Laboratorio 1
Turno C

Clase 3

(6/04/2019)

Mediciones indirectas

- ✓ La medida indirecta de una magnitud se alcanza por aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas, (variables independientes o datos), que las relacionan con la magnitud problema.
- ✓ Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida.
- ✓ Si en la fórmula hay números irracionales (tales como π o e) se deben elegir con un número de cifras significativas que no afecten a la magnitud del error absoluto de la magnitud que queremos determinar.
- ✓ Esta elección determinará el valor del error asignado a dicha constante.
- ✓ Cuando se trabaja con calculadora o computadora lo más conveniente es tomar todos los decimales que aparecen para el número en cuestión (así, su error es muy pequeño y puede despreciarse frente a los del resto de las magnitudes que intervengan).

En la mayor parte de los casos el valor mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N cantidades $X_1, X_2,..., X_N$ a través de una relación funcional

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$$

Una estimación del mensurando Y, denotada por y, se calcula utilizando estimaciones de entrada $x_1, x_2,..., x_N$.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

En algunos casos, la estimación puede evaluarse con la ecuación:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

media aritmética de n determinaciones independientes Y_k de Y

$X_{i,k}$ es la observación k de X_i, y cada determinación tiene la misma incertidumbre

$$\boxed{y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N), \text{ con } \overline{X}_i = \left(\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}\right)\Big/ n \qquad \text{No se promedia así}}$$

La desviación estándar estimada, es la incertidumbre estándar combinada u_c(y) (o σ_c)

Se calcula de la desviación estándar estimada que se asocia a cada estimación x_i, denominada incertidumbre estándar y designada con μ (x_i.) (o muchas veces σ)

- ✓ La evaluación tipo A de la incertidumbre se basa en el primer caso (una distribución de frecuencias)
- ✓ La evaluación tipo B de la incertidumbre resulta de una distribución establecida a priori.
- ✓ Ambas reflejan nuestro conocimiento del proceso de medición

Evaluación tipo A de la incertidumbre estándar

En la mayor parte de los casos, la mejor estimación del valor esperado μ_q de una cantidad q, y para la cual se han hecho n mediciones independientes q_k es la media aritmética o promedio q :

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \qquad s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$$

La mejor estimación de la varianza de la media, $\longrightarrow$ $\sigma^2(q) = \sigma^2 /n$

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n}$$

La evaluación tipo A de la incertidumbre estándar de un conjunto de mediciones x_k, tal como se definió previamente, se logra con la ecuación:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \; .$$

Evaluación tipo B de la incertidumbre estándar

Cuando se tiene una estimación x_i de una cantidad X_i que no se ha obtenido de observaciones repetidas, la varianza estimada μ^2 (x_i) o la incertidumbre estándar μ (x_i) se evalúan por un juicio científico basado en toda la información disponible acerca de la variabilidad de X_i.

Entre ésta se pueden incluir:

- ✓ datos de mediciones anteriores ;
- ✓ experiencia o conocimiento general acerca del comportamiento y propiedades de materiales de referencia, patrones o instrumentos ;
- ✓ especificaciones del fabricante ;
- ✓ datos provistos en calibraciones u otros certificados
- ✓ incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales .

Cálculo de incertidumbre estándar combinada

$$\mu_c = \sqrt{\mu_A^2 + \mu_B^2}$$

Existen diversos procedimientos para calcular la incertidumbre estándar combinada, dependiendo de si las variables son independientes o no, es decir, si existe alguna correlación entre ellas.

Variables de entrada no correlacionadas

- La incertidumbre estándar de y, donde y es la estimación del mensurando Y.
- El resultado de una medición, se obtiene al combinar apropiadamente las incertidumbres estándares de las estimaciones de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_N$
- La incertidumbre estándar

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}_{\text{Coeficiente de sensibilidad}}^{2} u^2(x_i)}$$

Regla de propagación de incertidumbre

Variables de entrada correlacionadas

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \underbrace{u(x_i, x_j)}_{\text{covarianza}}$$

La covarianza entre dos variables p y q se calcula

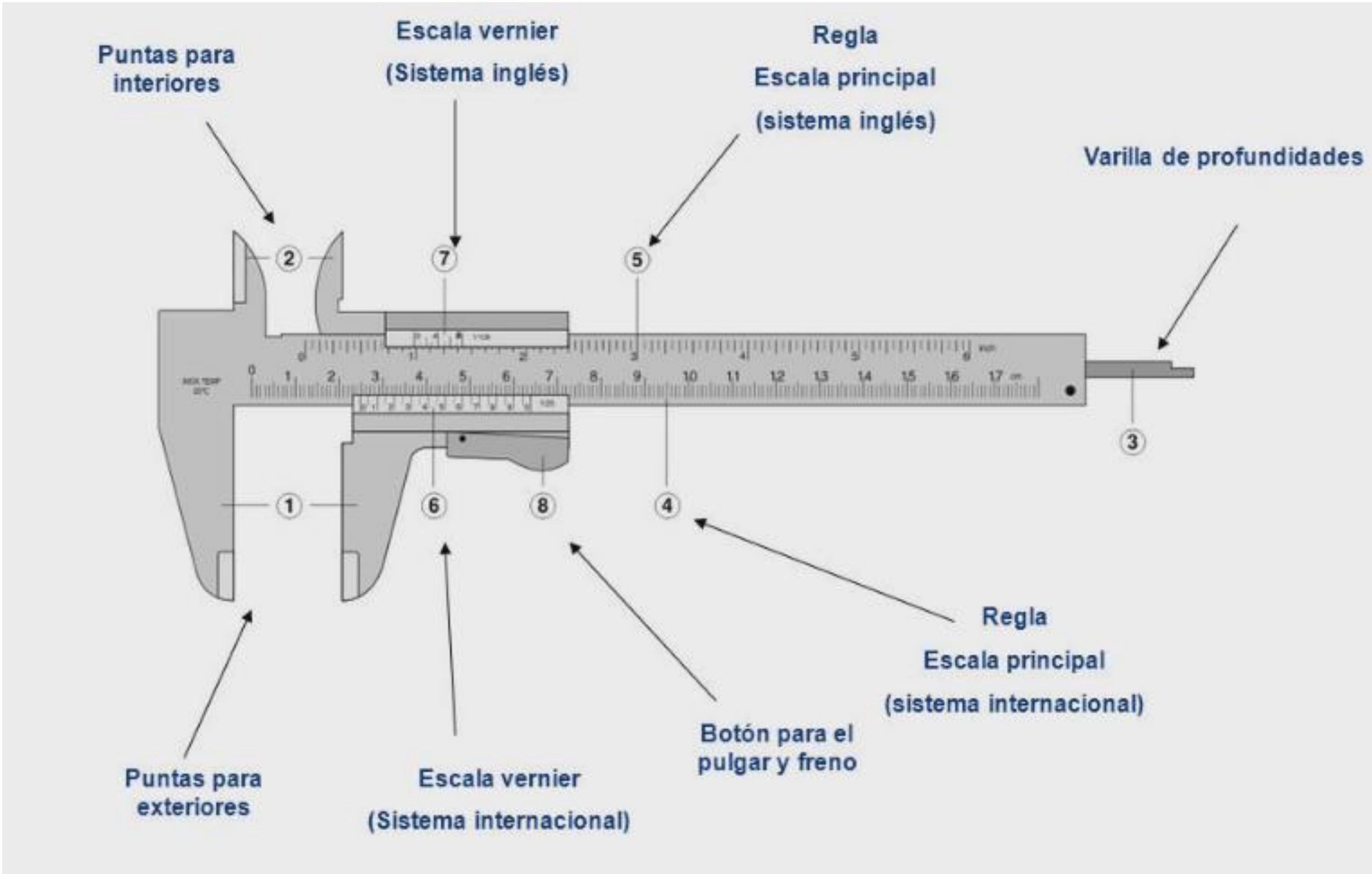
$$s(\overline{p}, \overline{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (p_k - \overline{p})(q_k - \overline{q})$$

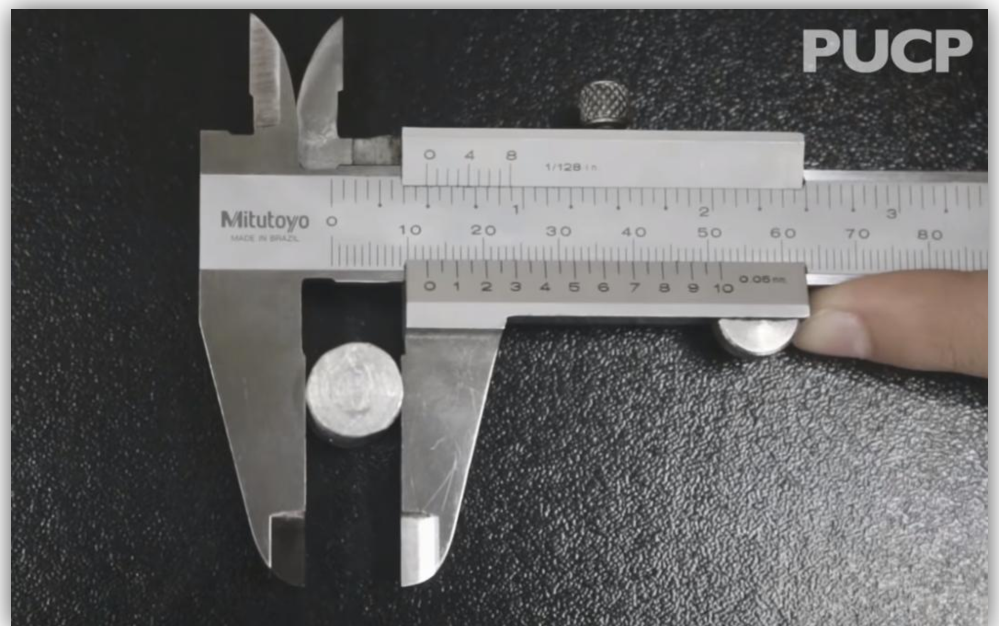
medias

p_k y q_k son las observaciones individuales de dichas cantidades

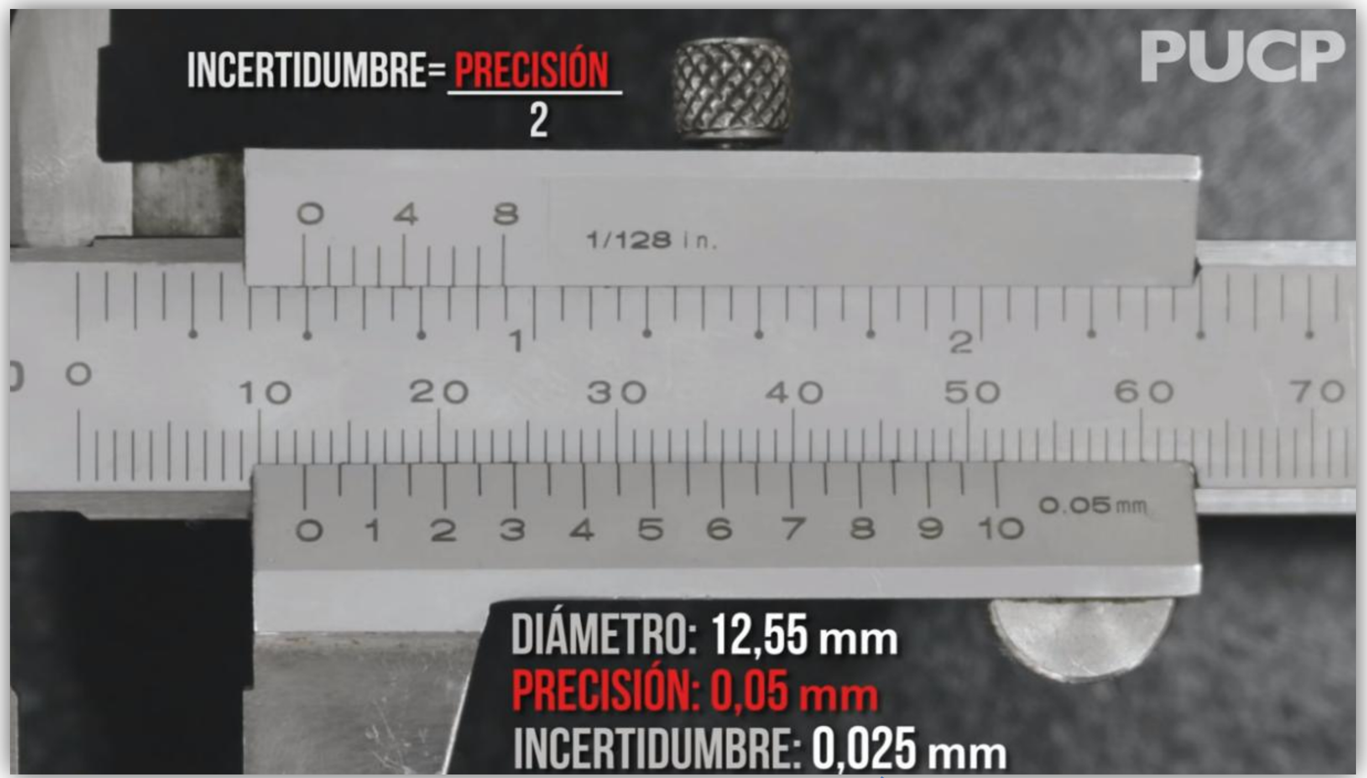
Instrumentos de medición a utilizar en la práctica

Calibre



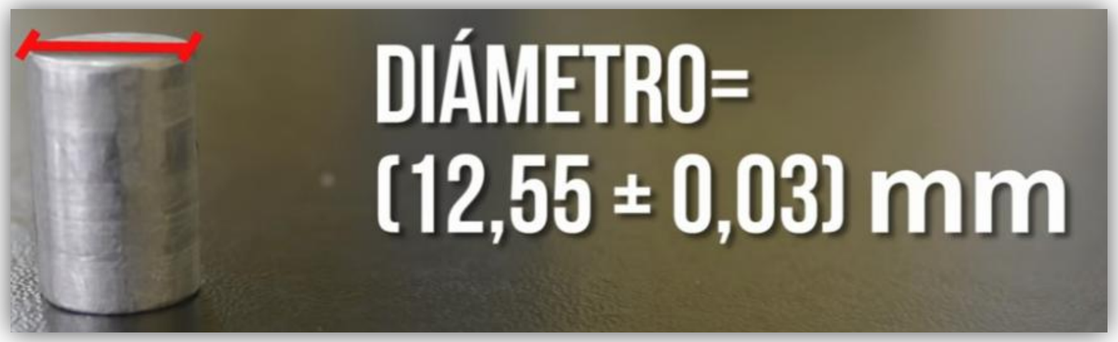


https://www.youtube.com/watch?v=RFhelsCKC9w



PUCP
INCERTIDUMBRE= PRECISIÓN / 2
1/128 in.
0.05 mm
DIÁMETRO: 12,55 mm
PRECISIÓN: 0,05 mm
INCERTIDUMBRE: 0,025 mm

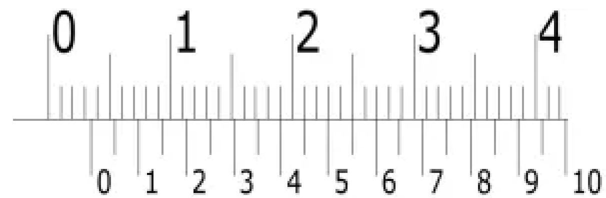
0,03 mm



DIÁMETRO=
(12,55 ± 0,03) mm

Ejemplos

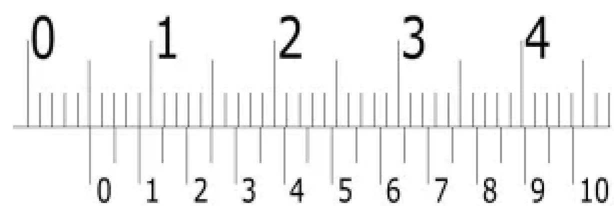
3,45mm



En la regla, a la izquierda del cero del nonio, hay 3 divisiones, esto significa que hay 3 milímetros enteros, en el nonio coincide la división que está justo entre el cuatro y el cinco con una división de la regla, o sea 4 décimas y media o 0,45mm , entonces el resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio:

3 + 0,45 mm = 3,45mm

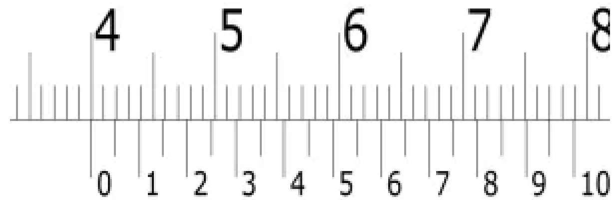
5,1mm



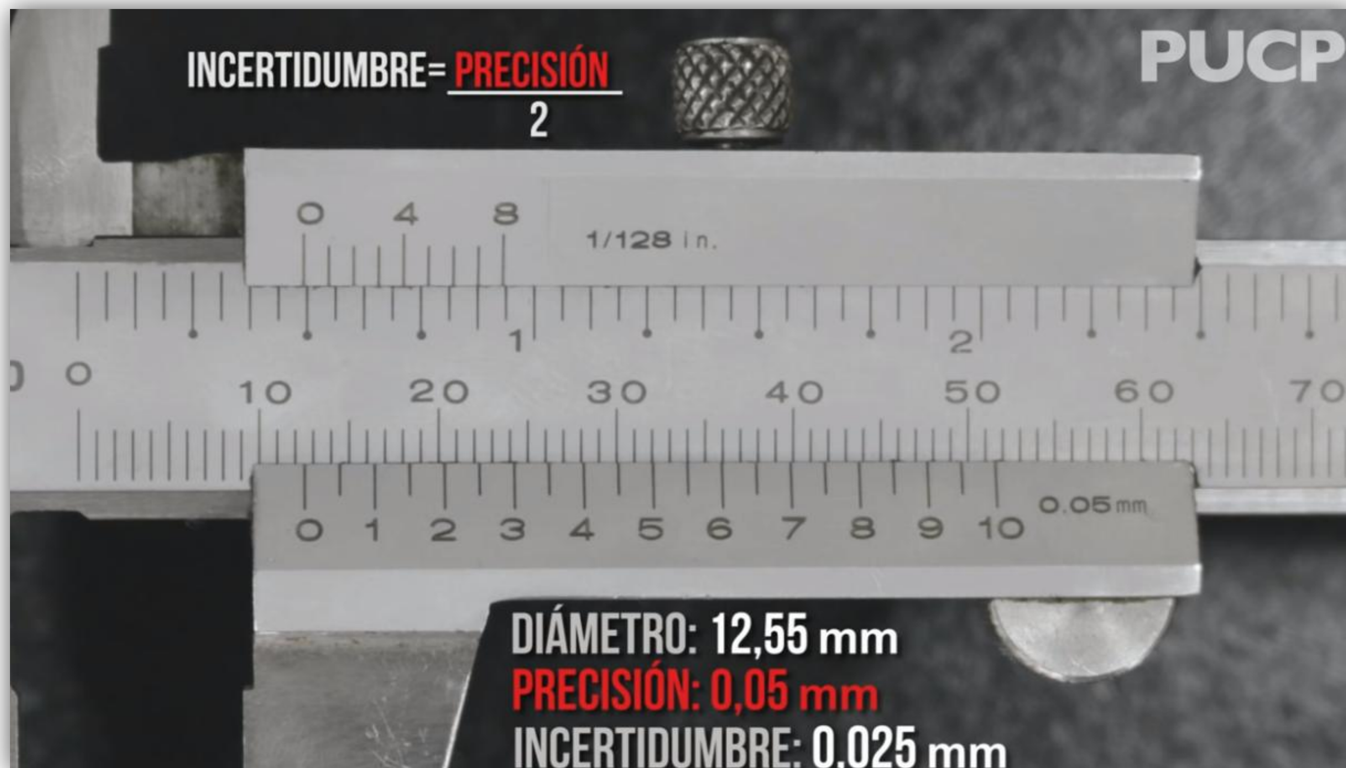
5 divisiones de la regla a la izquierda del cero del nonio, lo que significa que hay 5 milímetros enteros, en el nonio coincide la división del 1 con una división de la regla, o sea 0,1 mm , entonces el resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio:

Ejemplos

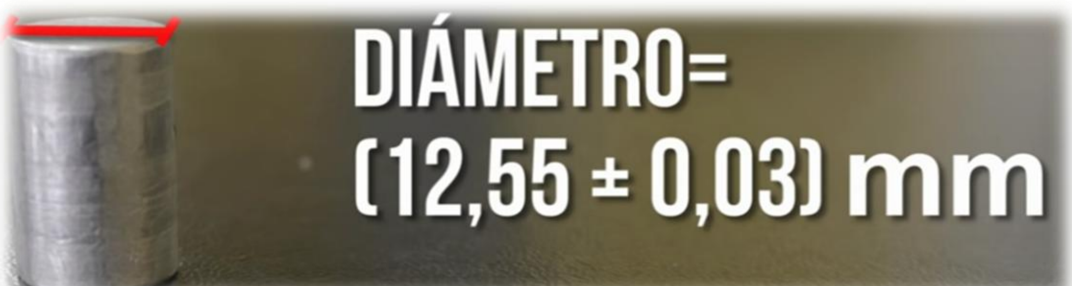
39,95mm



39 milímetros enteros a la izquierda del nonio, más 9 ,5 divisiones en el nonio del pie de rey, da como resultado 39,95 mm.


INCERTIDUMBRE= PRECISIÓN / 2
PUCP
1/128 in.
0.05 mm
DIÁMETRO: 12,55 mm
PRECISIÓN: 0,05 mm
INCERTIDUMBRE: 0,025 mm

0,03 mm


DIÁMETRO=
(12,55 ± 0,03) mm

Si hacemos tres mediciones

Mediciones	**Diámetro (mm)**	**Altura (mm)**
Primera medición	*12,55*	*19,90*
Segunda medición	*12,30*	*19,85*
Tercera medición	*12,70*	*20,30*
Media (promedio)	***12,52***	***20,02***
Desviación Estándar		
Incertidumbre Estándar		
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***
Incertidumbre total en la medida		

4 c.s.

$$media = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)	
Primera medición	*12,55*	*19,90*	
Segunda medición	*12,30*	*19,85*	4 c.s.
Tercera medición	*12,70*	*20,30*	
Media (promedio)	*12,52*	*20,02*	4 c.s.
Desviación Estándar	***0,2021***	***0,2466***	4 c.s.
Incertidumbre Estándar	***0,1167***	***0,1424***	4 c.s.
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***	
Incertidumbre total en la medida			

$$\begin{array}{c} desviación\ estándar \\ \textbf{de una muestra} \end{array} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2}{3-1}}$$

$$\begin{array}{c} incertidumbre \\ estándar \end{array} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)	
Primera medición	*12,55*	*19,90*	
Segunda medición	*12,30*	*19,85*	4 c.s.
Tercera medición	*12,70*	*20,30*	
Media (promedio)	*12,52*	*20,02*	4 c.s.
Desviación Estándar	***0,2021***	***0,2466***	4 c.s.
Incertidumbre Estándar	***0,1167***	***0,1424***	4 c.s.
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***	
Incertidumbre total en la medida			

$$\begin{matrix} incertidumbre\ total \\ en\ la\ medida \end{matrix} = \sqrt{(\boldsymbol{incertidumbre\ de\ lectura})^2+(\boldsymbol{incertidumbre\ estándar})^2}$$

$$\begin{matrix} incertidumbre\ total \\ en\ la\ medida\ del\ diámetro \end{matrix} = \sqrt{(\mathbf{0,03})^2+(\mathbf{0,1167})^2} = \mathbf{0,1}$$

$$\begin{matrix} incertidumbre\ total \\ en\ la\ medida\ de\ la\ altura \end{matrix} = \sqrt{(\mathbf{0,03})^2+(\mathbf{0,1424})^2} = \mathbf{0,1}$$

Mediciones	**Diámetro (mm)**	**Altura (mm)**
Primera medición	*12,55*	*19,90*
Segunda medición	*12,30*	*19,85*
Tercera medición	*12,70*	*20,30*
Media (promedio)	***12,52***	***20,02***
Desviación Estándar	***0,2021***	***0,2466***
Incertidumbre Estándar	***0,1167***	***0,1424***
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***
Incertidumbre total en la medida	***0,1***	***0,1***

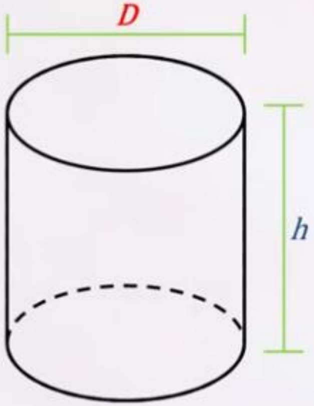
$$Diámetro = 12,5\ mm \pm 0,1\ mm$$

$$Altura = 20,0\ mm \pm 0,1\ mm$$

$$Diámetro = 12,5\ mm \pm 0,1\ mm$$

$$Altura = 20,0\ mm \pm 0,1\ mm$$

3 cifras significativas



$$Volumen = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

$$Volumen = \frac{\pi * 12{,}5^2 * 20{,}0}{4}$$

$$Volumen = 2454{,}36926\ mm^3$$

$$Volumen = 2,45 * 10^3\ mm^3$$

3 cifras significativas

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_x{}^2$$

Regla de propagación de incertidumbre (para variables no correlacionadas)

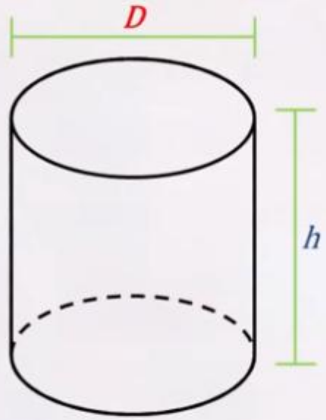
$$\sigma_V{}^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D{}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h{}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi h D}{2} \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\boxed{\sigma_V{}^2 = \left(\frac{\pi h D}{2}\right)^2 \sigma_D{}^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \sigma_h{}^2}$$

$$Volumen = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

$$Volumen = 2{,}45 * 10^3\ mm^3$$



$$Altura = h \pm \sigma_h$$
$$Altura = 20{,}0\ mm \pm 0{,}1\ mm$$

$$Diámetro = D \pm \sigma_D$$
$$Diámetro = 12{,}5\ mm \pm 0{,}1\ mm$$

$$\sigma_V{}^2 = \left(\frac{\pi h D}{2}\right)^2 \sigma_D{}^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \sigma_h{}^2$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{2\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2$$

$$\sigma_V = 2{,}45 * 10^3 \sqrt{\left(\frac{2 * 0{,}1}{12{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{20{,}0}\right)^2}$$

$$\boxed{\sigma_V = 41{,}07\ mm^3}$$

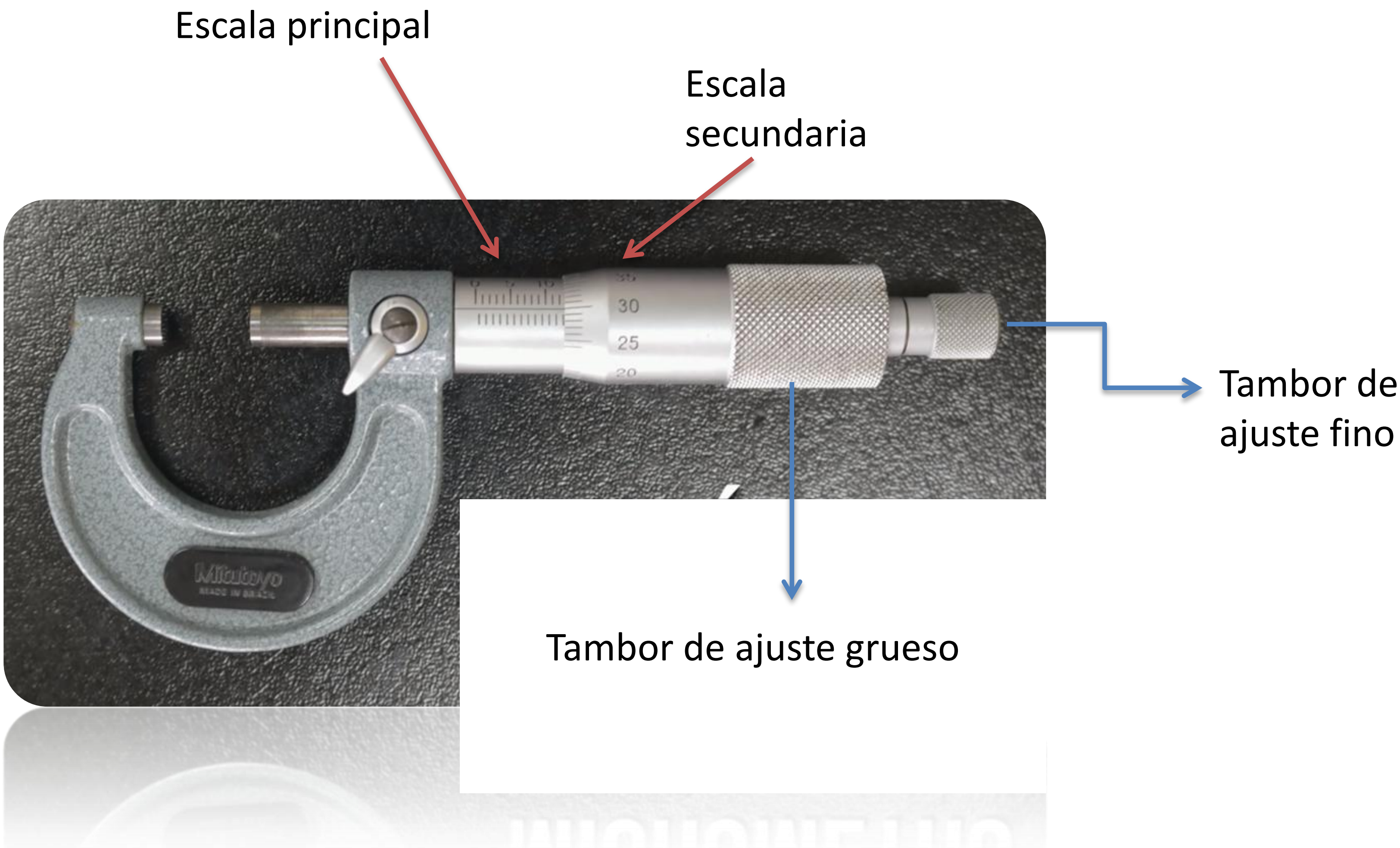
¿Cuantas cifras significativas se usan?

El resultado se debe expresar con solo una cifra significativa

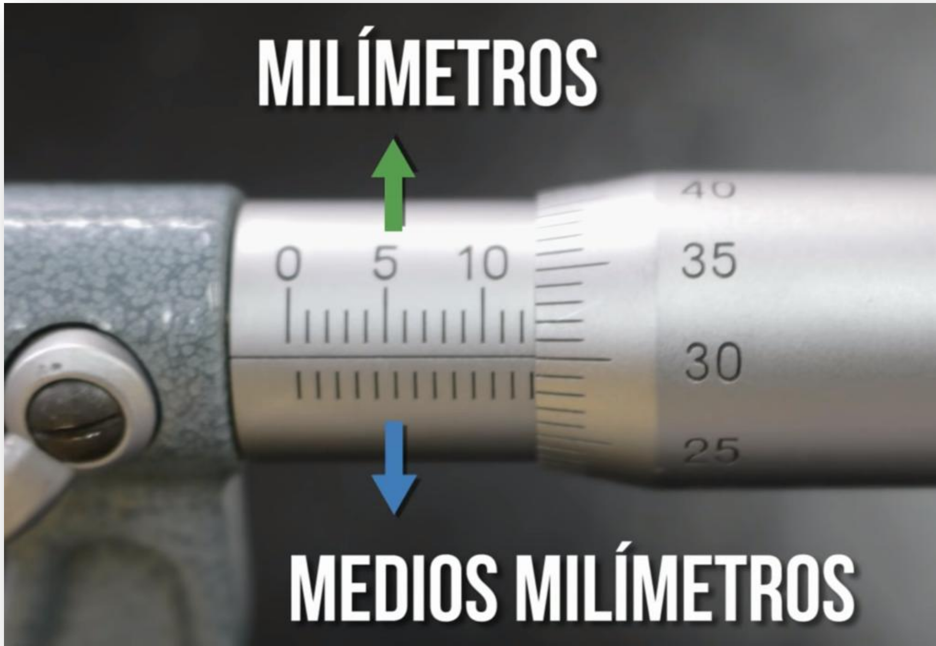
$$\boxed{\sigma_V = 4 * 10\ mm^3}$$

$$\boxed{Volumen = 2{,}45 * 10^3 mm \pm 4 * 10\ mm^3}$$

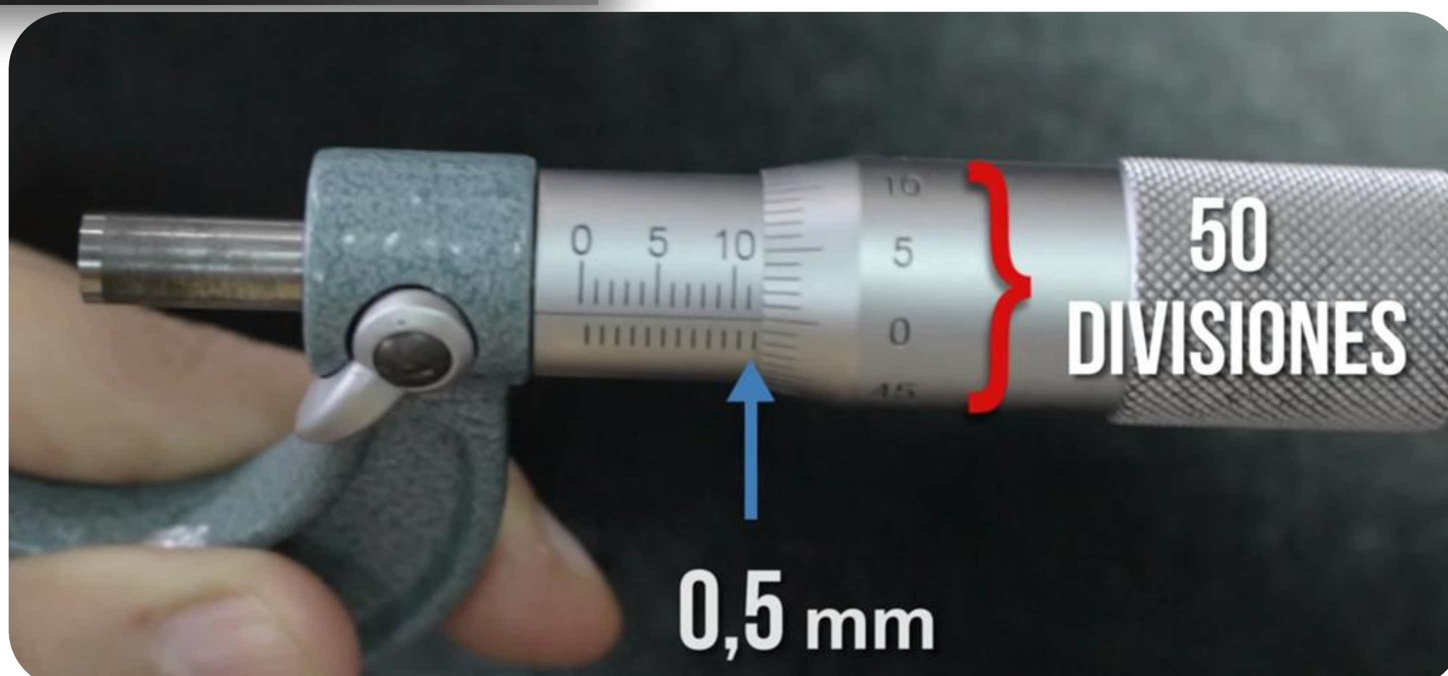
El micrómetro



https://www.youtube.com/watch?v=RFhelsCKC9w



Una vuelta de tambor es 0,5 mm
Cada división del tambor es de 0,01 mm
La incertidumbre es de 0,005 mm



Supongamos la medición del diámetro de un cilindro de metal

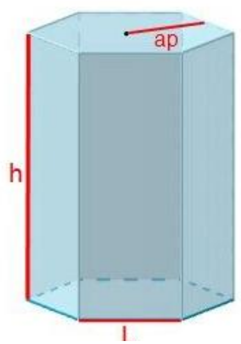

DIÁMETRO: 12, 27 mm
PRECISIÓN: 0,01 mm
INCERTIDUMBRE: 0,005 mm
PUCP
0 5 10
35
30
25
20
INCERTIDUMBRE= PRECISIÓN / 2

Realización de la experiencia

Determinación de volumen y diámetros de distintos objetos a través de mediciones indirectas.
Utilización de calibre, micrómetro y probeta graduada

- Cálculo del volumen de un cilindro midiendo altura y diámetro.
- Cálculo del volumen de un prisma hexagonal con hueco cilíndrico central.
    - Utilizando calibre
    - Mediante el peso (uso de balanza)
    - Utilizando probeta graduada
- Cálculo del diámetro de un alambre (micrómetro)

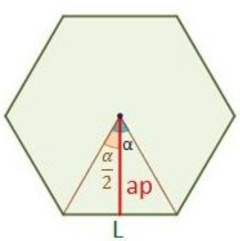
El **prisma hexagonal regular** es un prisma recto que tiene como bases dos **hexágonos regulares**.

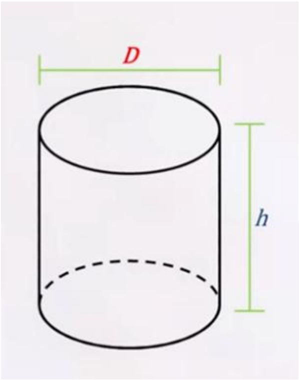


El **volumen del prisma hexagonal** es el producto del área del hexágono regular de una de sus bases por la altura (h).

$$Volumen = 3 \cdot L \cdot ap \cdot h$$

L es la longitud **de los lados** del hexágono, ap, su apotema y h la altura del prisma





$$Volumen = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

Medición indirecta a través del peso

La densidad de un material es

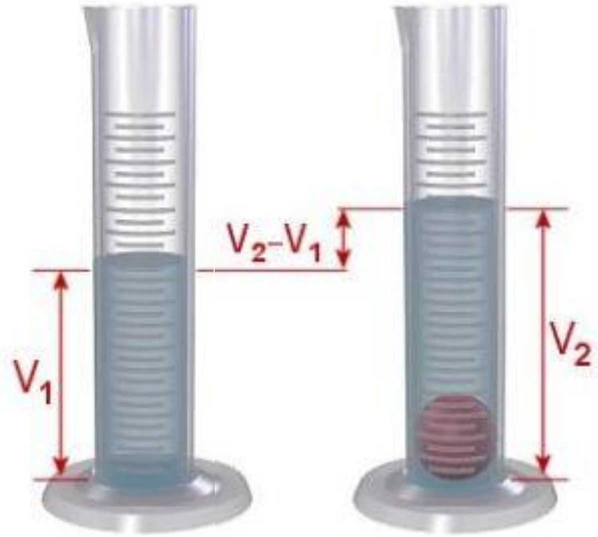
$$\rho = \frac{m}{V}$$

masa

volumen

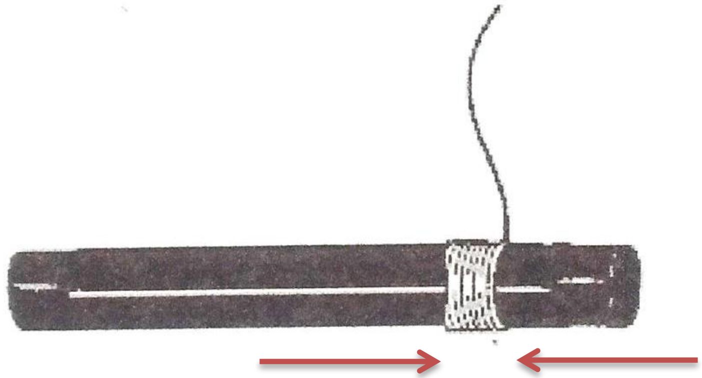
- Se mide la masa con una balanza
- La densidad del Al (20°C) = 2,7 g/cm^3
- Calcular el volumen

Medición con probeta graduada



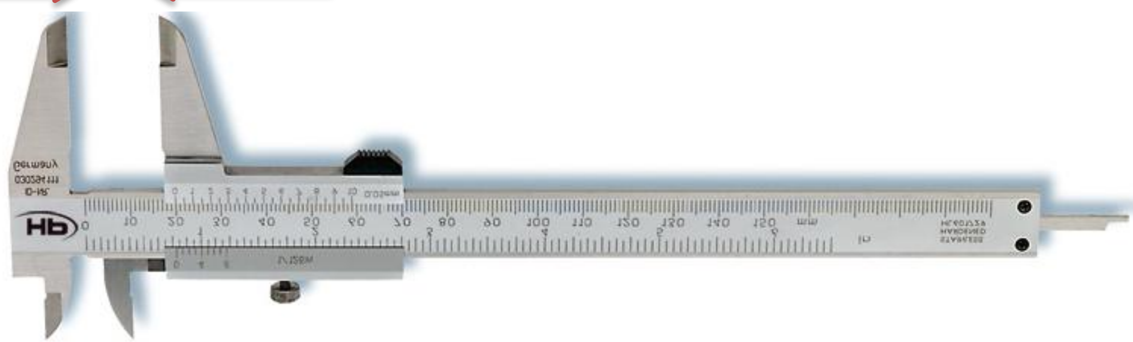
- Se agrega una cierta cantidad de agua en la probeta y se registra su volumen V_1
- Se coloca el prisma en la probeta y se registra el nuevo volumen V_2
- $(V_2 - V_1)$ es el volumen del prisma.

Se mide el diámetro de un alambre con el micrómetro 10 veces en diferentes posiciones.
Lo hace todos los integrantes del grupo



Se enrolla un alambre (15 vueltas) en una varilla de metal

Se mide la longitud del enrollado con un calibre y se estima el diámetro del alambre (dividiendo por 15).
Lo miden todos los integrantes del grupo



Se calcula la dispersión.