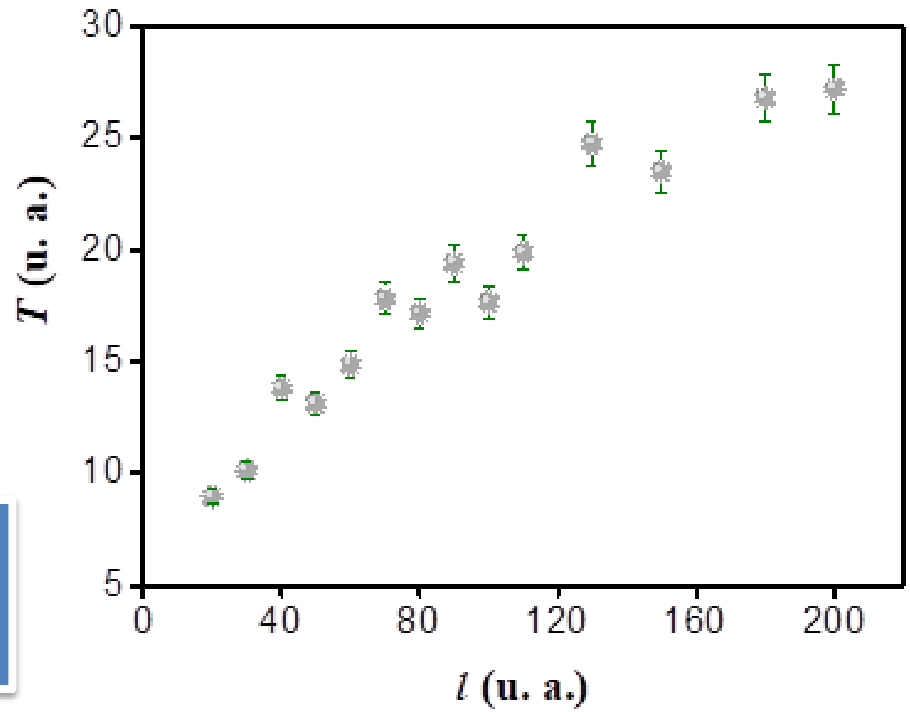
Exp. 4

ACTIVIDAD 1

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD (g) A PARTIR DE LOS DATOS DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES – MODELO LINEAL

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

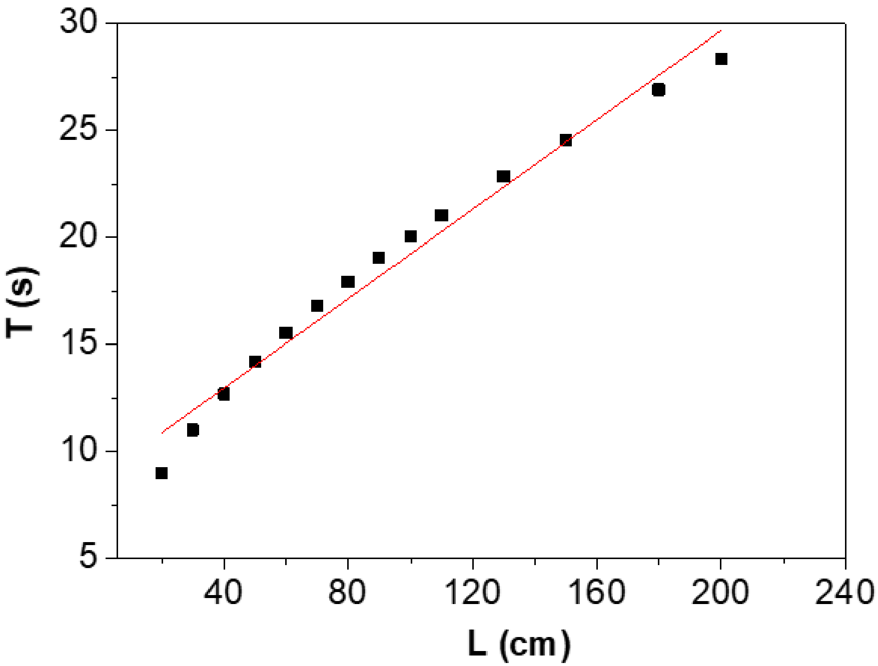
T NO ESTÁ RELACIONADO LINEALMENTE CON l



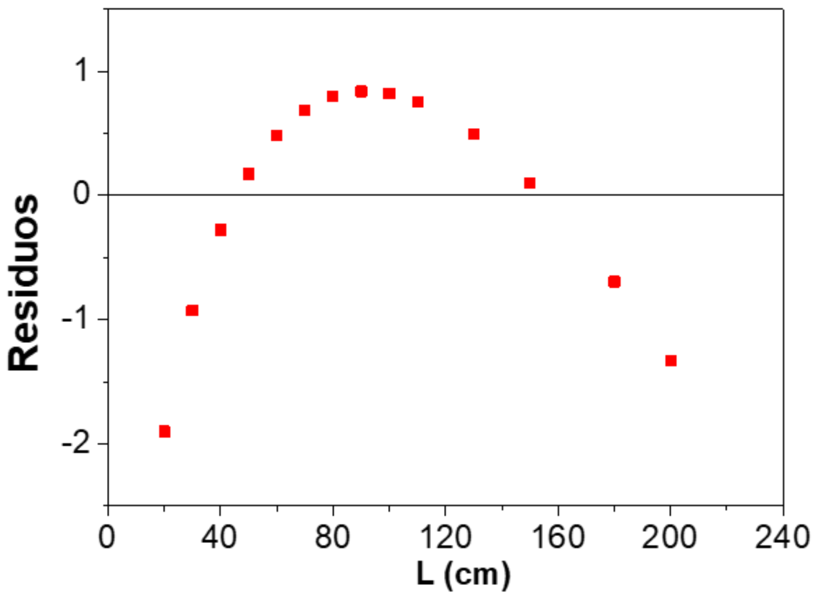
EXPERIMENTO

Exp. 4

Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l!!



$$r = 0,988$$



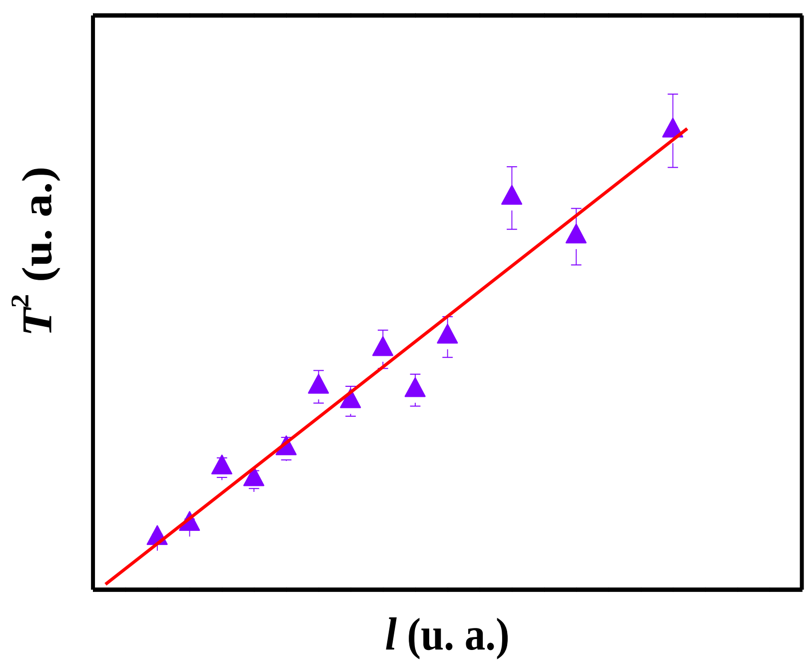
¿Podría obtener g a partir de los datos del período de un Péndulo y la longitud usando un Modelo lineal?

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\overset{y}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\overset{x}{\sqrt{l}}$$

$$\underset{y}{T^2} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\underset{x}{l}$$



ACTIVIDAD 1

EXPERIMENTO

Exp. 4

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD A PARTIR DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES

- Se hará a partir de la relación de T^2 y l.

Propago!!

1- Obtenga los errores absolutos de T^2 y l (ΔT^2 y Δl)

2- Obtenga los errores relativos de T^2 y l ($\varepsilon_{r_{T^2}}$ y ε_{rl}) y compárelos

Book2

	A(X1)	B(yEr±)	C(Y1)	D(yEr±)	E(X2)	F(xEr±)	G(Y2)	H(Y2)
Long Name	L	Error L	T	Error T	T^2	Error T^2	Er L	Er T^2
Units	cm	cm	s	s	s^2	s^2		
Comments								
1	20	0,1	18,49	0,12	341,8801	4,4376	0,005	1
2	30	0,1	36	0,12	1296	8,64	0,00333	1
3	40	0,1	38,44	0,12	1477,6336	9,2256	0,0025	1
4	50	0,1	53,29	0,12	2839,8241	12,7896	0,002	1
5	80	0,1	81	0,12	6561	19,44	0,00125	1

Sheet1

ACTIVIDAD 1

DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD A PARTIR DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO PARA DISTINTAS LONGITUDES

- Graficar T^2 en función de l (o l en función de T^2 dependiendo de los ε_r). Colocar con las incertezas de la variable del eje *y*.
- Realizar un ajuste lineal. Evaluar la calidad (r, Chi-cuadrado, residuos).
- Obtener $\boldsymbol{g} = \overline{\boldsymbol{g}} \pm \Delta \boldsymbol{g}$ utilizando el modelo lineal del método de cuadrados mínimos

EXPERIMENTO

Exp. 4

ACTIVIDAD 1

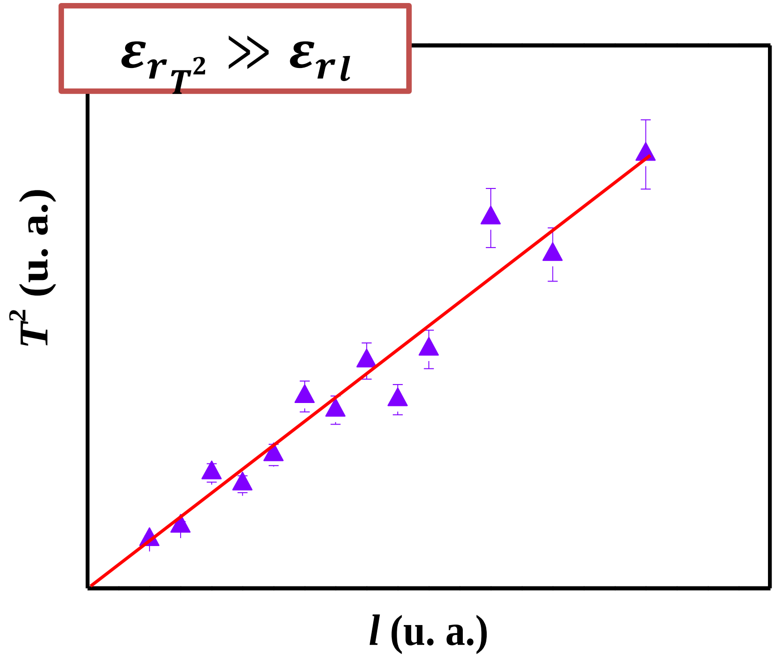
AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y x

Pendiente $m = \overline{m} + \Delta m$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$



$$\boxed{\overline{g} = \frac{4\pi^2}{\overline{m}}}$$

¿Δg?

Propago!!

$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta \pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π?

EXPERIMENTO

Exp. 4

ACTIVIDAD 1

AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r\ l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

$$\underset{y}{l} = \frac{g}{4\pi^2} \underset{x}{T^2}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \longrightarrow g = 4\pi^2 m$$

$¿\,\Delta g?$

Propago!!

ACTIVIDAD 2

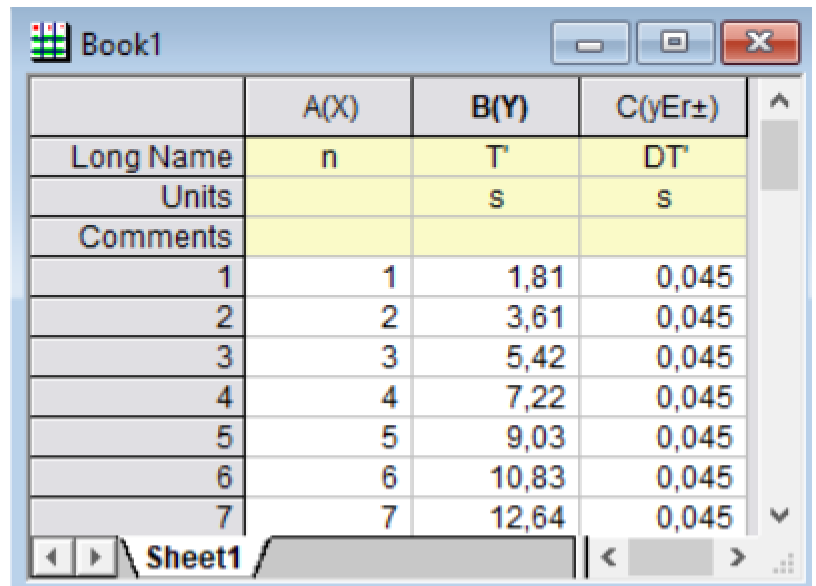
EXPERIMENTO

Exp. 5

DETERMINAR LA RELACIÓN ENTRE T' Y T UTILIZANDO UN MODELO LINEAL Y EL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS PONDERADO

Realice el experimento sólo 1 integrante del grupo

- Medir para una única longitud: $\boldsymbol{T'}$ para $\boldsymbol{n}$ = 1, 2, ..., 15
- Graficar $\boldsymbol{T'}$ **en función de** $\boldsymbol{n}$ colocar las incertezas de T' $(\Delta T')$
- Realizar un **ajuste lineal**. Evaluar los **residuos**.



Book1

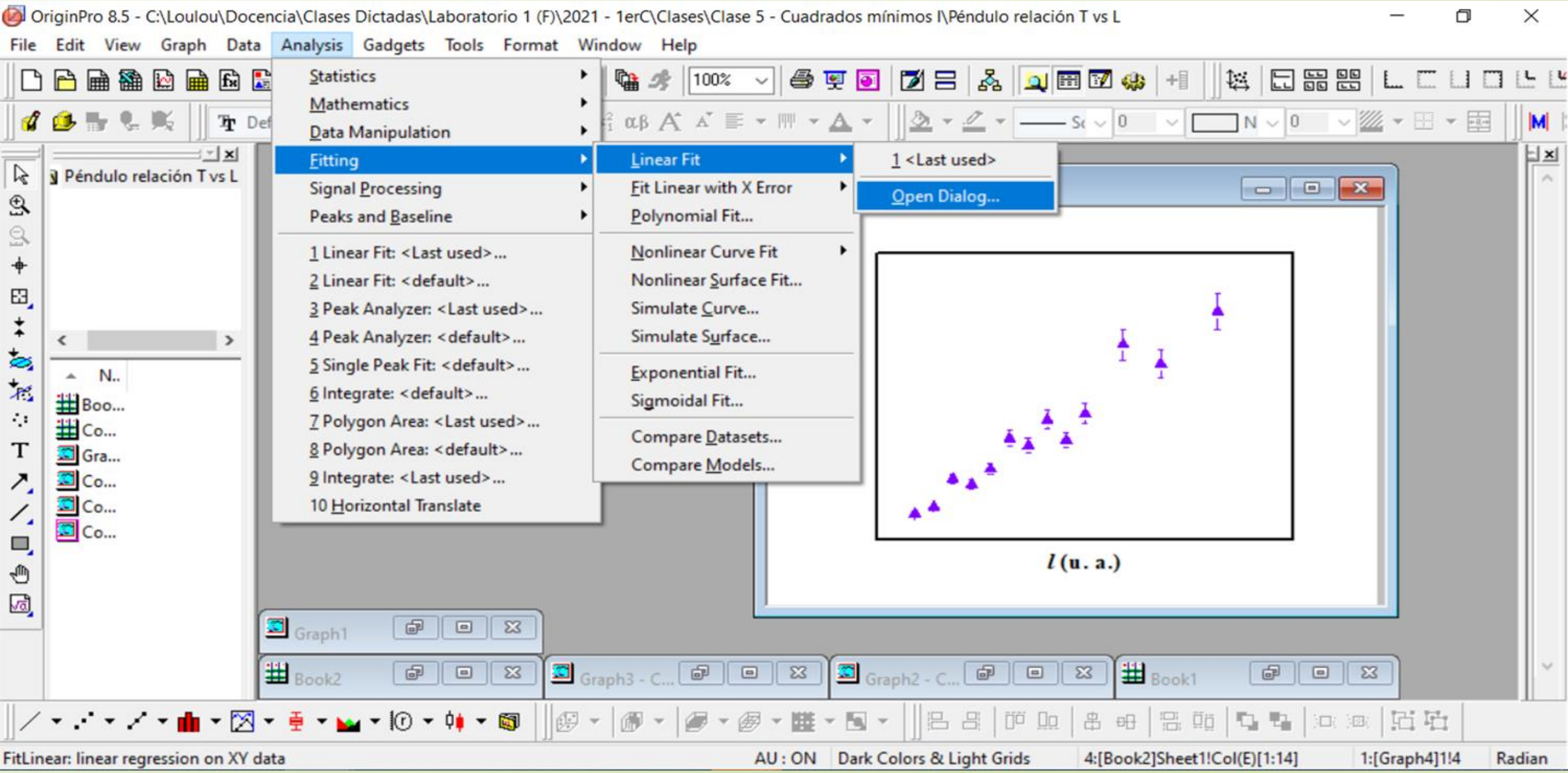
	A(X)	B(Y)	C(yEr±)
Long Name	n	T'	DT'
Units		s	s
Comments			
1	1	1,81	0,045
2	2	3,61	0,045
3	3	5,42	0,045
4	4	7,22	0,045
5	5	9,03	0,045
6	6	10,83	0,045
7	7	12,64	0,045

Sheet1

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

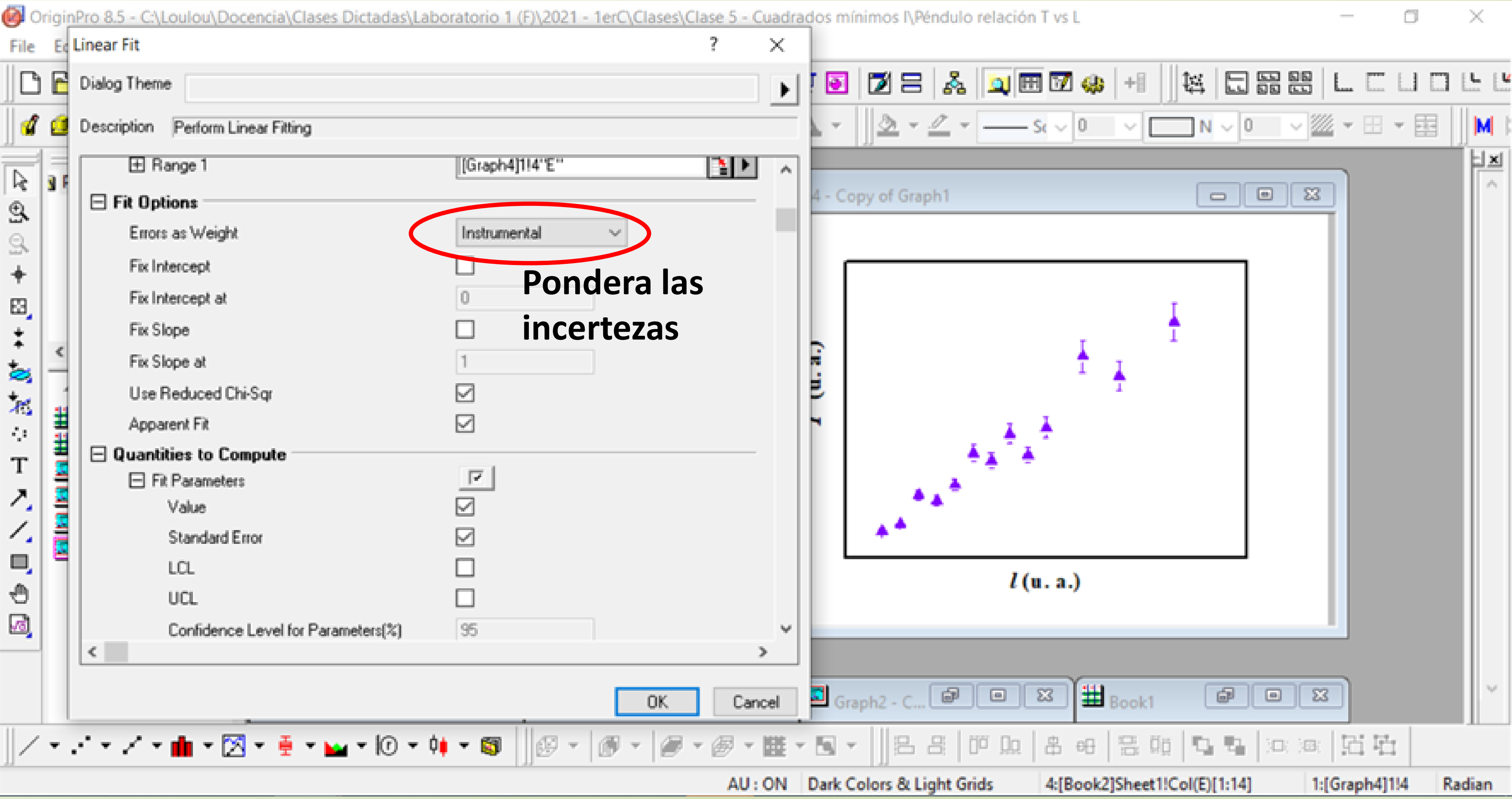
Exp. 4



Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

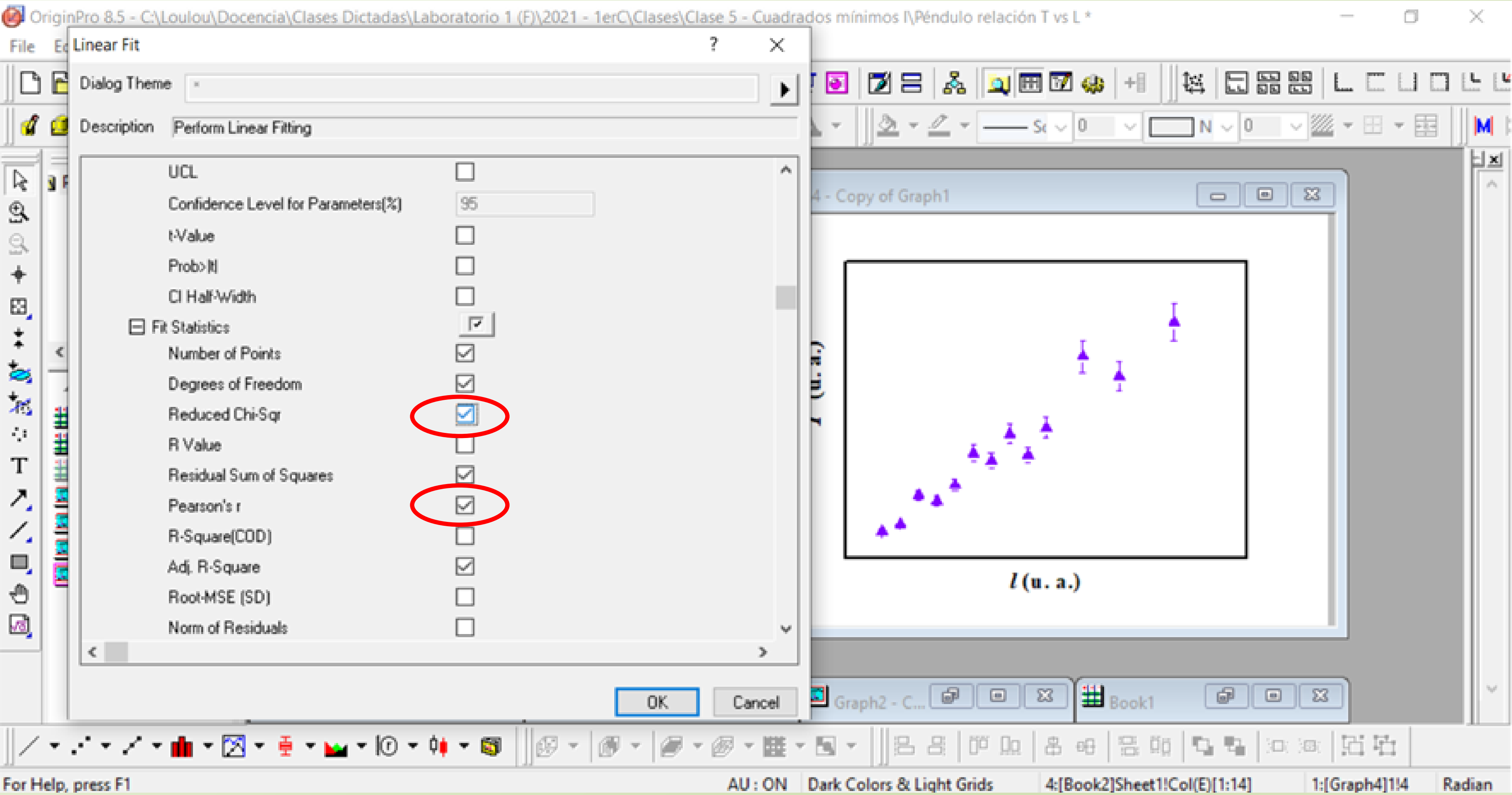
Exp. 4



Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

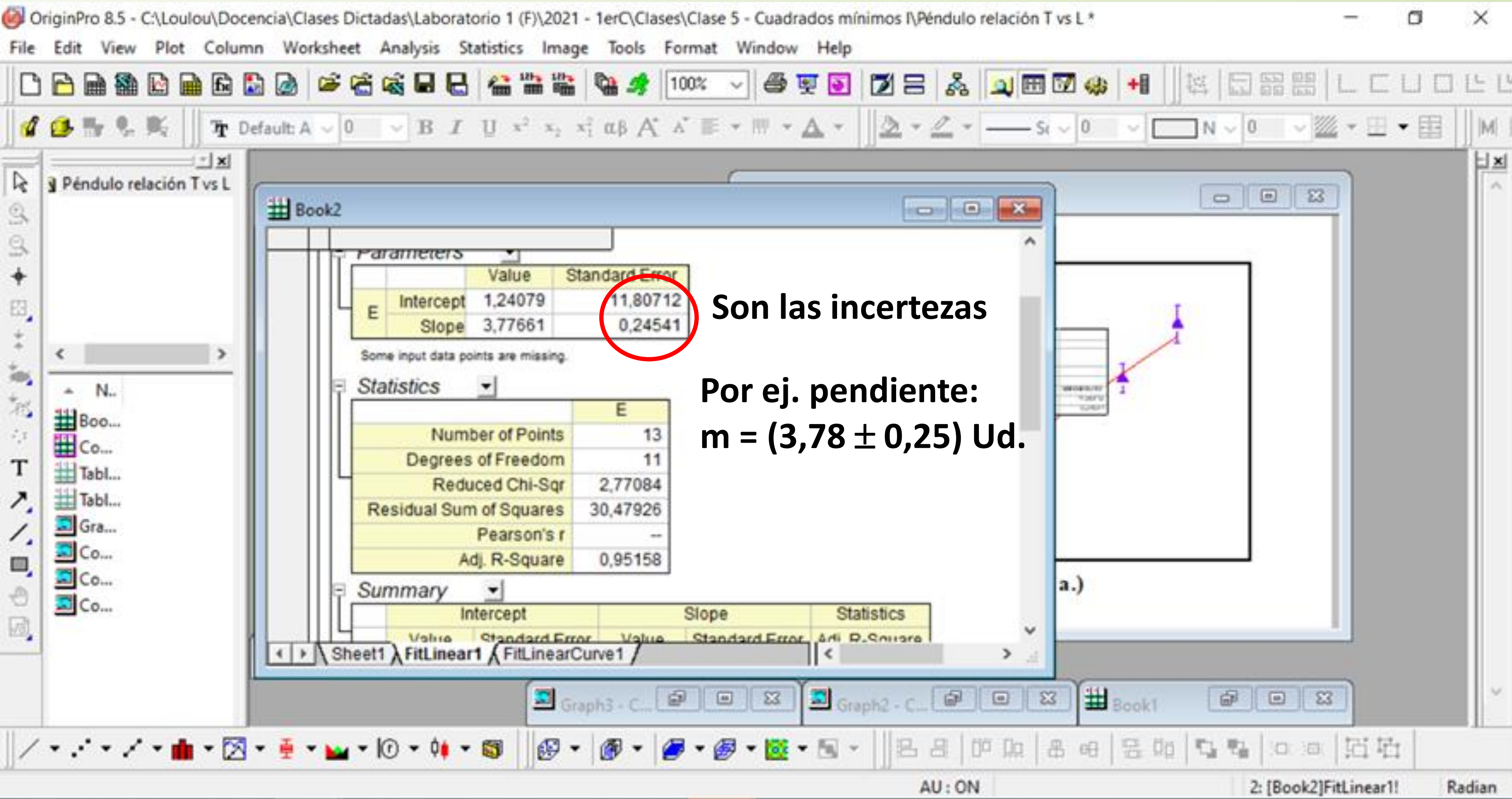
Exp. 4



Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

Exp. 4



Son las incertezas

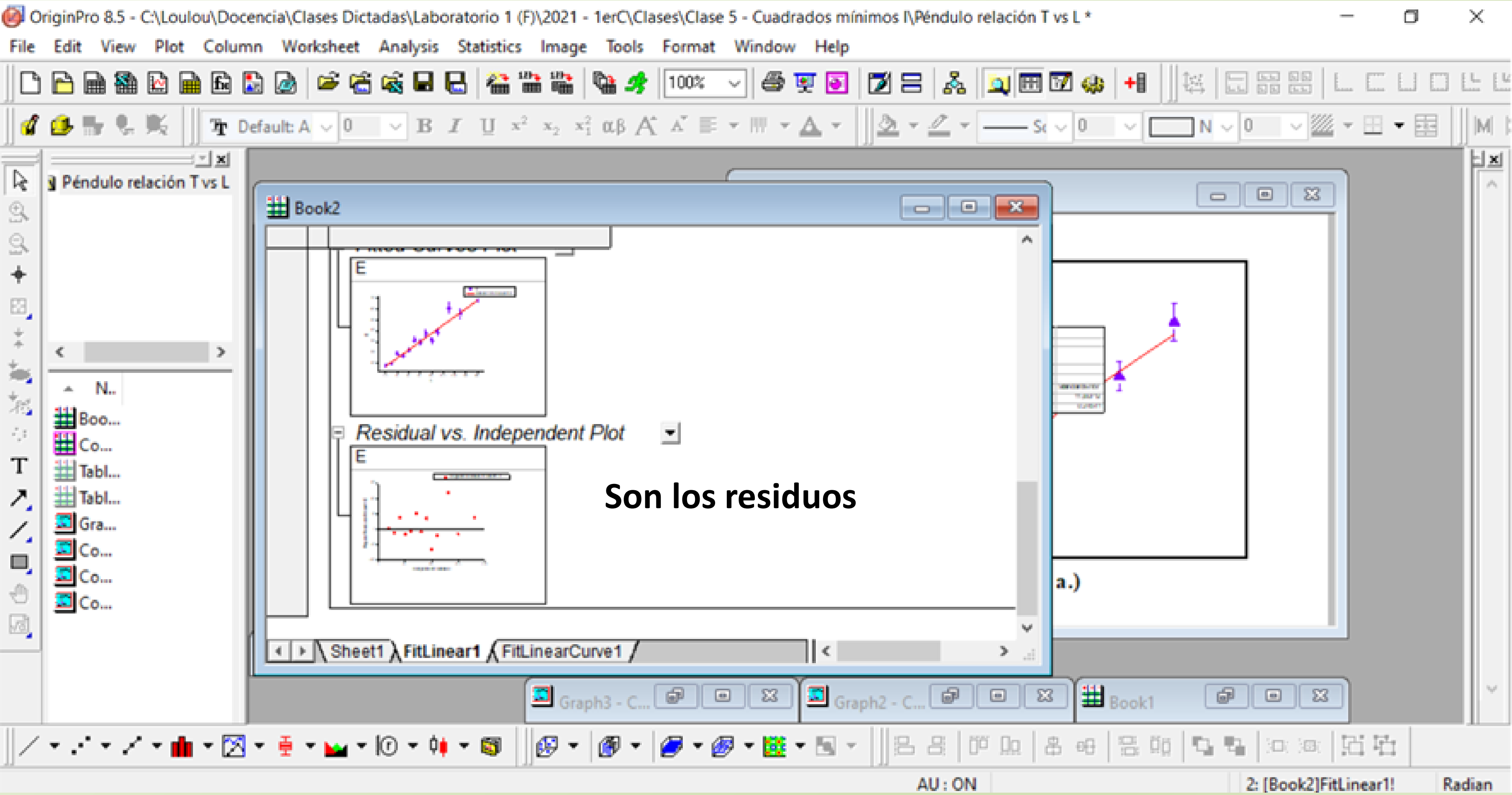
Por ej. pendiente:

m = (3,78 ± 0,25) Ud.

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)

EXPERIMENTO

Exp. 4



Son los residuos