Laboratorio 1
Turno C

Clase 9

(15/06/2019)

Movimiento Circular

El **movimiento circular** es el que se basa en un eje de giro y radio constante, por lo cual la trayectoria es una circunferencia.

Si la velocidad de giro es constante hablamos de movimiento circular uniforme, caso particular de movimiento circular, con radio, centro fijo y velocidad angular constante.

v = velocidad tangencial

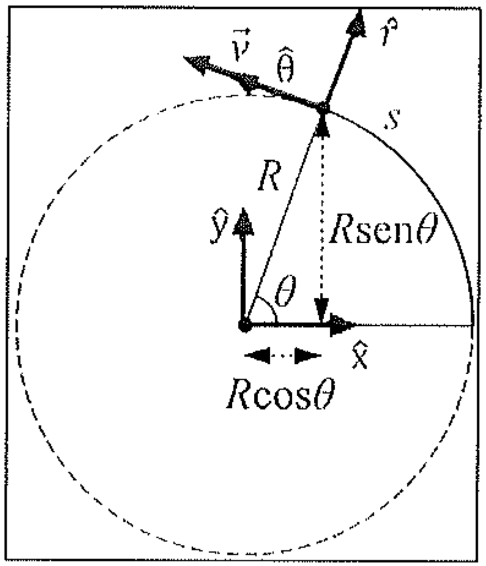


Figura 1 - Esquema de un movimiento circular genérico

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

ángulo entre la particular y el sistema de coordenadas fijo

velocidad angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

aceleración angular

Se puede realizar un cambio de variables a coordenadas polares

$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \theta) \quad \begin{cases} \hat{r} = \cos(\theta)\,\hat{x} + \mathrm{sen}(\theta)\,\hat{y} \\ \hat{\theta} = -\,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y} \\ \vec{r} = r\,\hat{r} \\ \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \end{cases}$$

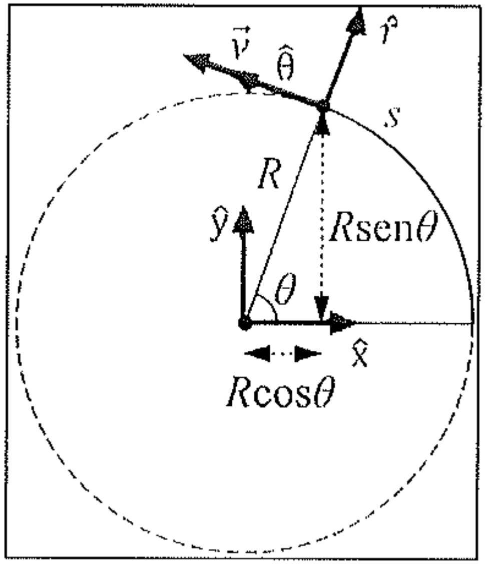


Figura 1 - Esquema de un movimiento circular genérico

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$dS\,\hat{\theta} = v\,dt\,\hat{\theta} \longrightarrow$$ Para cambios de arco S pequeños

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = r\omega\,\hat{\theta}$$

En forma análoga se puede obtener

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\hat{r} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} = -r\omega^2\,\hat{r} + r\alpha\,\hat{\theta}$$

El cociente de las aceleraciones de dos cuerpos (o dos puntos del mismo cuerpo) en interacción mutua es constante

$$m_i\vec{a}_i + m_k\vec{a}_k = 0$$ i y k son dos punto genéricos

Si a_1 y a_2 están sobre la misma línea

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times m_1\vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{a}_2 = 0$$

Observemos esta derivada temporal

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2) = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{a}_2 + \vec{v}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = 0$$

Por ser el producto vectorial de dos vectores paralelos

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1}_{\text{Momento angular de la partícula 1}} + \underbrace{\vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2}_{\text{Momento angular de la partícula 2}}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = cte$$

La asuma de los vectores momento angular respecto de un punto fijo es constante

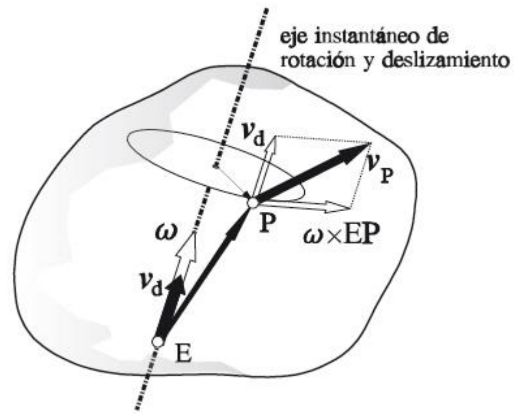
Cuerpo rígido y Momento de Inercia

Se define cuerpo rígido como aquel que no sufre deformaciones por efecto de fuerzas externas .

Un sistema de partículas cuyas posiciones relativas no cambian.

$$\|\vec{r_i} - \vec{r_j}\| = cte \; \forall \; i, j$$

Teorema de Chasles: El movimiento general de un sólido rígido resulta equivalente a una rotación pura alrededor del eje central del sistema de rotaciones ω_i (i=1, 2, ...) más una traslación a lo largo de dicho eje.



$$\vec{v_i} = \vec{v_j} + \vec{\omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

Vector velocidad de rotación del cuerpo

Energía cinética del cuerpo rígido.

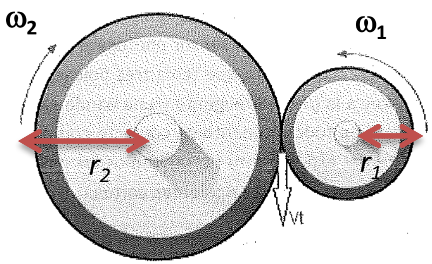
$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i {v_i}^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

Momento de inercia del cuerpo respecto del eje de rotación que pasa por el origen de coordenadas

I_o

Experiencia

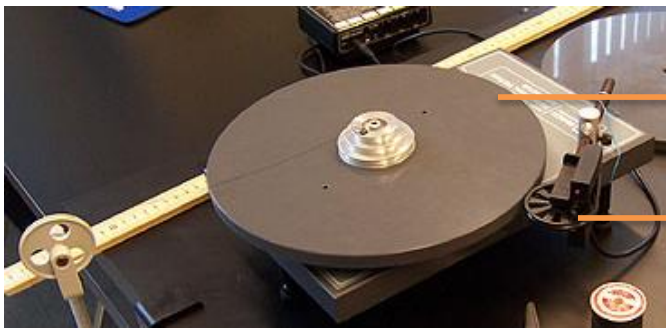
- Primera etapa : Familiarizarse con la medición de velocidad angular de un disco rotando



$$V_1 = V_2$$
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$
$$r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2$$

Derivando temporalmente

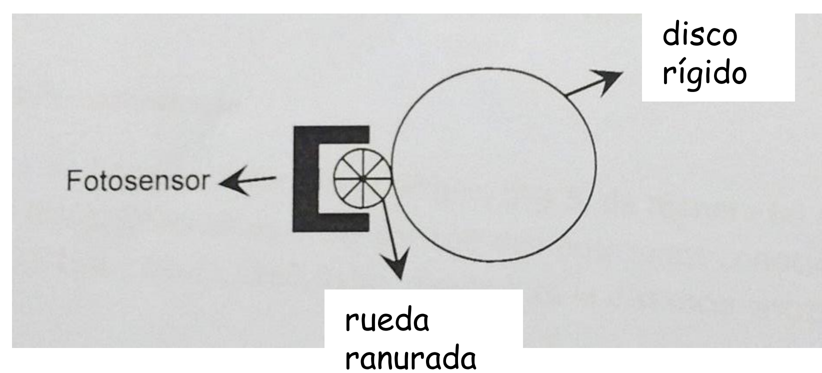
aceleración angular



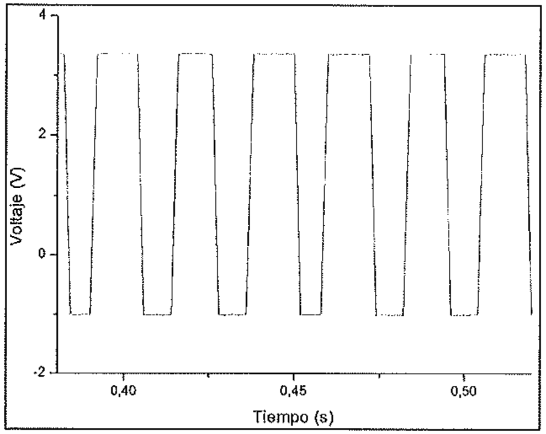
disco rígido

rueda ranurada

- Se utiliza una rueda ranurada (de radio r_1) y un photogate



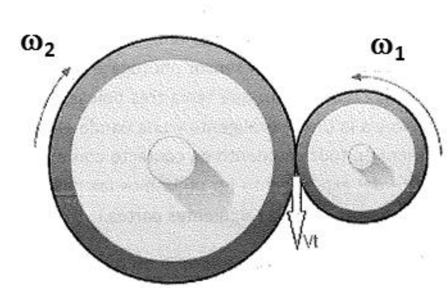
- Hacemos girar manualmente ambos discos y calculamos la velocidad de la rueda ranurada (polea inteligente) por medio del photogate.

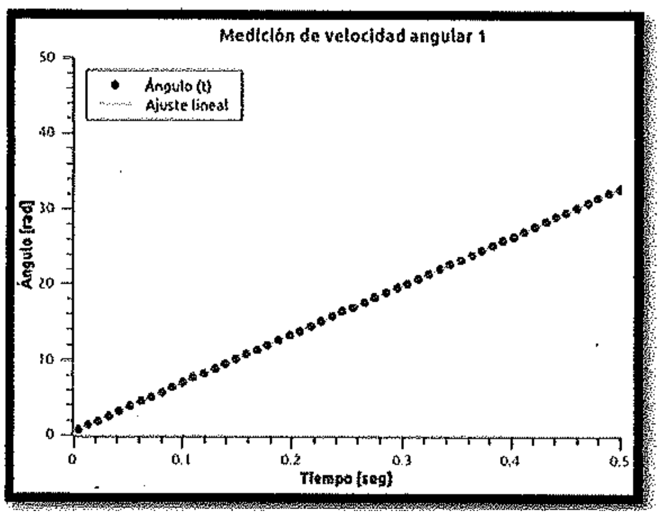


- Elegir una adecuada velocidad de muestreo
- La polea tiene 10 ranuras.
- Calculamos la velocidad angular de la rueda ranurada a partir un gráfico ángulo barrido vs tiempo. Estimar errores
- Con esa información se obtiene la velocidad angular del disco rígido considerando

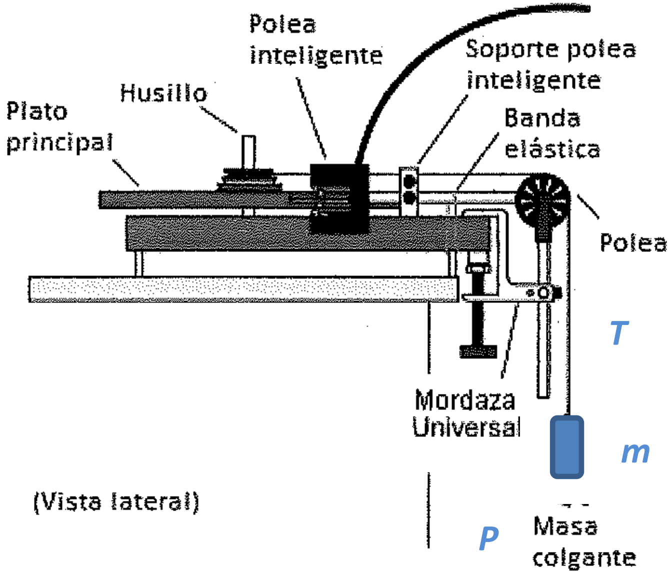
$$V_1 = V_2$$

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$





- Hacer esta experiencia tres veces.



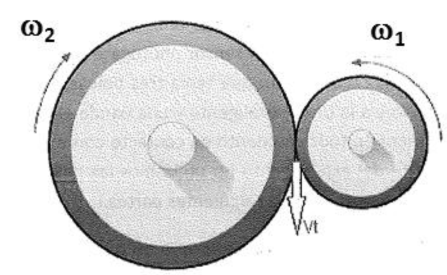
- Segunda etapa : Medir la aceleración angular del disco rígido bajo la acción de una fuerza constante.
- Estimar el momento de inercia
- Vincular una polea central del disco a una pesa (masa colgante) mediante un hilo que pasa por una polea auxiliar.

$$P - T = m\, a_m$$ Balance de fuerzas

$$\vec{T} x \vec{r} = I_{sr} \vec{\alpha}$$ Ecuación del torque (*)

$$\vec{T} x \vec{r} - \overrightarrow{\tau_{roz}} = I_{sr} \vec{\alpha}$$ Ecuación del torque (con rozamiento)

radio de la polea donde se enrolla el hilo



$$V_1 = V_2$$
$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \longrightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 \longrightarrow \alpha = \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

$$m(g - a_m) = T \xrightarrow[a_m = \alpha r]{\text{Reemplazando en la ec. del torque (*)}} \alpha(mr^2 + I_{sr}) = mgr - \tau_{roz}$$

Si la masa desprende del hilo

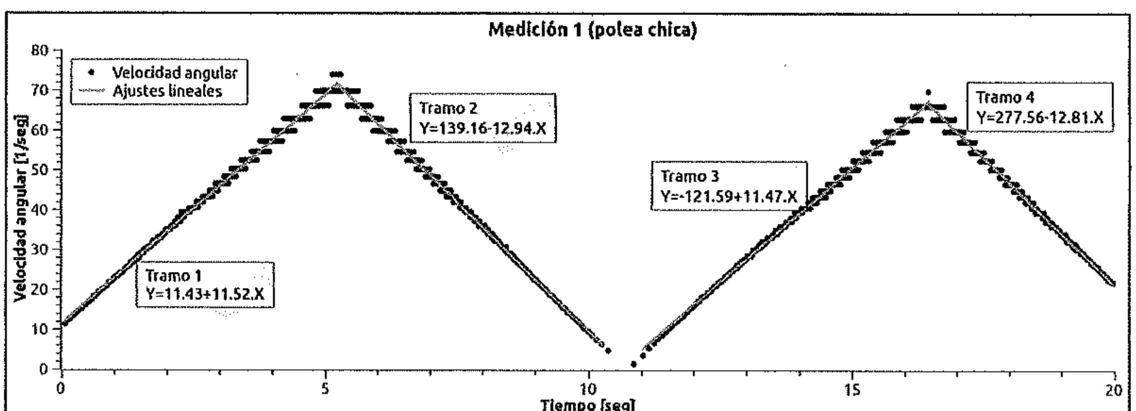
desaceleración $\longrightarrow$ $\alpha' I_{sr} = -\tau_{roz}$

- Ponemos a funcionar la adquisición de datos (del canal de photogage)
- Liberamos el peso y el disco comienza a girar.
- Se calcula la velocidad angular a distintos tiempos y se grafica (de su pendiente se obtiene la aceleración angular).
- Se hace la misma medición para la desaceleración (se libera la masa una vez que se llega a la extensión máxima del hilo)
- Lo hacemos para tres pesos y para dos poleas del disco rígido
- Con las ecuaciones

$$\alpha(mr^2 + I_{sr}) = mgr - \tau_{roz}$$

$$\alpha' I_{sr} = -\tau_{roz}$$

se pueden calcular el momento de inercia y el torque de rozamiento.



- <u>Tercera etapa </u>: Medición de la posición de la pesa (masa) en función del tiempo

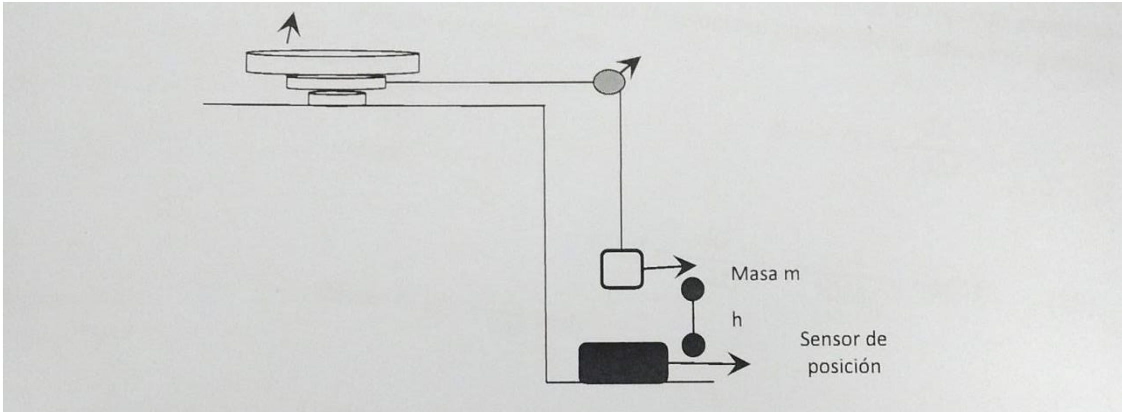


Figura 5. Esquema del dispositivo experimental. Donde m es la masa utilizada y h la distancia entre la masa y el sensor de posición.

- Calibrar el sensor de posición. Encontrar la frecuencia de muestreo adecuada. Estimar el error.
- Hacer la experiencia par dos masas. (40 g y 120 g aprox).
- Obtener la fuerza de rozamiento a partir de la variación de energía mecánica.

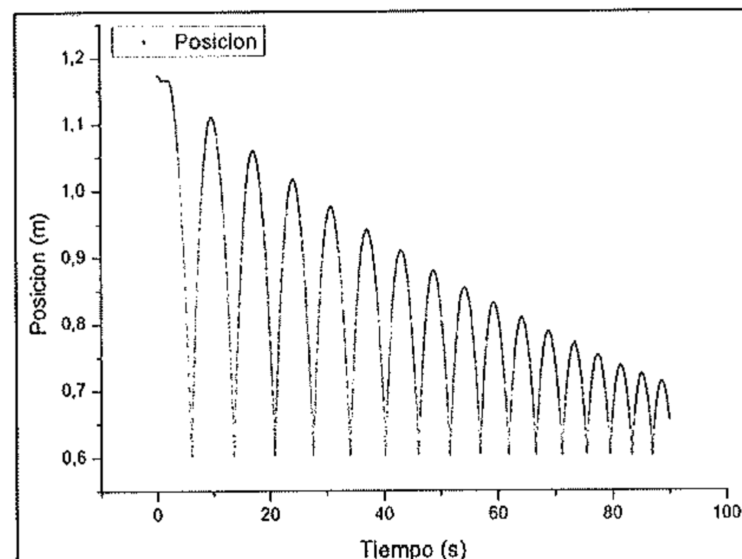


Figura 7 – Gráfico que muestra los datos adquiridos para una repetición del experimento.