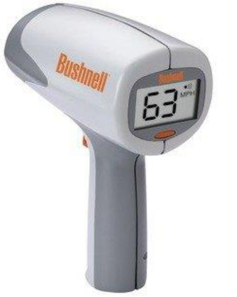
Laboratorio 1
Turno C

Clase 4
(13/04/2019)

Supongamos que queremos medir la velocidad de un cuerpo en MRU.

En forma directa, por ejemplo usando una pistola de velocidad, se obtiene:



$$v = v_0 \pm \Delta v \longrightarrow$$ Precisión del instrumento

En forma indirecta, midiendo la posición a dos tiempos distintos, y luego haciendo el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo.

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad \Delta v = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial v}{\partial q_i} \right)^2 (\Delta q_i)^2} \qquad q_i = x_1, x_2, t_1, t_2$$

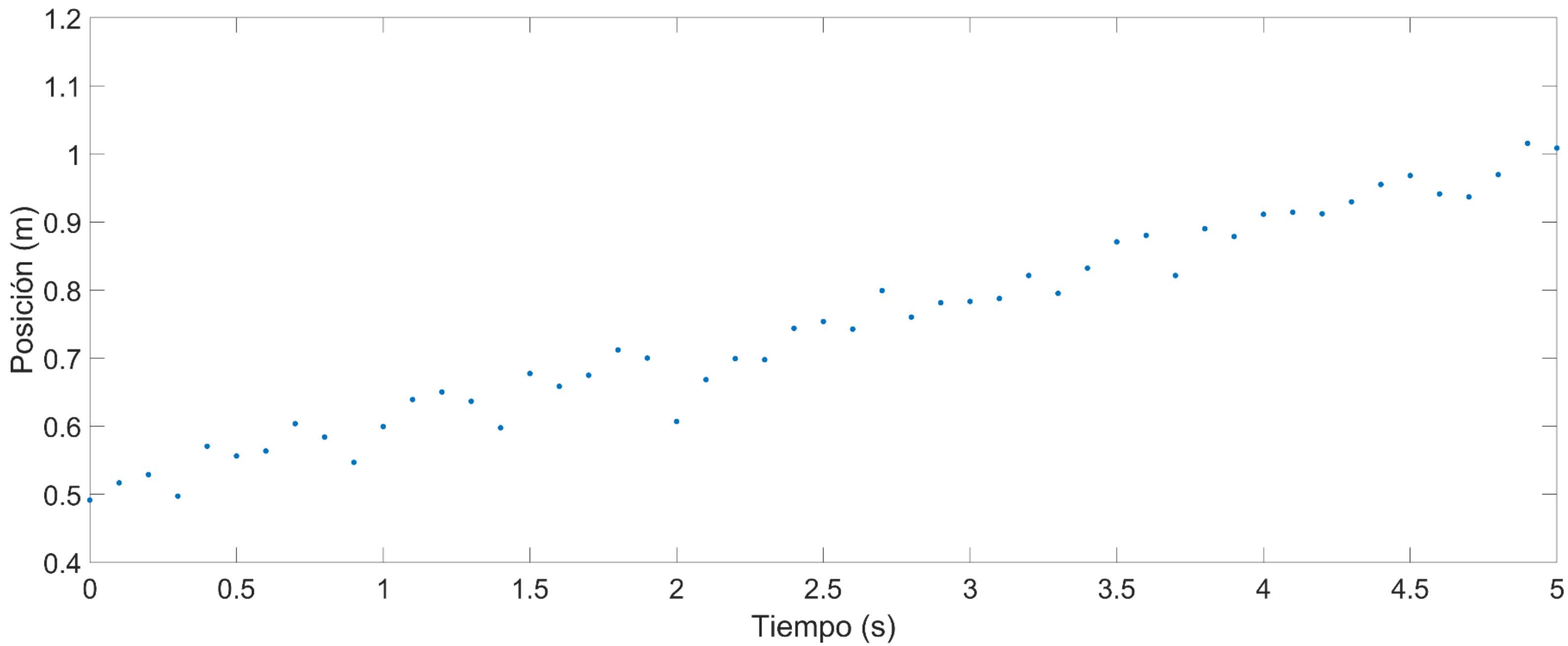
En ambos casos, podríamos medir *N* veces, y reportar la media de todas las velocidades obtenidas. El error sería entonces:

$$\Delta v_C = \sqrt{(\Delta v_A)^2 + (\Delta v_B)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(v_i - \overline{v})^2}{n(n-1)} + (\Delta v_B)^2}$$

¿Por qué no medir directamente la posición *N* veces? Si estamos en un MRU, la ecuación horaria resultante es:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Supongamos que el cuerpo se mueve con *v* = 0.1 m/s, y medimos 10 veces por segundo. Entonces podríamos obtener algo así:

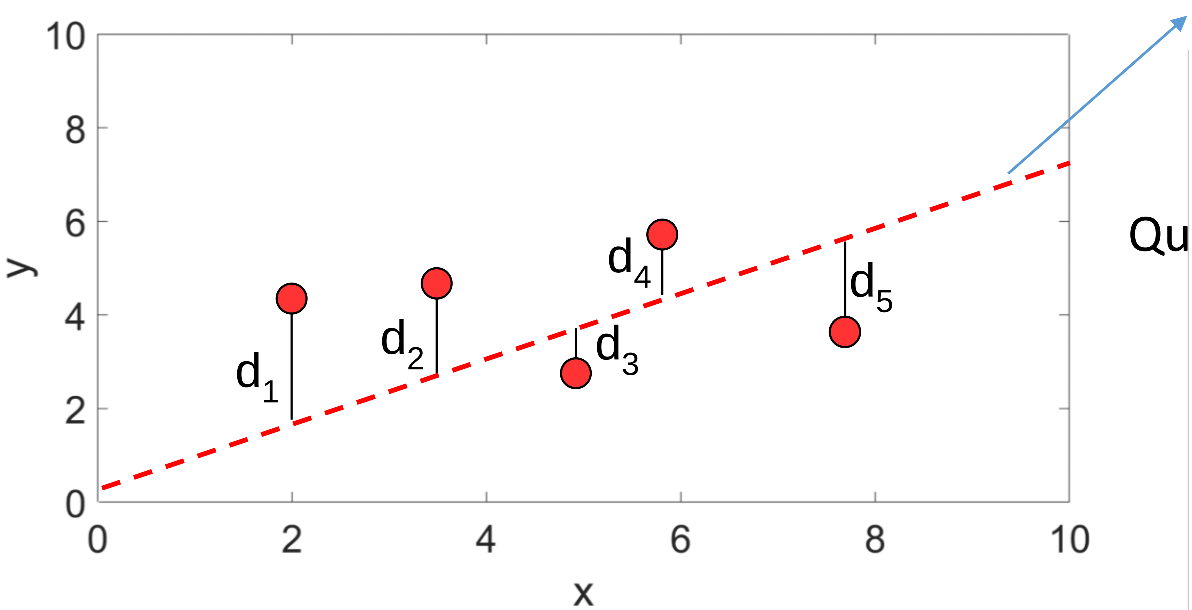


¿Por qué no daría un línea recta? ¿Hay algo mal en la ecuación horaria?

¿Cómo podemos estimar el mejor valor para x_0 y v? ¿Qué quiere decir mejor? Lo que queremos, es que la recta estimada se ajuste bien a los datos.

Esto es un ejemplo particular de un problema más general, en el que hay N pares de puntos medidos (x_i, y_i) y queremos elegir la recta con la menor distancia a los puntos, en algún sentido estadístico.

Para determinar a y b, se aplica el **método de los cuadrados mínimos**, que minimiza suma de las distancias cuadráticas verticales de los puntos a la recta. Gráficamente:



$$y = f(x) = a + bx$$

Queremos minimizar la suma:

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2$$

Más formalmente, queremos minimizar: $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

Los N puntos (x_i, y_i) están medidos, son constantes. Podemos pensar a χ^2 como una función de a y b. Para encontrar los valores de a y b que minimizan la expresión, derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

Esto lleva a un par de ecuaciones lineales con dos incógnitas, denominadas ecuaciones normales. Su solución es única y sencilla:

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(N \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i\right)$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left(N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i\right)$$

Lo anterior vale si:

- el error en *x* es despreciable.
- el error en *y* es despreciable, o igual en todas las mediciones.

En un caso un poco más general, consideramos errores en las mediciones de *y*. Nos interesa que la recta ajuste mejor a los puntos medidos con mayor precisión. Esto se logra definiendo χ^2 así:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (a + bx_i)}{\sigma_i} \right]^2$$

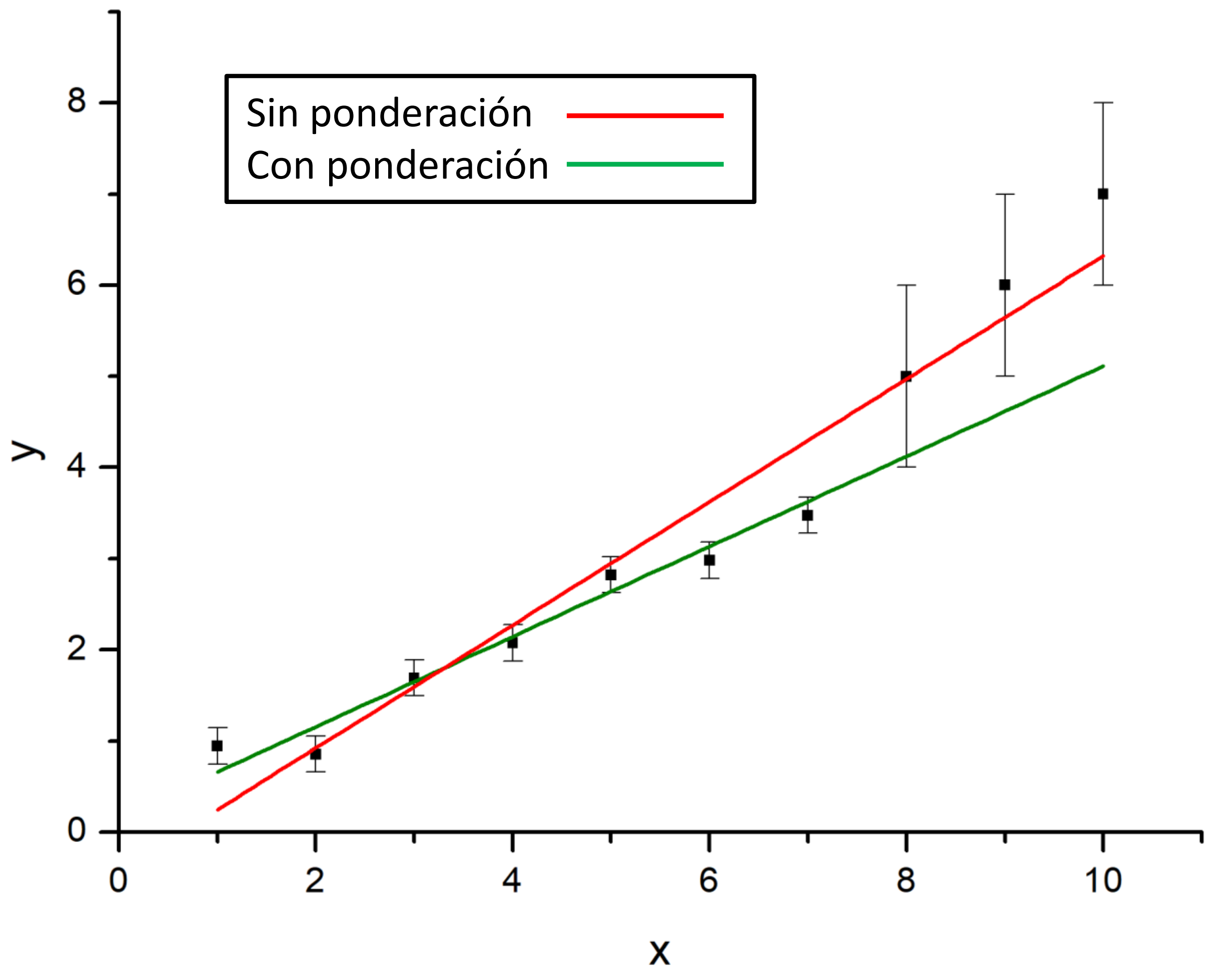
La solución de las ecuaciones normales queda:

$$\Delta' = \sum \frac{1}{\sigma_i} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

$$a = \frac{1}{\Delta'} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

$$b = \frac{1}{\Delta'} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

La ponderación del error mitiga la distorsión que pueden introducir las mediciones poco precisas.



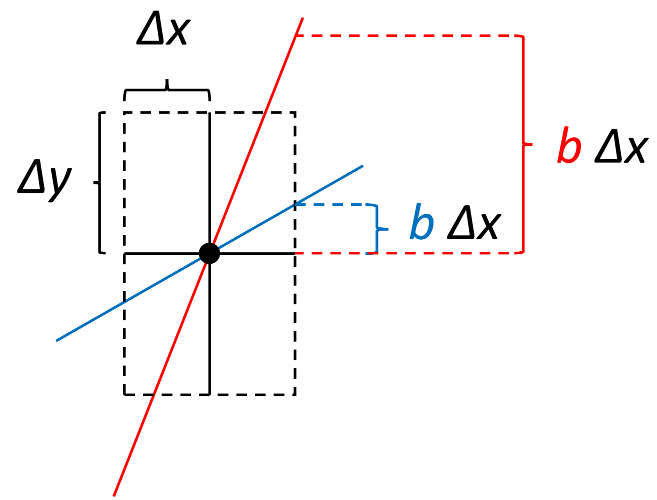
¿Y si el error en *x* no es despreciable? Hay métodos generales para errores en ambas variables, pero son más complicados. Lo habitual es elegir como *x* la variable con menor error, y despreciarlo. ¿Qué criterio se puede tomar?

$$\Delta x \leq \Delta y$$

¿Y si *x* e *y* no son la misma magnitud?

$$\frac{\Delta x}{x} \leq \frac{\Delta y}{y}$$

Mejor ¿pero no depende de más nada?



Lo mejor es elegir *x* e *y*, aplicar cuadrados mínimos para estimar *b*, y chequear que se satisfaga:

$$b\,\Delta x \leq \Delta y$$

Si no se cumple, hay que invertir los ejes, y aplicar el método para encontrar otros parámetros:

$$x = c + m\,y$$

Pero queremos $\quad y = a + b\,x \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{1}{m} \quad a = -\dfrac{c}{m}$

¿Qué errores tienen *a* y *b*? En su determinación están involucradas las *N* mediciones de (x_i,y_i), así que se estima propagando el error de todas ellas. Suponiendo que las distintas mediciones no están correlacionadas entre sí:

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\sigma_i^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_i} \right)^2 \right] \qquad z = a, b$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta'} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \qquad\qquad \sigma_b^2 = \frac{1}{\Delta'} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

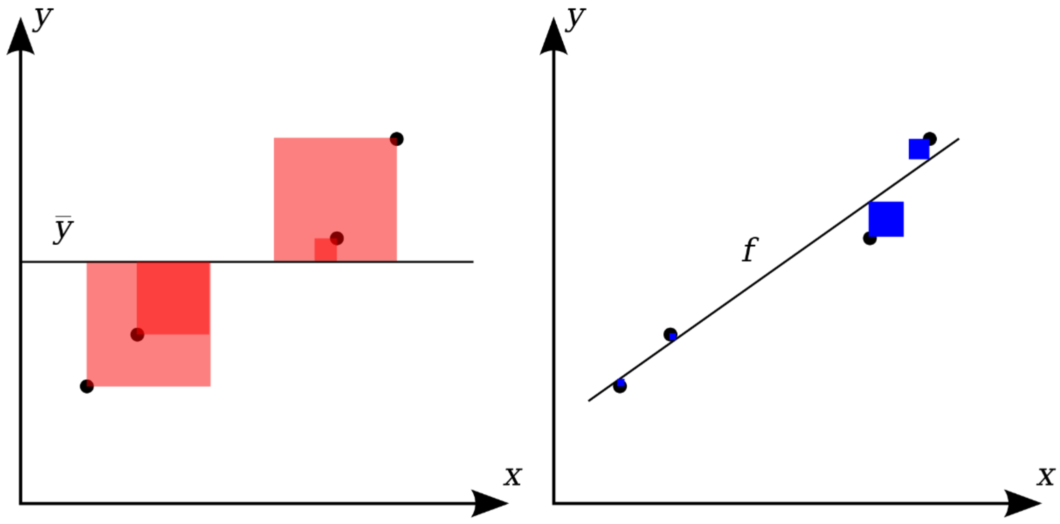
Esto es una estimación de la varianza que obtendríamos si repetimos el mismo ajuste varias veces, midiendo *N* puntos cada vez.

Importante! Las estimaciones de *a* y *b* no son independientes! Una fluctuación en *a* implica una en *b*, y viceversa. Esto es fundamental a la hora de propagar los errores de *a* y *b* en cálculos que los involucran.

Un parámetro útil para evaluar cuan bueno es el ajuste es el **coeficiente R^2** o **coeficiente de determinación**. Se define como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \overline{y}\right)^2} = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

SS_{tot}



SS_{res}

El coeficiente es positivo y menor o igual a 1. Vale 1 solo en el caso de que todos las mediciones se ajusten sobre una recta.

Nos permite comparar en forma sencilla cuan buenos son los resultados de distintos ajustes. También puede ser la base de un test de hipótesis.

El concepto de cuadrados mínimos se puede aplicar a todo tipo de funciones, no solamente a rectas. Pero hay una gran diferencia según si la función es lineal o no lineal en los parámetros que se quieren determinar.

Lineales: $a + b\,x + c\,x^2, \quad a\,\mathrm{sen}(x), \quad a\exp(x), \quad a\log(x)$

Todo lo que vimos sigue valiendo, las ecuaciones normales son diferentes pero siempre tienen solución, y es única.

No lineales: $a + a^2\,x, \quad \mathrm{sen}(a\,x), \quad \exp(a\,x), \quad \log(a\,x)$

Las ecuaciones normales no siempre tienen solución única, y en general no tienen solución cerrada. La suma de los cuadrados se minimiza numéricamente usando algoritmos de optimización, y muchas veces necesita una solución inicial, de la que depende el resultado final.

A veces se pueden convertir un caso no lineal en otro lineal haciendo una sustitución de variable. Por ejemplo para ajustar *N* datos (x_i, y_i) con una función exponencial: $y = \exp(a\,x), \quad u = \ln(y) \quad \Rightarrow \quad u = a\,x$

Hoy vamos a:

- Estudiar el movimiento de un carrito sobre un riel inclinado.

- Medir su posición en función del tiempo, y medir su aceleración para distintas inclinaciones del riel.

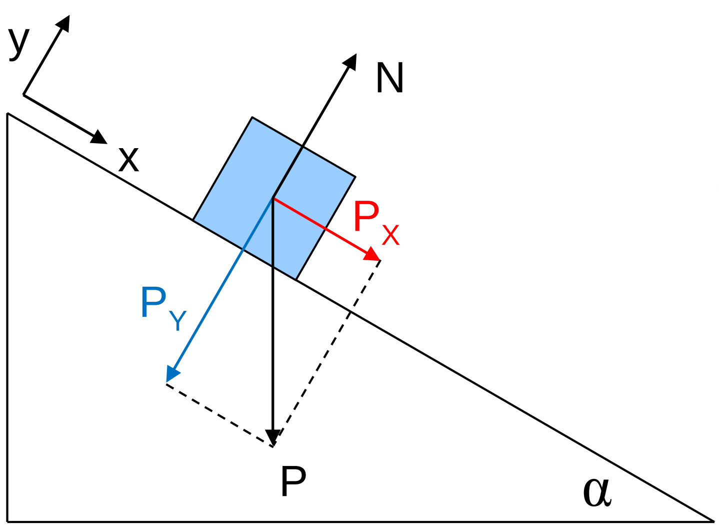
- Determinar la aceleración de la gravedad a partir de los resultados.

Ecuación horaria del carrito

Hipótesis

- Movimiento 1D → El encastre en el riel restringe el movimiento lateral
- Ausencia de rozamiento
  - Entre el carro y el aire
  - Entre el carro y el riel
  - Entre las partes móviles del carro

La interacción entre el carro y el riel está mediada por las ruedas. No es trivial describirla correctamente, pero veamos que pasa si la aproximamos por la de un cuerpo puntual.



$$\hat{y})\quad m\,\ddot{y} = P_y - N = 0 \Rightarrow N = P_y$$

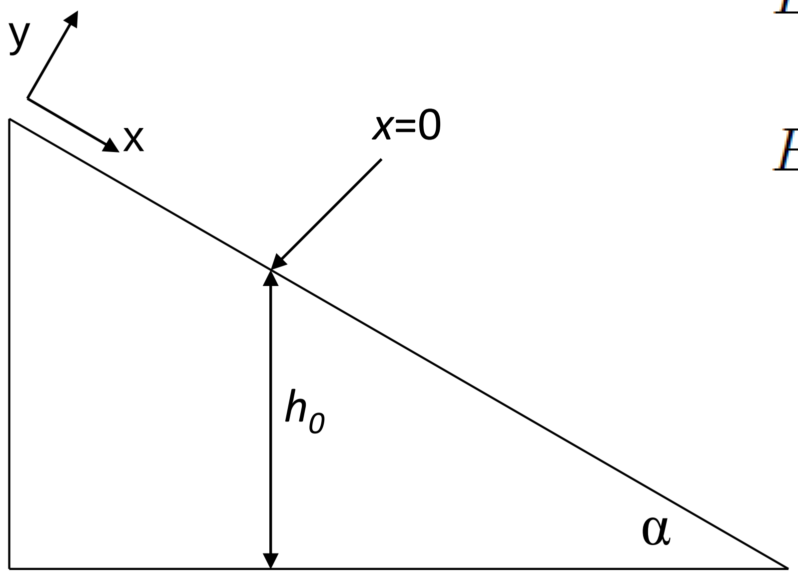
$$\hat{x})\quad m\,\ddot{x} = P_x = m\,g\ \mathrm{sen}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g\ \mathrm{sen}(\alpha)$$ aceleración constante

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

Podemos hacer lo mismo con el balance de energía:

$$\Delta E_{total} = L_{FNC} \quad \Rightarrow \quad E_{total} = E_P + E_K \text{ es constante}$$



$$E_{total} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgh$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mg(h_0 - x\,\text{sen}(\alpha))$$

Derivando una vez respecto del tiempo (solo x depende)

$$0 = m\dot{x}\,\ddot{x} - mg\dot{x}\,\text{sen}(\alpha)$$

$$\ddot{x} = g\,\text{sen}(\alpha)$$

De esta manera se llega a lo mismo y la aproximación es más clara, solo estamos asumiendo que no hay rozamiento, sin importar cuan complicada sea la interacción carro-riel.

Medición de la posición

Para medir la posición en función del tiempo, vamos a usar un sensor de movimiento. Funciona como la eco-localización de los murciélagos:

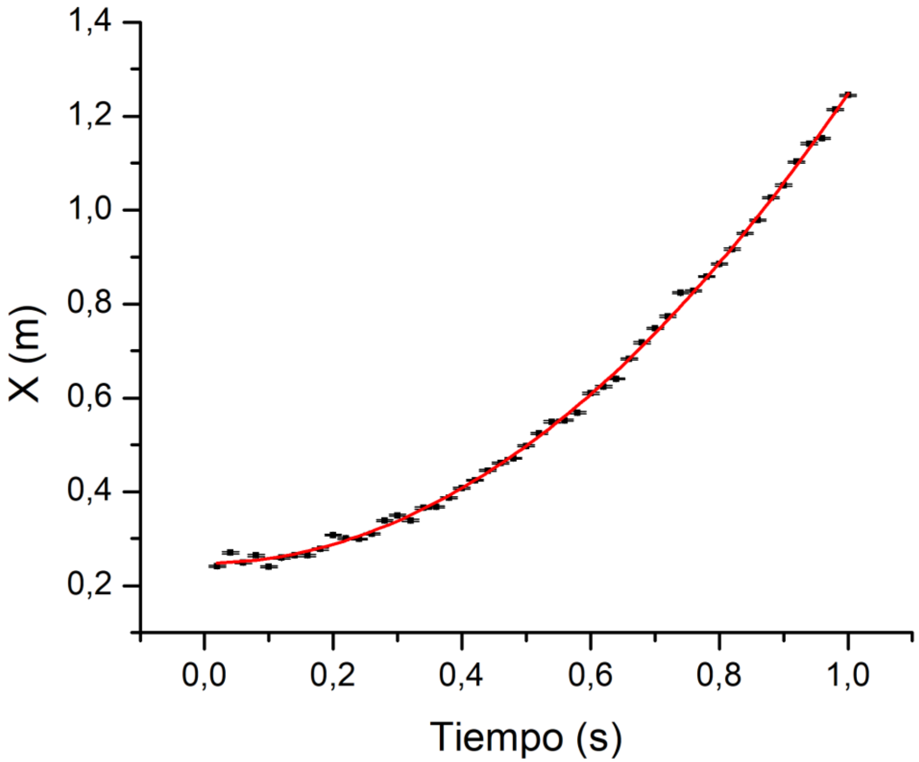
- Es un emisor y receptor de pulsos de ultrasonido.
- Los pulsos se reflejan en los objetos al frente y regresan al emisor.
- A partir del tiempo de viaje de los pulsos reflejados, el dispositivo determina la distancia.

Para tener en cuenta:

- No detecta bien objetos cercanos (a menos de 20 cm de distancia).
- El haz se expande como un cono, puede detectar objetos al costado.
- Se puede elegir la frecuencia de adquisición.
- Tiene una calibración por defecto, pero hay que revisarla y posiblemente realizar una calibración propia.
- Deben fijarlo mediante un soporte al extremo elevado del riel. No lo golpeen ni dejen que lo golpee el carro, es frágil y caro.

Ejemplo de una medición:

Soltando el carro desde el reposo a 25 cm del sensor.
Inclinación aprox. 10°, muestreo de 50 Hz.



La curva roja se obtuvo mediante un ajuste de la forma:

$$a + b\,x + c\,x^2$$

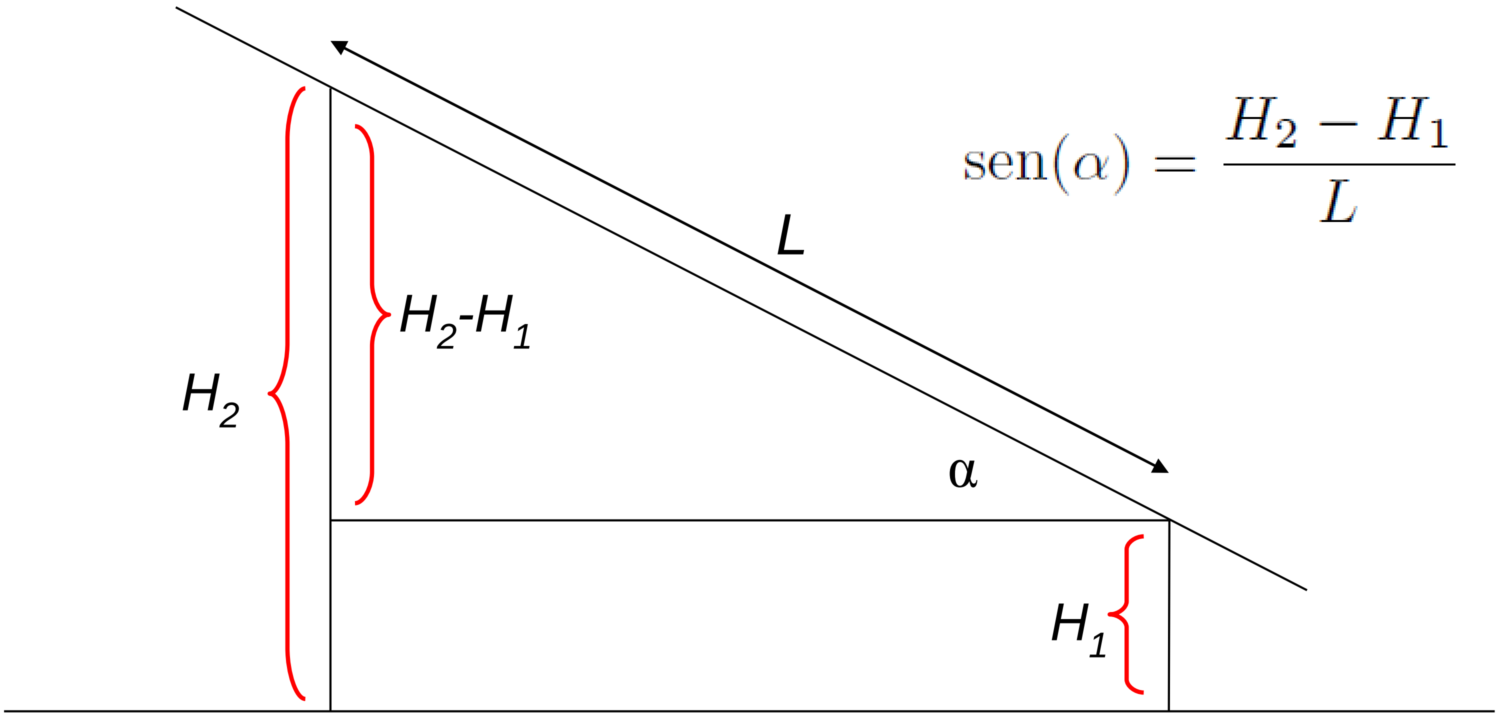
Por la ecuación horaria, podemos determinar la aceleración:

$$a_x = 2c$$

Estimación del error en X → Documentación
→ Análisis de la dispersión

Medición de la inclinación del riel

Una propuesta, usando una cinta métrica y trigonometría simple:



$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{H_2 - H_1}{L}$$

- No es la única forma de hacerlo. Pueden innovar.
- No se olviden de estimar el error en sen(α).

Medición de la aceleración de la gravedad

Para una dada inclinación medimos a_X y sen(α)

La teoría establece la relación: $a_x = g\,\mathrm{sen}(\alpha)$ → Podemos despejar *g*

Pero vamos a medir a_X y sen(α) para distintas inclinaciones

Podemos definir dos variables de manera que su relación sea lineal, con pendiente *g:*

$$u = a_x\,, \quad v = \mathrm{sen}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad u = g\,v$$

Si realizamos un ajuste por una recta usando cuadrados mínimos, podemos asociar *g* a la pendiente del ajuste. Esto es mejor que la medición en un solo punto, ya que incorpora información de múltiples mediciones.

Si no se cumple $g\,\Delta(\mathrm{sen}(\alpha)) \leq \Delta(a_x)$ es conveniente invertir los ejes

Actividades para hoy:

Para al menos 5 inclinaciones distintas:

1) Medir el ángulo de inclinación, el seno y estimar sus errores.

2) Realizar 4 tiradas del carro, soltándolo desde el reposo, y medir su posición en función del tiempo. Para cada tirada obtener la aceleración a partir de un ajuste con una parábola.

3) Promediar los 4 resultados y estimar el error correspondiente.

Con los resultados de cada inclinación determinar la aceleración de la gravedad mediante un ajuste por una recta, en un gráfico de a_X vs sen(α).