Laboratorio 1
Turno C

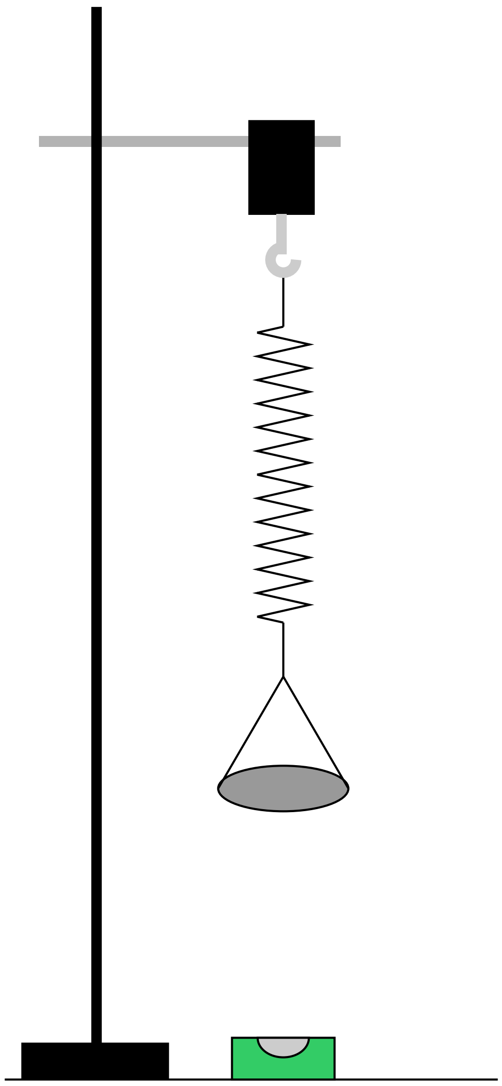
Clase 7
(12/05/2019)

Hoy vamos a estudiar el movimiento oscilatorio de un sistema simple, compuesto por un resorte y una masa.

Mediremos la fuerza restitutiva del resorte, y la posición de la masa acoplada.

Analizaremos los resultados para determinar la constante del resorte. También la dependencia de la frecuencia de oscilación con la masa.

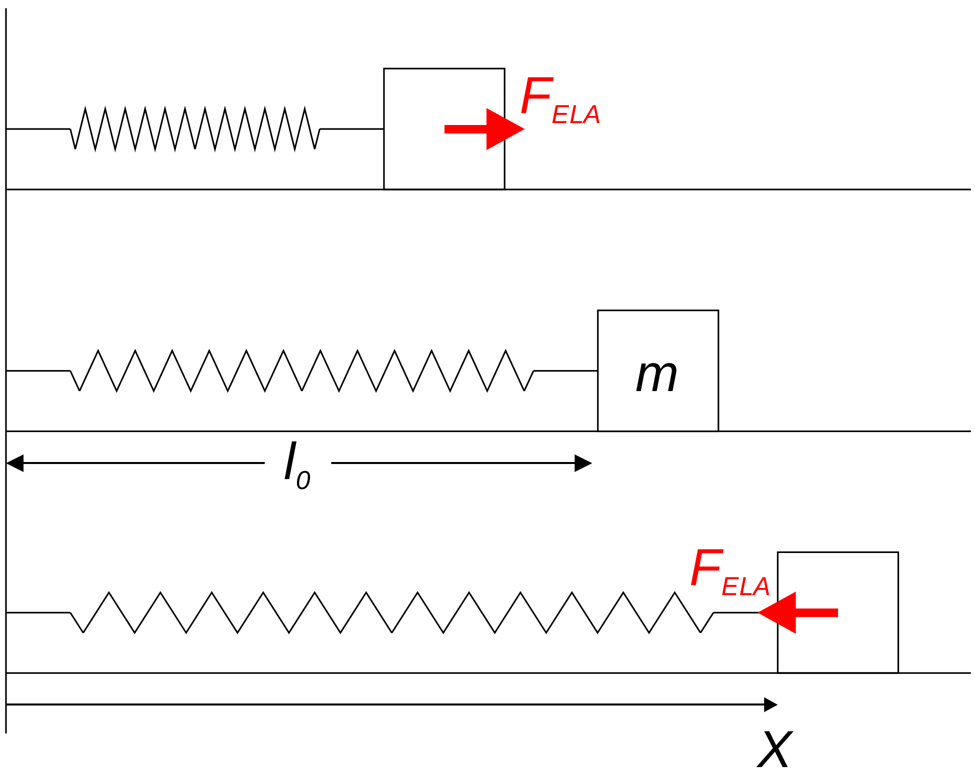
Finalmente, sumergiremos parte del sistema en un líquido y estudiaremos como afecta esto al movimiento.



Sistema Masa-Resorte

Hipótesis

- Movimiento 1D
- Ausencia de rozamiento (por ahora)
- Resorte ideal: perfectamente elástico y sin masa



Fuerza Elástica:

$$\overline{F}_{ELA} = -k(x - l_0)\hat{\mathbf{x}}$$

2da Ley de Newton:

$$\hat{y})\quad m\,\ddot{y} = N - P$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow N = P$$

$$\hat{x})\quad m\,\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

Reordenando queda: $m\,\ddot{x} + k(x - l_0) = 0$ ➡ $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k\,l_0}{m}$

Esto es una ecuación diferencial:

- Ordinaria
- Lineal
- Coeficientes Constantes
- No homogénea
- Orden 2

Solución particular

La teoría nos dice que la solución es de la forma: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

$$\boxed{\ddot{x}_H + \frac{k}{m}x_H = 0}$$

Solución de la ecuación homogénea

Necesitamos dos soluciones linealmente independientes.

Proponemos $\mathrm{sen}(\omega_0 t)$ y $\cos(\omega_0 t)$. Ambas son soluciones si $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

➡ $x_H(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t)$

Como solución particular buscamos algo de la forma de la inhomogeneidad.

Proponiendo una constante, se llega a: $x_P(t) = l_0$

Usando identidades trigonométricas:

$$B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Solución más general: } x(t) = l_0 + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$

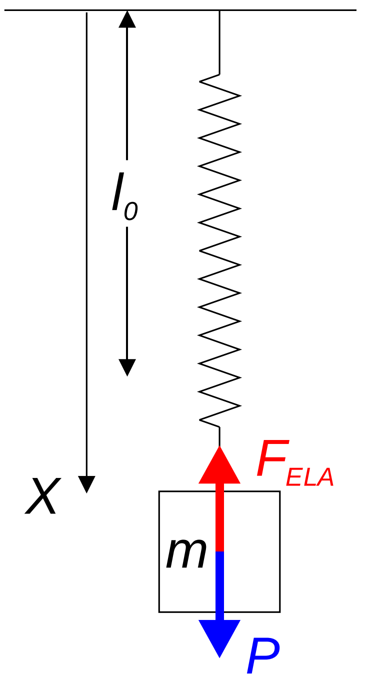
¿De dónde salen las constantes A y φ?

$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= l_0 + A\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ x'(t=0) &= l_0 - \omega_0 A\cos(\varphi) \end{aligned}\right\}$$

Dos ecuaciones con dos incógnitas.

No es un sistema lineal pero siempre se puede despejar.

Si ahora consideramos que el resorte cuelga de un punto fijo:



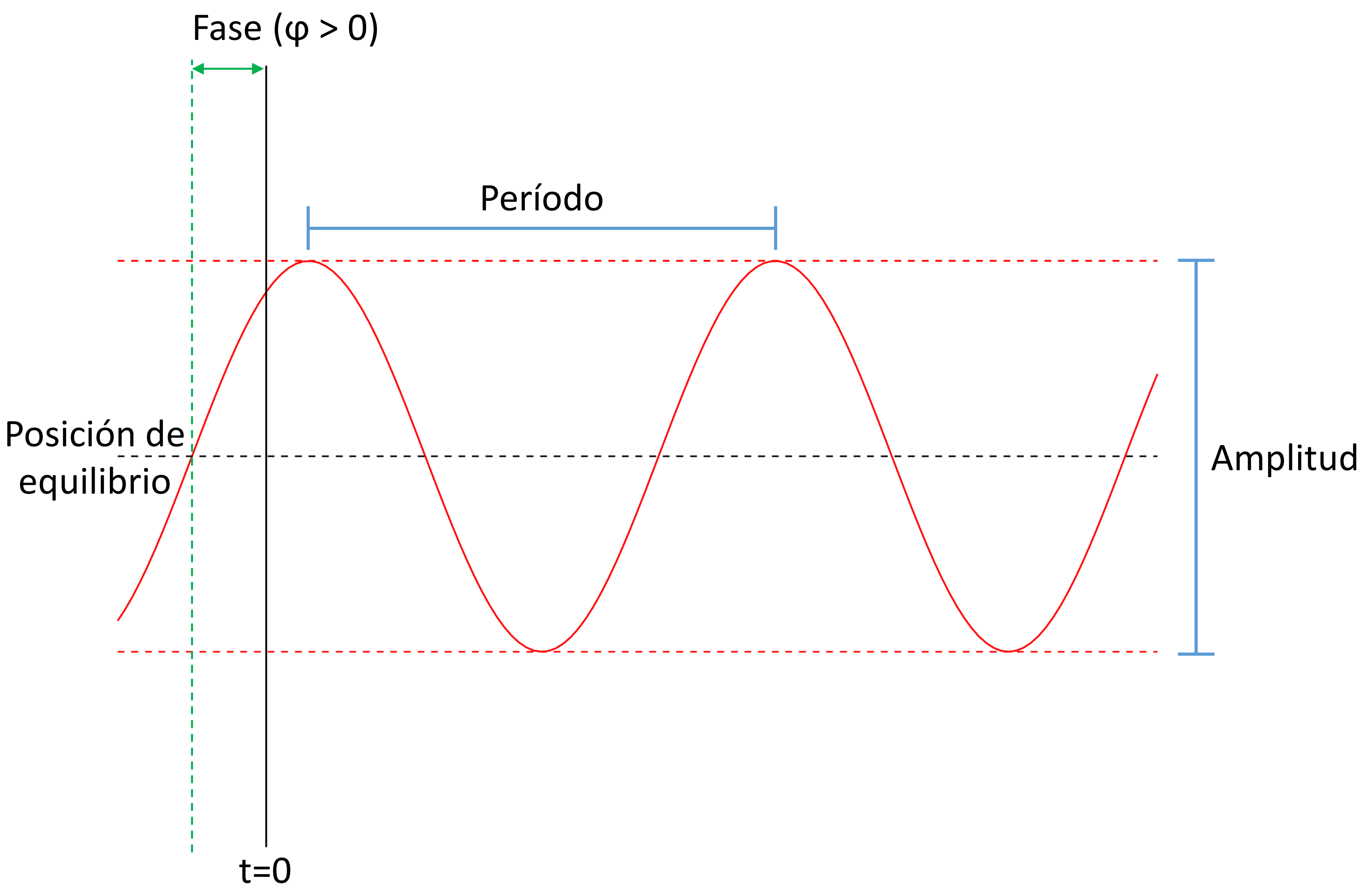
$$m\,\ddot{x} = -k(x - l_0) + m\,g$$

Lo único que cambia es la inhomogeneidad

Por lo tanto, solo se modifica la solución particular

$$x_P(t) = l_0 + \frac{mg}{k}$$

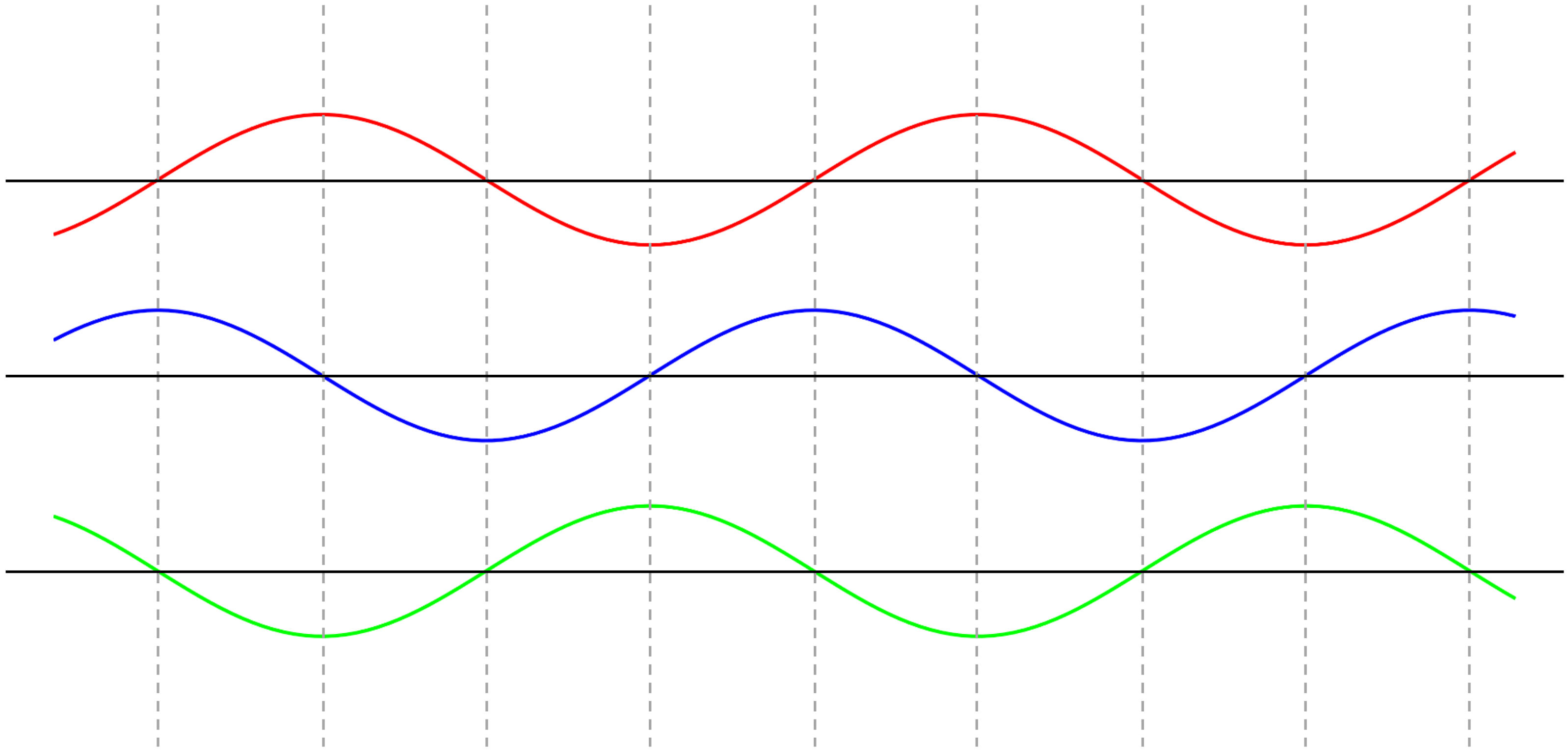
$$x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$


Fase (φ > 0)
Período
Posición de
equilibrio
Amplitud
t=0

Posición: $$x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

Velocidad: $$x'(t) = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Fuerza: $$F_{ELA} = -k(x - l_0) = -mg - k\,A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$



Oscilaciones amortiguadas

Consideremos una fuerza de frenado de la forma

$$F_{ROZ} = -b\,\dot{x}$$

La 2da Ley de Newton queda

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0) - b\,\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k\,l_0}{m}$$

La solución particular anterior todavía sirve $x_P(t) = l_0 + \dfrac{mg}{k}$

Para la ecuación homogénea proponemos una solución de la forma

$$x_H(t) = A\exp(-\alpha\,t)$$

Reemplazando se llega a una ecuación cuadrática para α

$$\alpha^2 - \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\,m\,k}}{2\,m} \qquad \Delta = b^2 - 4\,m\,k$$

Si $\Delta \neq 0$ hay dos soluciones diferentes:

Si = 0 tenemos una sola!

$$x_H(t) = A\exp(-\alpha_1 t) + B\exp(-\alpha_2 t)$$

Caso sobreamortiguado: $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ Exponenciales reales

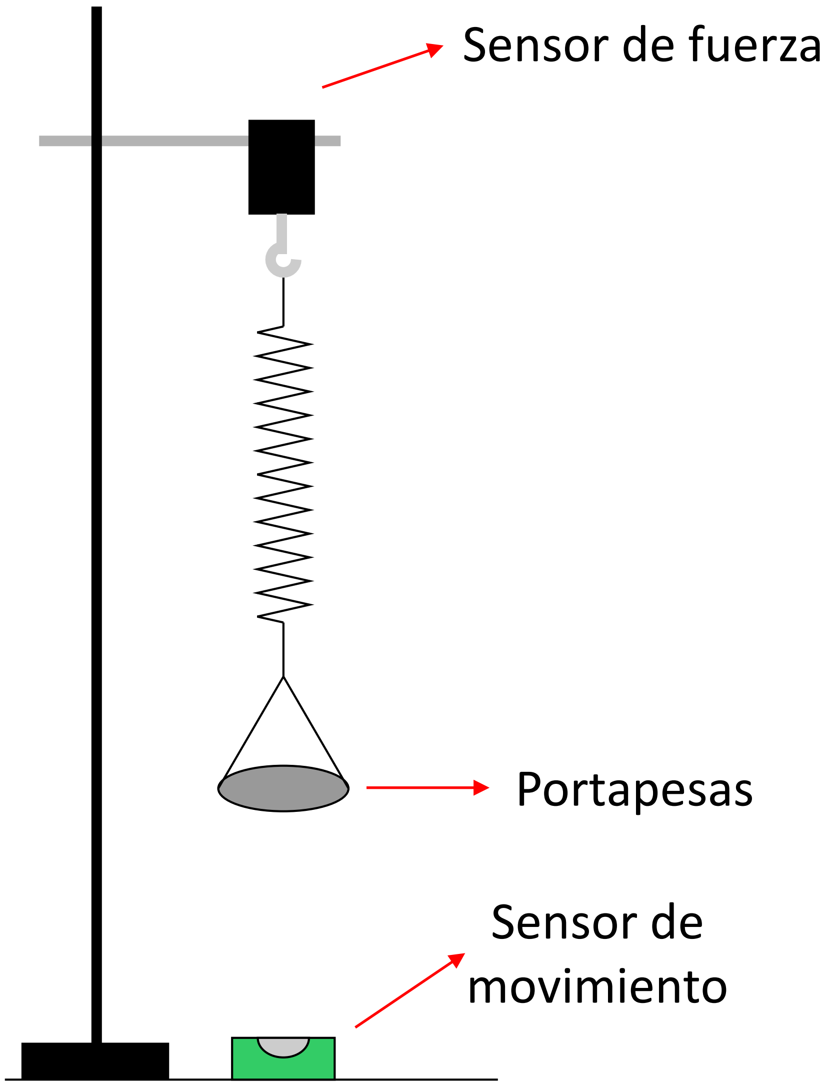
Caso subamortiguado: $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ Exponenciales complejas

$$x_H(t) = A\exp(-\gamma\,t)\,\mathrm{sen}(\omega\,t + \varphi) \qquad \gamma = \frac{b}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Amortiguamiento crítico: $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$x_H(t) = A\exp(-\alpha t) + B\,t\exp(-\alpha t)$$

Montaje Experimental

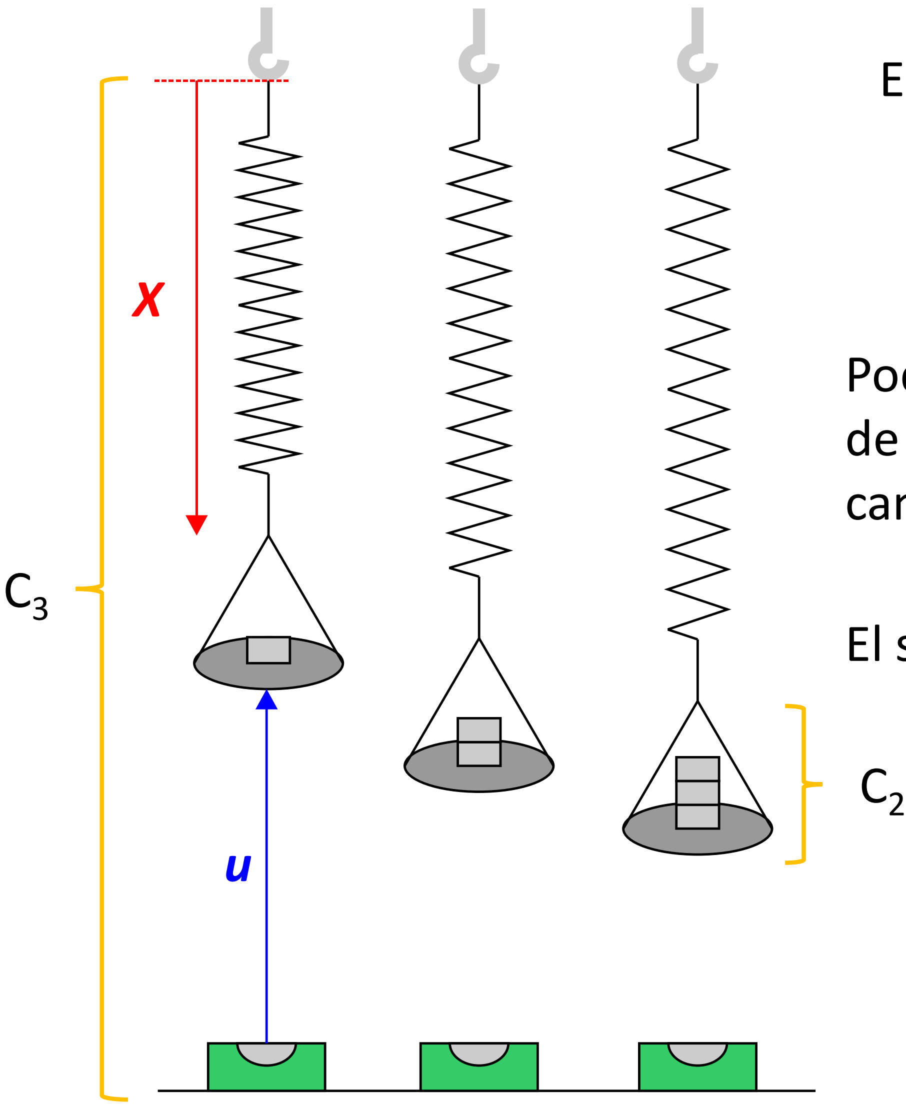


Dos rangos de fuerza: 10 N y 50 N.
A mayor rango, menor resolución.

Fuerza = K0 + K1 * Voltaje

Realizar calibración propia

Experiencia 1: Caso estático – Sistema en equilibrio



En equilibrio: $P + F_{ELA} = 0$

$$P = k(x - l_0) = k\,x + C_1$$

Podemos determinar *k* como la pendiente de una recta de ajuste, midiendo como cambia ***x*** al cambiar el peso colgante.

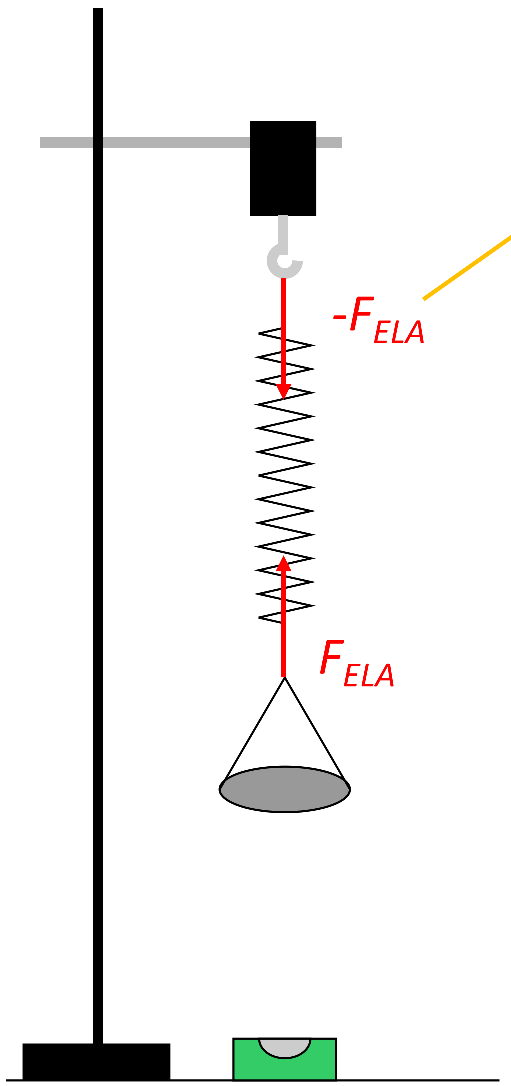
El sensor mide ***u***, pero se pueden vincular:

$$x + u + C_2 = C_3$$

$$x = -u + C_4$$

$$P = -ku + C_5$$

Experiencia 1: Caso estático – Sistema en equilibrio



El sensor no mide la fuerza sobre la masa, sino sobre sí mismo

$$P + F_{ELA} = 0$$

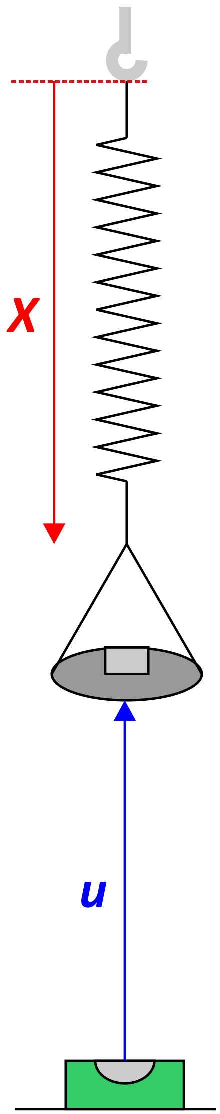
$$P = -F_{ELA} = -ku + C_5$$

Esto es precisamente lo que mide el sensor de fuerza!

Precauciones para medir:

- **Frecuencia de muestreo < 30 Hz**
- Distancia sensor-portapesa > 20 cm
- Estimar rigurosamente los errores en ambas magnitudes

Experiencia 2: Movimiento oscilatorio



Fuera del equilibrio ya no vale $P + F_{ELA} = 0$

Pero sí vale $-F_{ELA} = -ku + C_5$

Podemos medir ***u*** y la fuerza registrada por el sensor durante un movimiento oscilatorio y realizar otro ajuste sobre los resultados para volver a medir *k*.

Pero también se puede estimar parámetros con las señales en función del tiempo por separado.

$$x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\ \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$$u(t) = C_6 + B\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$F(t) = C_7 + C\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t + \varphi)$$

Determinación de parámetros mediante un ajuste no lineal

Supongamos que medimos *u(t)*, también vale para *F(t).*

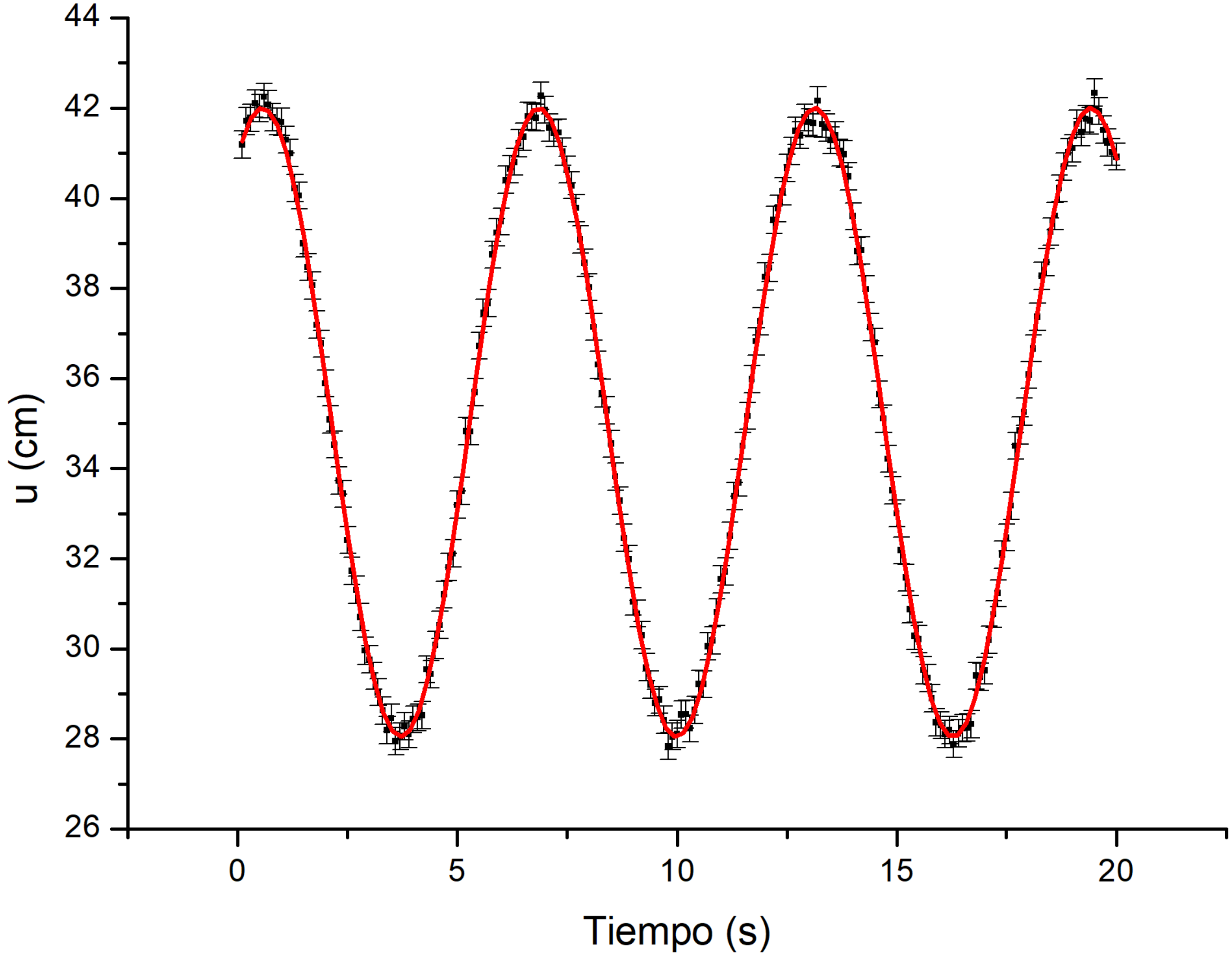
Queremos encontrar los parámetros $(C_6,\ B,\ \omega_0,\ \varphi)$ que minimizan:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{u_i - (C_6 + B\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t_i + \varphi))}{\sigma_i} \right]^2$$

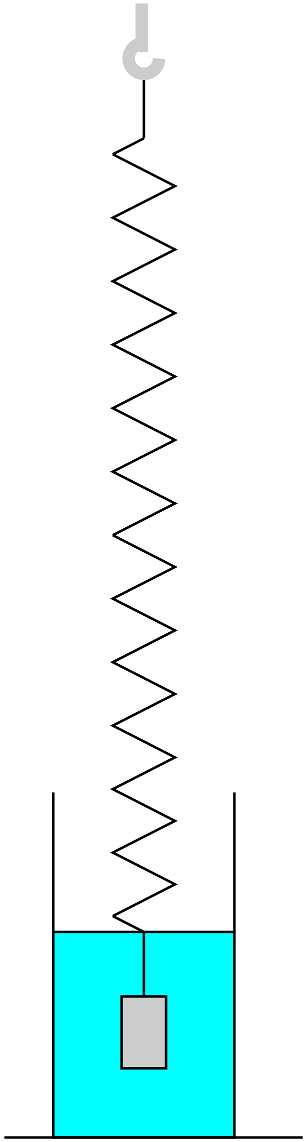
En este caso, hay una dependencia **no lineal** en los parámetros ω_0 y φ

Se resuelve con métodos computacionales. Son iterativos, no tienen solución única y dependen de los parámetros iniciales que se propongan.

Origin tiene métodos incorporados para las funciones que necesitamos. De esta manera, se puede determinar ω_0, y despejar *k* (habiendo determinado *m* con la balanza) para comparar con el resultado de otros métodos.


44
42
40
38
36
34
32
30
28
26
u (cm)
0
5
10
15
20
Tiempo (s)

Experiencia 3: Oscilaciones amortiguadas



Modificamos el montaje experimental:

- Removemos el sensor de movimiento.
- Sumergimos el portapesas en un recipiente con agua.
- Desplazamos el sistema del equilibrio.
- El portapesas debe estar siempre sumergido.

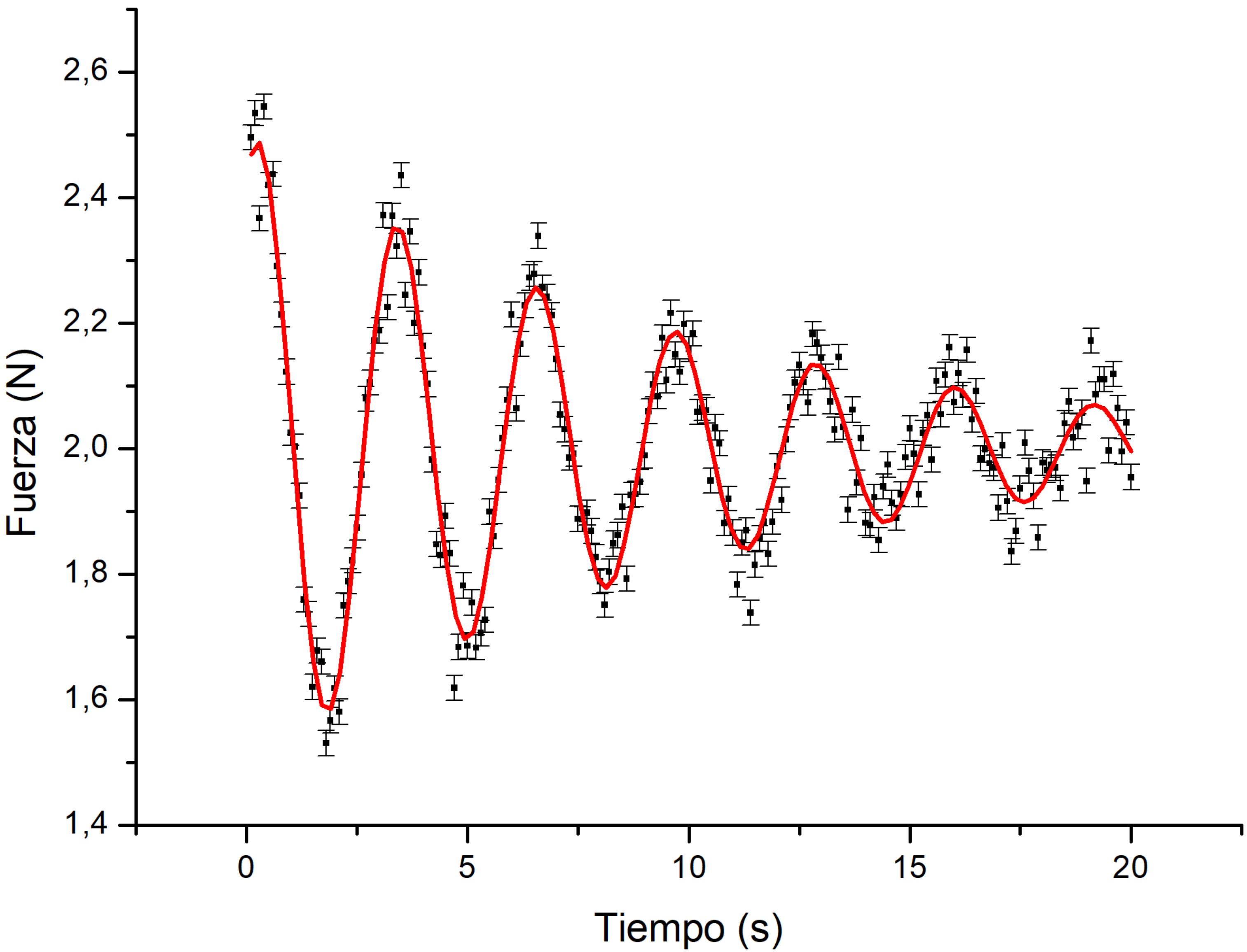
En estas condiciones, registramos F(t).

Esperamos encontrar un resultado de la forma:

$$F(t) = C + A\exp(-\gamma\, t)\,\mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi)$$

Se proponen dos ajustes para determinar parámetros.

Ajuste no lineal de la señal completa para determinar ω y γ



Alternativa: un ajuste lineal, después de linealizar en forma conveniente.

$$F(t) = C + A\exp(-\gamma\, t)\,\underbrace{\mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi)}$$

Los picos de *F(t)* ocurren cuando el seno es 1.

$$F_{pico}(t) = C + A\exp(-\gamma\, t_{pico})$$

$$\Longrightarrow \quad F_{pico} - C = A\exp(-\gamma\, t_{pico})$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(F_{pico} - C) = \ln(A) - \gamma\, t_{pico}$$

Restando y tomando logaritmo, se obtiene una expresión lineal en el coeficiente de amortiguamiento. Este se puede determinar entonces aplicando un ajuste lineal por una recta.

Actividades para hoy

0A) Calibrar el sensor de fuerza: configurar el canal correspondiente como Custom 10 V, medir el voltaje y colgar distintas pesas para construir una recta de calibración Peso vs Voltaje. Determinar K0 y K1.

0B) Calibrar el sensor de posición a partir de dos posiciones de referencia.

1) Medir la posición del portapesas en equilibrio para 5 masas distintas. Analizar los resultados y determinar el valor de la constante *k* del resorte mediante un ajuste lineal por una recta.

2A) Para al menos tres masas distintas, apartar el sistema del equilibrio y registrar la fuerza y la posición simultáneamente. Analizar los resultados y determinar el valor de la constante *k* del resorte a partir de un ajuste lineal.

2B) En los mismos tres casos, determinar el valor de la frecuencia ω_0 a partir de un ajuste no lineal, y analizar si se satisface $\omega_0^2 = k / m$

Actividades para hoy

3) Utilizando las mismas tres masas que antes, sumergir el portapesas en agua y apartar el sistema del equilibrio. Registrar *F(t)* durante las oscilaciones. Para cada masa determinar:

- El parámetro ω mediante un ajuste no lineal de *F(t)*.
- El parámetro γ mediante un ajuste lineal de *F(t)* (tras linealizar, a partir de los valores máximos).

Analizar la validez de $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

Importante:

- Estimar los errores de todas las mediciones de fuerza y posición e incluirlos antes de realizar cualquier ajuste.
- Propagar los errores en cada resultado informado. Cuando se evalua una igualdad, hay que estimar el error de cada miembro.
- Origin define las funciones de manera diferente, hay que despejar los que nos interesan a nosotros, y propagar los errores.