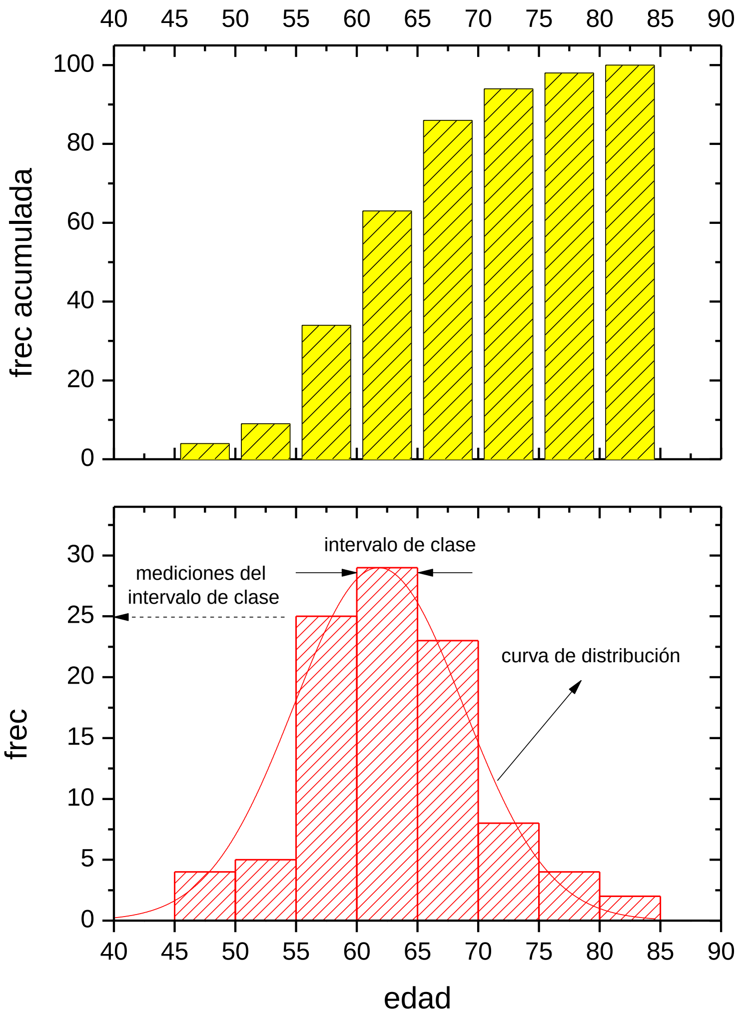
Laboratorio 1
Turno C

Clase 2

(30/03/2019)

Histograma



	N tota	Mean	Stand	Sum	Mode	Minim	Media	Maxi
A	100	61.8	7.006	6180	60	45	60	80

Muestreo de una población

Regla de Sturges

Se utiliza para estimar la cantidad de intervalos de clase un histograma (número de clases)

$$c = 1 + 3.322 \cdot \log N$$

siendo N la cantidad de datos.

	A	B	C
1	**N**	**clase**	**clase redondeado**
2	100	7,66	8
3	33	6,04	6

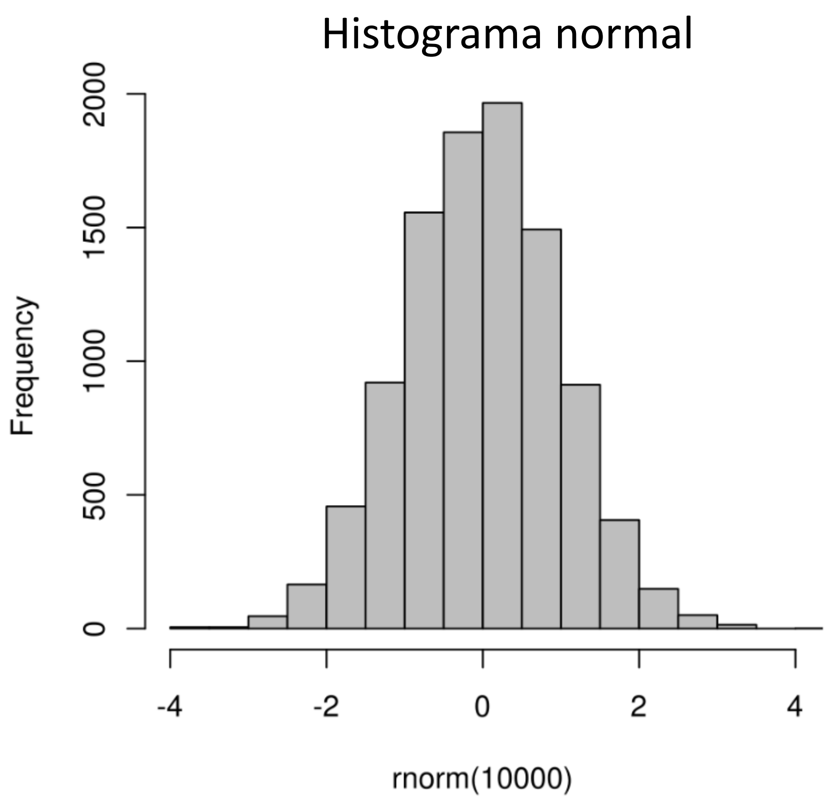
Tabla 1.1.- Componentes de la tabla de frecuencias.

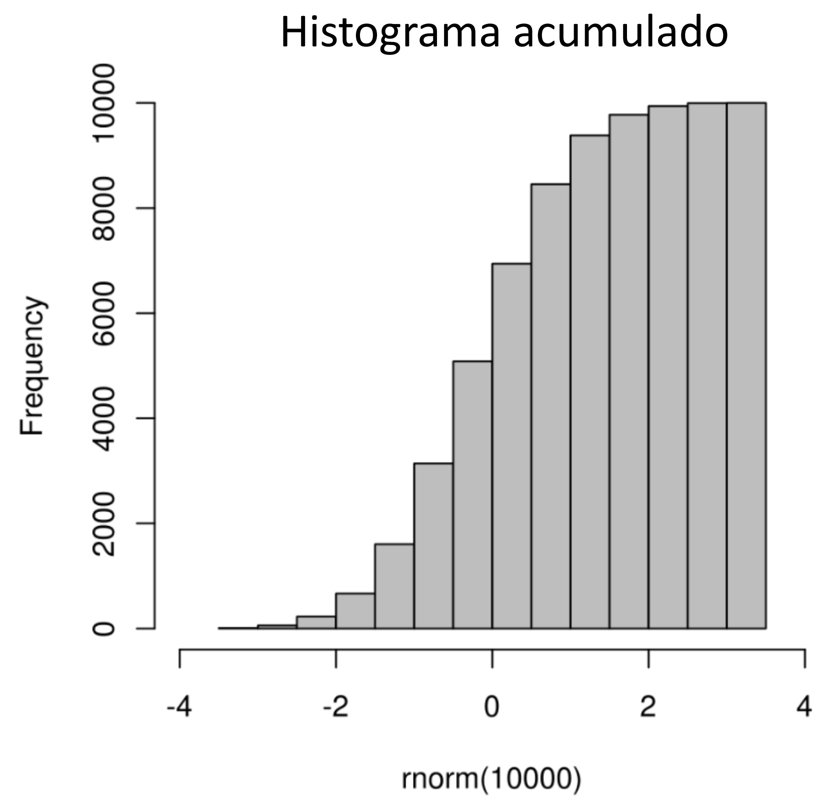
Intervalo de Clases (x_i)	Frecuencias		Frecuencias	
	Absoluta (n_i)	Acumulada (f_i)	Relativa (N_i)	Acumulada (F_i)
X1	n1	n1	f1 = n1 / n	f1
X2	n2	n1 + n2	f2 = n2 / n	f1 + f2
…	…	…	…	…
Xn-1	n_n-1	n1 + n2 +..+ n_n-1	fn-1 = n_n-1 / n	f1 + f2 +..+fn-1
Xn	**n_n**	**Σ n**	**fn = n_n / n**	**Σ f**

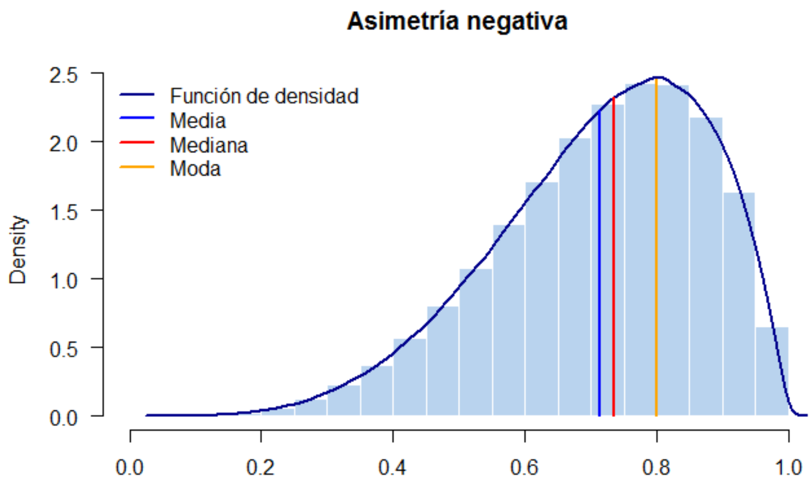
Siendo X los distintos valores que puede tomar los intervalos de clases.
Siendo n el número de veces que se repite cada valor.
Siendo f el porcentaje que la repetición de cada valor supone sobre el total

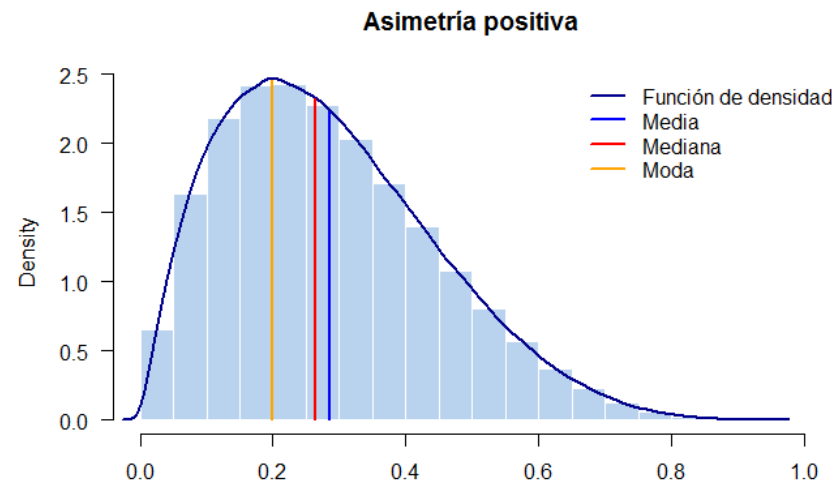
$$\underbrace{\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}}_{\text{promedio}} \qquad \underbrace{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}_{\text{varianza}} \qquad \underbrace{\sigma = \sqrt{s^2}}_{\text{Desv. estandard}}$$

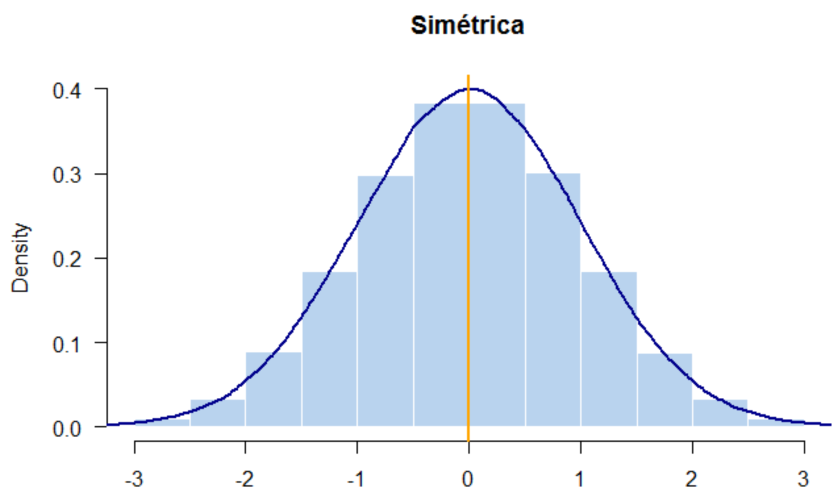
$$rango = x_N - x_1$$


Histograma normal
Frequency
0
500
1000
1500
2000
-4
-2
0
2
4
rnorm(10000)


Histograma acumulado
Frequency
0
2000
4000
6000
8000
10000
-4
-2
0
2
4
rnorm(10000)


Asimetría negativa
Density
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Función de densidad
Media
Mediana
Moda

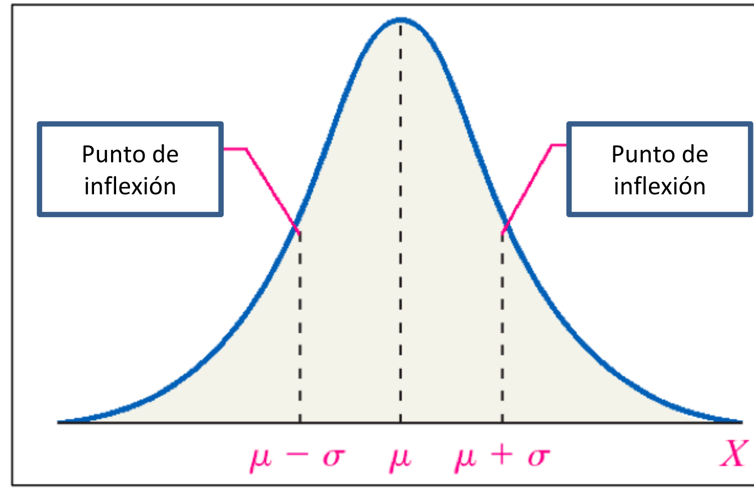

Asimetría positiva
Density
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Función de densidad
Media
Mediana
Moda


Simétrica
Density
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-3
-2
-1
0
1
2
3

Distribución Normal (Gaussiana)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$



Cambio de variables

$$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2}\sigma\sqrt{\pi} = 1$$

Distribución Normal (Gaussiana)
Momento de primer orden (valor medio)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

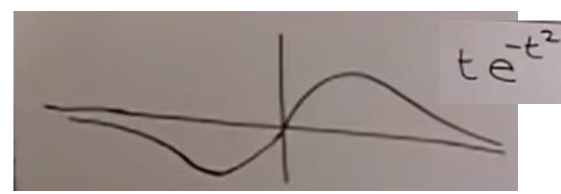
$y=x-\mu$
$dy=dx$
$x=y+\mu$

Cambio de variables

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}(y+\mu)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\mu e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy}_{\mu}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy}$$



$-A + A = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}=\mu}$$

El valor medio es el valor central de la distribución normal

Distribución Normal (Gaussiana)
Momento de segundo orden (varianza)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{varianza}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx$$

$y=x-\mu$
$dy=dx$
$x=y+\mu$

Cambio de variables

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad =\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

Utilizamos la siguiente propiedad de la integrales

$$\int u\ dv=uv-\int v\ du$$

$$u=y \qquad du=dy$$

$$dv=ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy \qquad v=-\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

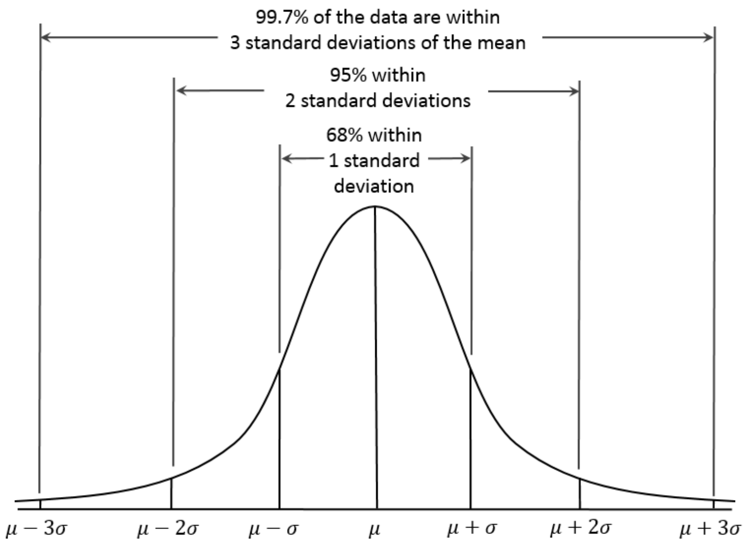
$$\text{varianza}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cancel{\left[-\sigma^2 ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}+\left[\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy\right] \longrightarrow \boxed{\text{varianza}=\sigma^2}$$

σ es la desviación standard

Order	Non-central moment	Central moment
1	μ	0
2	$\mu^2 + \sigma^2$	σ^2
3	$\mu^3 + 3\mu\sigma^2$	0
4	$\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$	$3\sigma^4$
5	$\mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4$	0
6	$\mu^6 + 15\mu^4\sigma^2 + 45\mu^2\sigma^4 + 15\sigma^6$	$15\sigma^6$
7	$\mu^7 + 21\mu^5\sigma^2 + 105\mu^3\sigma^4 + 105\mu\sigma^6$	0
8	$\mu^8 + 28\mu^6\sigma^2 + 210\mu^4\sigma^4 + 420\mu^2\sigma^6 + 105\sigma^8$	$105\sigma^8$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

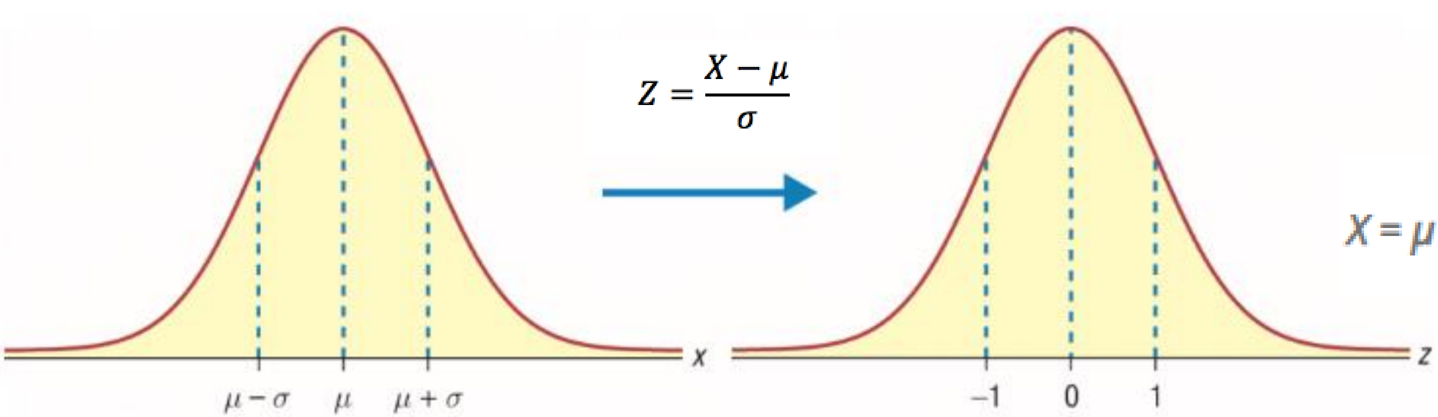
$$g(x) = Ae^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\omega^2}}$$



Ancho a mitad de altura

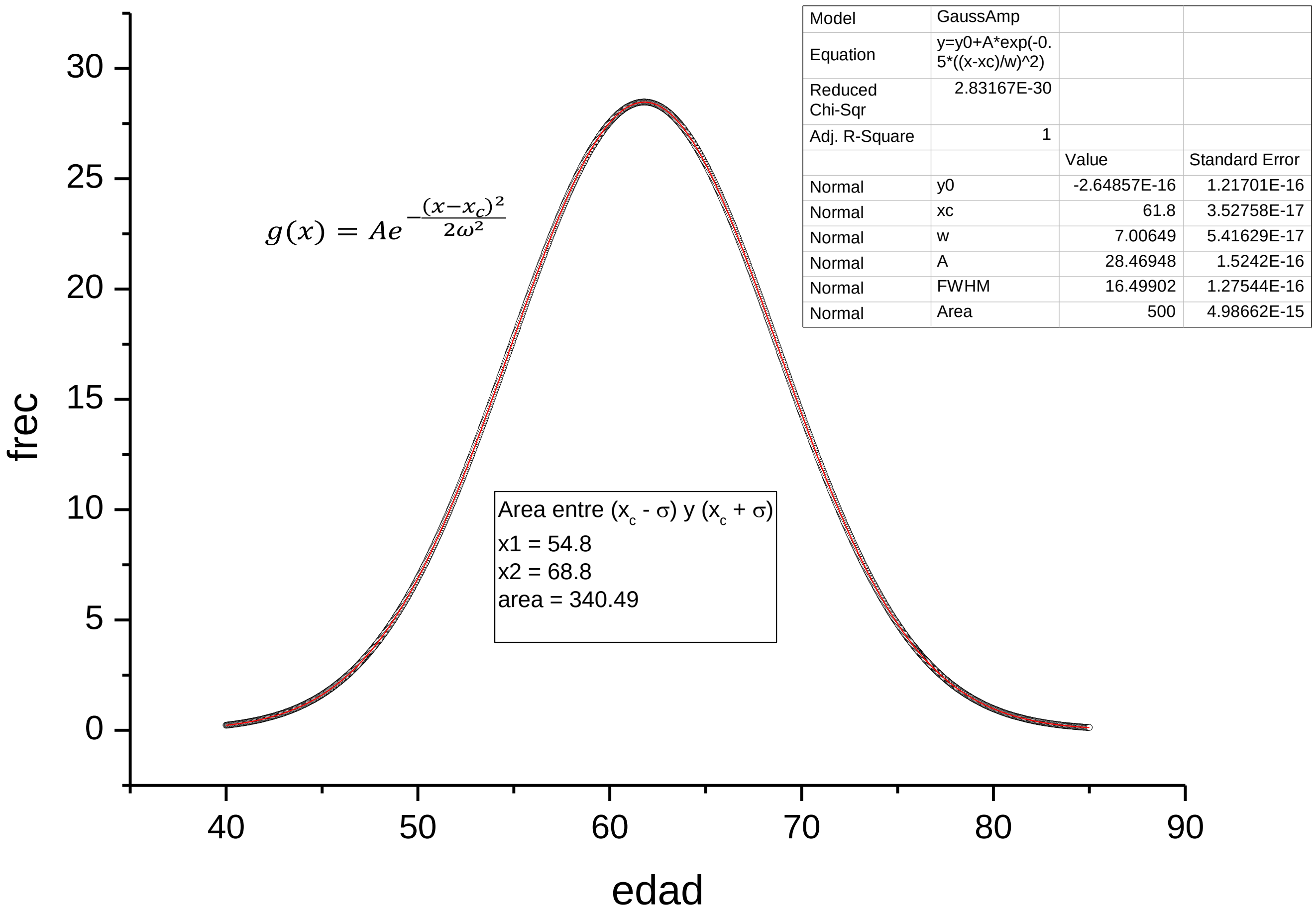
$w = 2.35\sigma$

$$N(\mu,\sigma) \xrightarrow{z-transformation} N(0,1)$$



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$X = \mu \longrightarrow Z = (\mu - \mu)/\sigma = 0,$



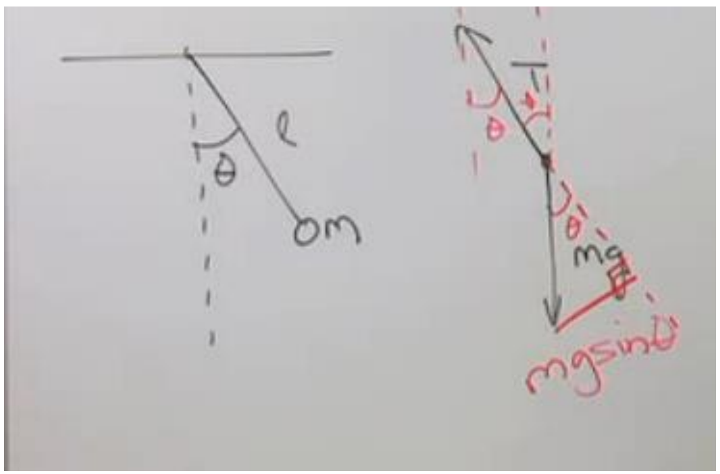
Model	GaussAmp		
Equation	y=y0+A*exp(-0.5*((x-xc)/w)^2)		
Reduced Chi-Sqr	2.83167E-30		
Adj. R-Square	1		
		Value	Standard Error
Normal	y0	-2.64857E-16	1.21701E-16
Normal	xc	61.8	3.52758E-17
Normal	w	7.00649	5.41629E-17
Normal	A	28.46948	1.5242E-16
Normal	FWHM	16.49902	1.27544E-16
Normal	Area	500	4.98662E-15

Ecuación de movimiento del péndulo simple (balance de fuerzas)

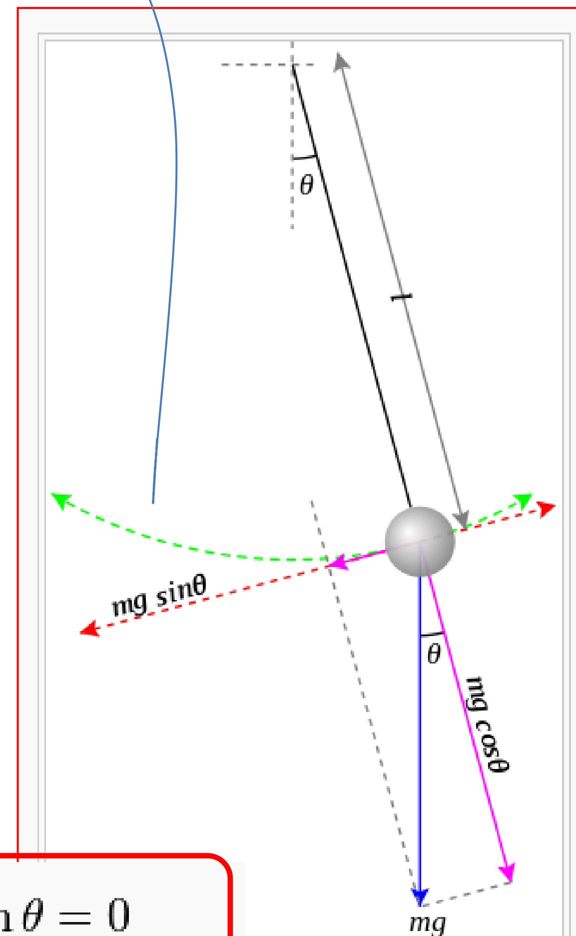
¿Qué fuerzas actúan ?

La trayectoria de la masa describe un arco de círculo de radio *l.*

La dirección de la velocidad instantanea de la masa es tangente al arco de la trayectoria.



$$s = \ell\theta$$
$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Si consideramos la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

$$F = -mg\sin\theta = ma$$
$$a = -g\sin\theta$$

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

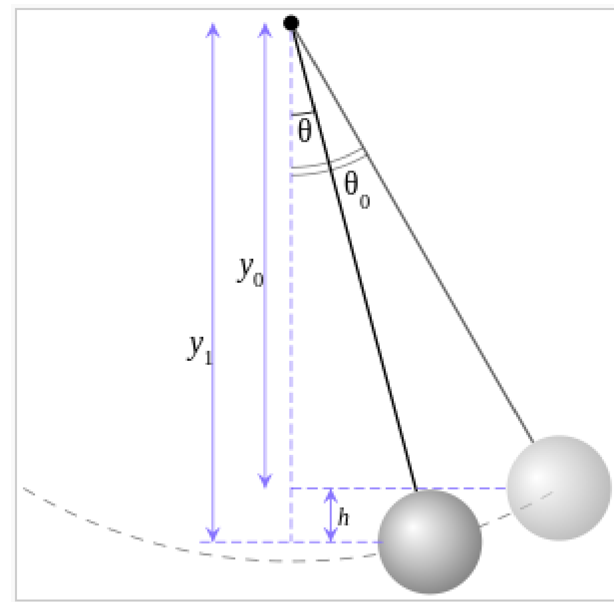
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Ecuación de movimiento del péndulo simple (considración energética)

$$\Delta U = mgh$$ Energía potencial

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$ Energía cinética

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$



Recordemos la longitud del arco recorrido

$$s = \ell\theta$$
$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$

Reemplazando en la ec.(1)

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ell}\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Si la amplitud inicial es θ_0 $\Rightarrow$ $y_0 = \ell\cos\theta_0$

analogamente $y_1 = \ell\cos\theta$

$$h = \ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \qquad (3)$$

Reemplazando la ec. (3) en la ec.(2) $\Rightarrow$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \qquad (4)$$

Si derivamos la ec. (3) respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Encontramos la ec .obtenida a través del análisis de fuerzas aplicadas

$\theta \ll 1.$ $\longrightarrow$ $\sin\theta \approx \theta.$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Ecuación del oscilador armónico

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) \qquad \theta_0 \ll 1.$$

El período To es el tiempo para realizar una oscilación

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \theta_0 \ll 1$$

¿Qué sucede cuando tenemos una amplitud inicial arbitraria ?

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

Podemos integrar sobre un ciclo completo

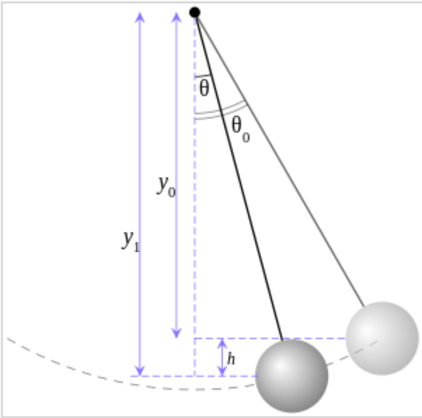
$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0),$$

o dos veces sobre medio ciclo

$$T = 2t\left(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0\right)$$

o cuatro veces sobre ¼ de ciclo

$$T = 4t\left(\theta_0 \to 0\right)$$



$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta.$$

Si θo se acerca al vertical la integral diverge

$$\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}F\left(\theta_0, \csc\frac{\theta_0}{2}\right)\csc\frac{\theta_0}{2}$$

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}\,du\,.$$

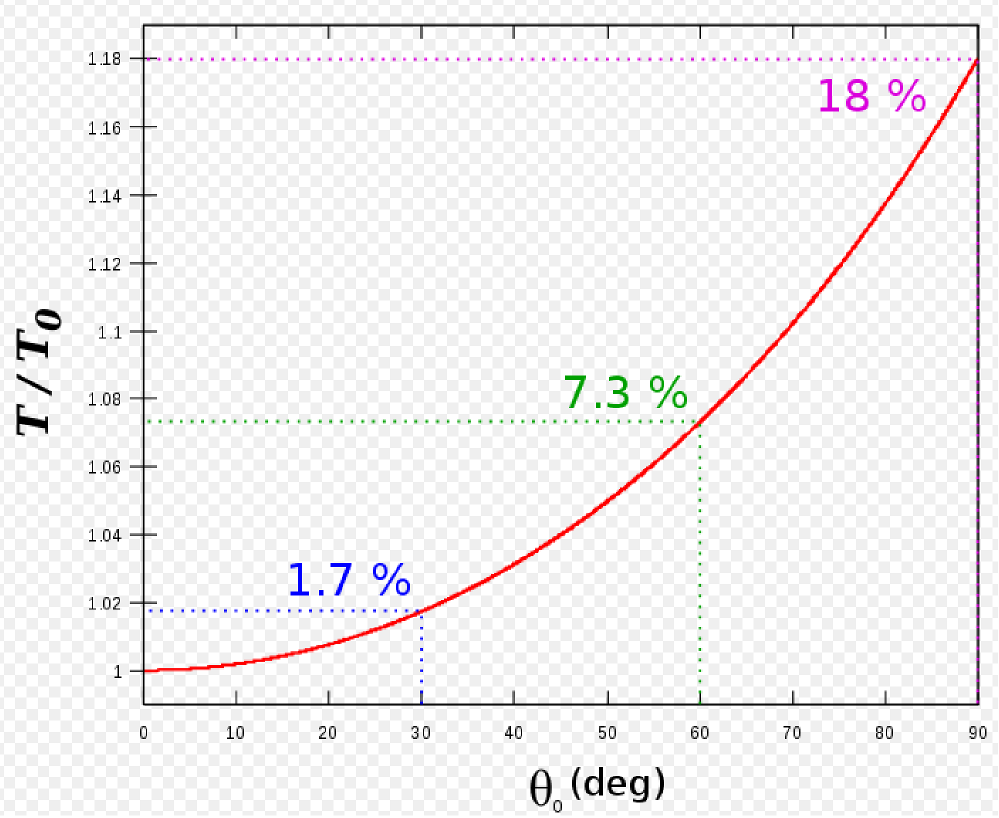
Función integral elíptica

El desarrollo en series lleva a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right].$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



Realización de la experiencia

Medición del periodo del péndulo y sus errores con un detector óptico (fotogate)

ME-9498A

El photogate Pasco ME-9498 A emite a través de un LED un haz infrarrojo estrecho que es registrado por un detector con rápida respuesta, que da lugar a señales muy precisas para medir tiempo.

Cuando se bloquea la señal infrarroja entre LED y detector, la señal eléctrica (tensión) generada es baja. Al desbloquearse se logra máxima señal.

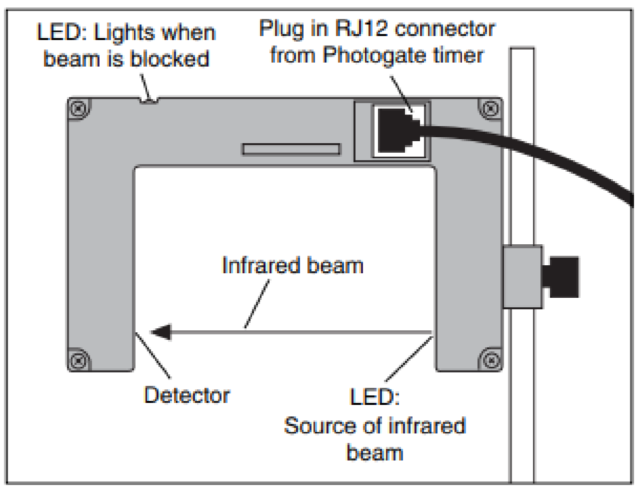
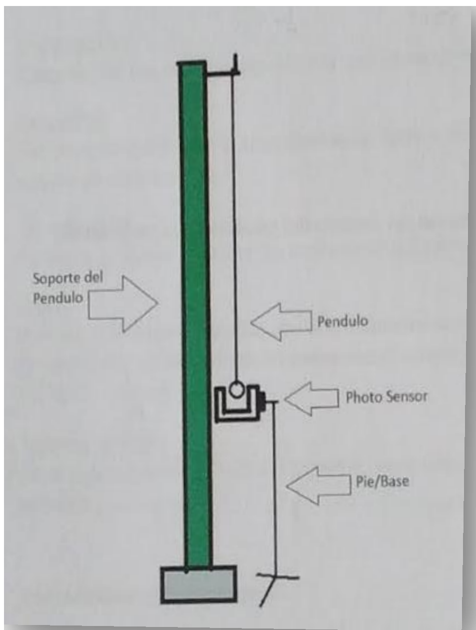
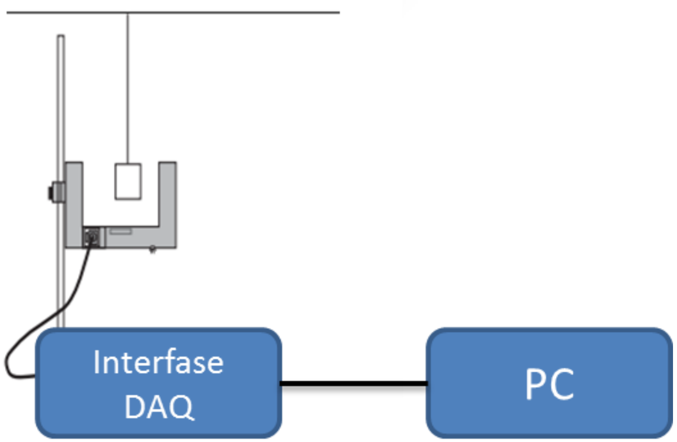


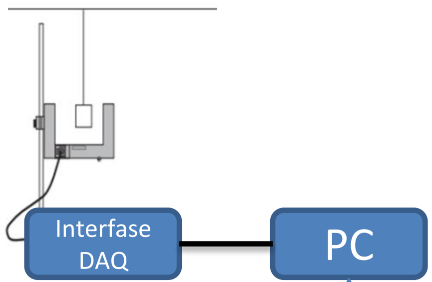
Figure 1: The PASCO Photogate Head

Realización de la experiencia





- ✓ Medir la longitud del hilo del péndulo.
- ✓ Se coloca el sensor (photogate) en un soporte.
- ✓ El sensor se conectado al adquisidor de datos (SensorDaq Vernier) a su vez conectado a la PC.
- ✓ Se activa el software de la PC que reconoce el sensor.
- ✓ Se debe setear el tiempo de medición y la velocidad de muestreo. (100 l/s , 5000 l/s y algunas intermedias)
- ✓ Cada vez que la masa del péndulo pasa por el photogate, el mismo envía una señal al adquisidor de datos.
- ✓ Cuando la masa obtura el led del photosensor, la señal detectada el nula, de lo contrario, la señal es máxima (5V aprox).
- ✓ Aplicar al péndulo una amplitud de oscilación máxima baja (ángulos pequeños)



registro

- ✓ Seleccionar un intervalo temporal
- ✓ Medir el tiempo entre 2 valores intercalados de máxima tensión (1 periodo).
- ✓ Hacerlo en todo el intervalo y se tendrán N períodos.
- ✓ Construir histograma y calcular parámetros
- ✓ Construir función de distribución normal.
- ✓ Repetir para otra velocidad de muestreo.

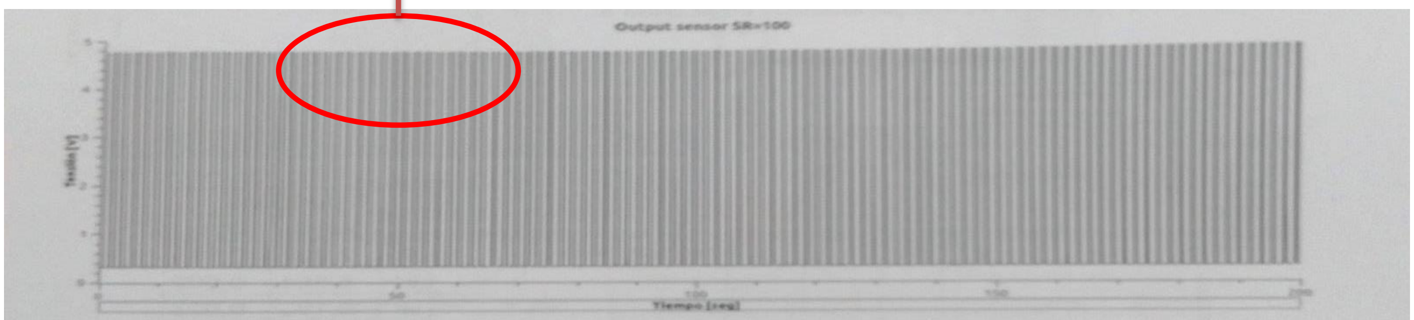


Figura 12: Gráfico de señal del sensor.

	Media	Mediana	Moda	Desvio estandar	Error de instrumento
f = 100 Hz	1,8802	1,88	1,88	0,002	0,01
f = 5000 Hz	1,8801	1,8802	1,8802	0,00038	0,0002

Tabla 10: Estadística de las mediciones automatizadas.