Laboratorio 1
Turno C

Clase 6

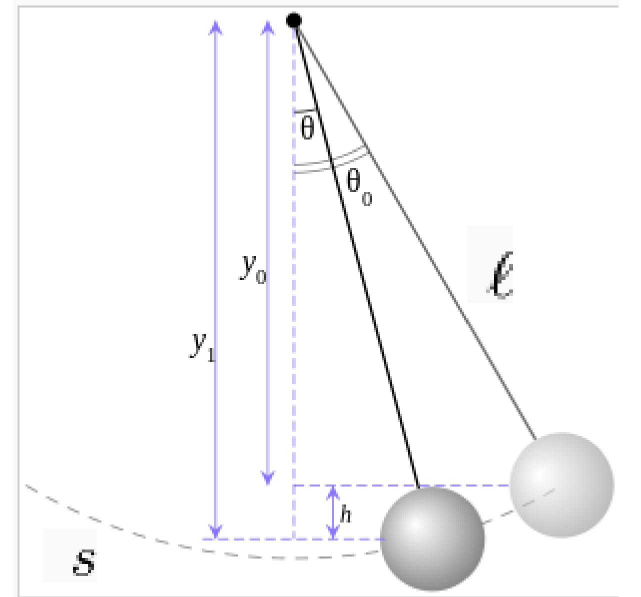
(04/05/2019)

Ecuación de movimiento del péndulo simple (consideración energética)

$\Delta U = mgh$ Energía potencial

$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$ Energía cinética

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$



La longitud del arco recorrido $s = \ell\theta$

Velocidad a la que se recorre el arco $v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$

Reemplazando en la ec.(1)

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ell}\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Si la amplitud inicial es θ_0 $\Rightarrow$ $y_0 = \ell\cos\theta_0$

análogamente $y_1 = \ell\cos\theta$

$$h = \ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \qquad (3)$$

Reemplazando la ec. (3) en la ec.(2) $\Rightarrow$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \qquad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \quad (3)$$

Si derivamos la ec. (3) respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Ecuación diferencial del movimiento del péndulo

$\theta \ll 1.$ → $\sin\theta \approx \theta.$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Ecuación del oscilador armónico

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) \qquad \theta_0 \ll 1.$$

El período To es el tiempo para realizar una oscilación

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \theta_0 \ll 1$$

¿Qué sucede cuando tenemos una amplitud inicial arbitraria ?

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\,\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Podemos integrar sobre un ciclo completo

$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0),$$

o 2 veces sobre medio ciclo

$$T = 2t\left(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0\right)$$

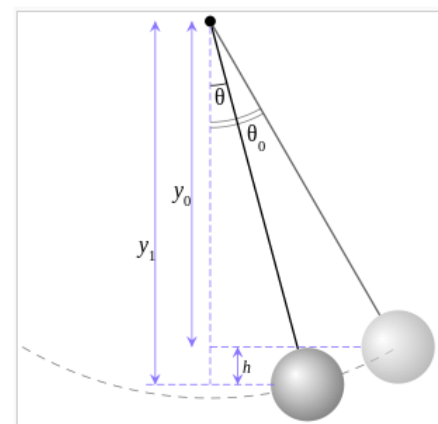
o 4 veces sobre ¼ de ciclo

$$T = 4t\left(\theta_0 \to 0\right)$$

$$T = \int_0^{4\theta_0} dt = \int_0^{4\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\,\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta.$$

$$\boxed{\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Si θ_o se acerca al vertical la integral diverge

$$\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty,$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Función integral elíptica incompleta

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}\,du\,.$$

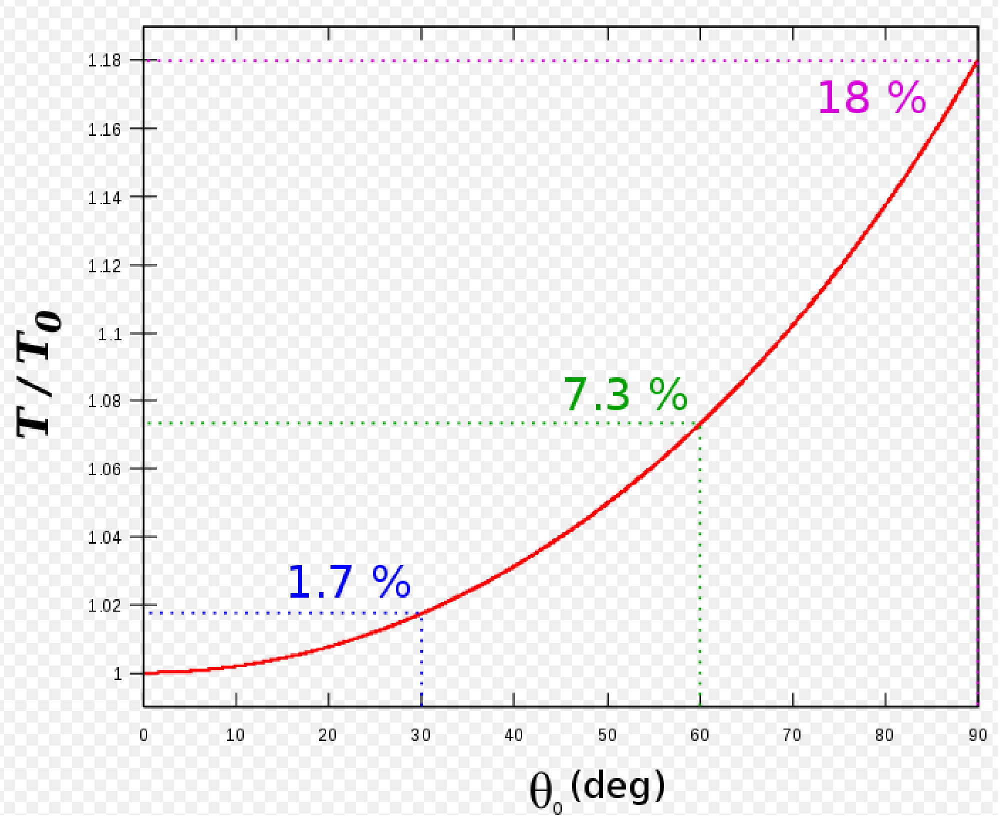
$$\boxed{\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}}$$

El desarrollo en series lleva a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right].$$

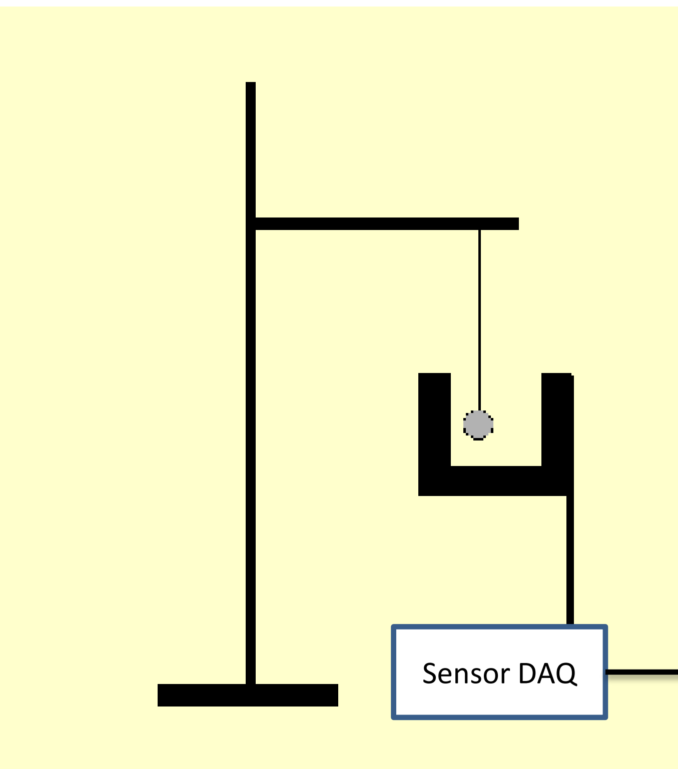
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

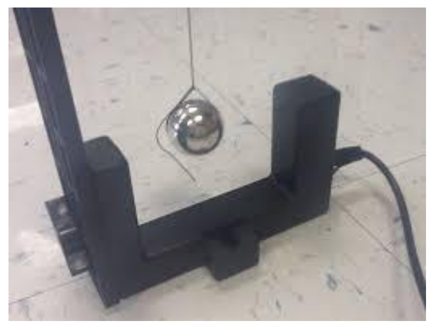


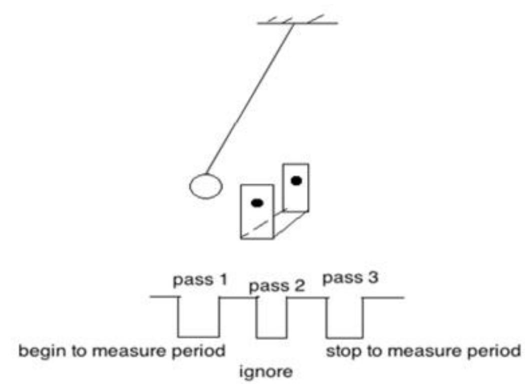
Realización del Trabajo Práctico N° 5

1

- Motar el péndulo con photogate como en el TP N°1
- Elegir una velocidad de muestreo adecuada







Realización del Trabajo Práctico N° 5

2

- Estudiar la dependencia del período del péndulo simple con la amplitud inicial (5 ángulos iniciales)
- Realizar 10 mediciones del período
- Ajustar al módelo

3

- Analizar la dependencia del período con la longitud del hilo (5 longitudes diferentes). ¿ Qué magnitud podemos calcular?
- ¿En qué amplitudes iniciales trabajamos?
- Realizar 10 mediciones del periodo (método de regresion lineal).
- Ajustar al módelo