

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2021

MEDICIONES INDIRECTAS

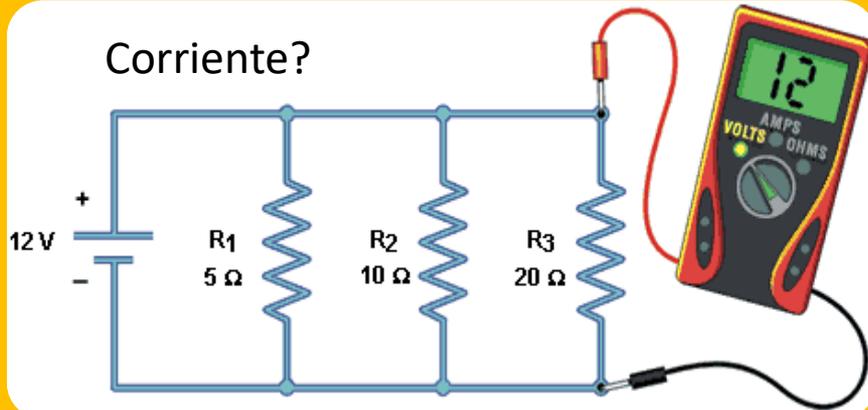
Lucía Famá, Mauro Silberberg
Sofía Angriman



Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Clases de Mediciones

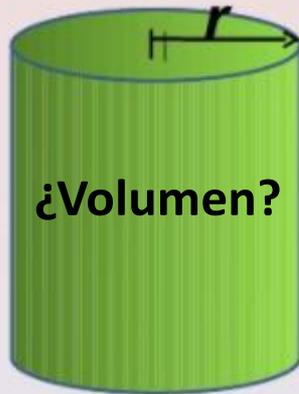
Corriente?



Aceleración?



h ¿Volumen?



Indirectas (MI)

La medida deseada se obtiene a partir de un proceso matemático sobre otras medidas

Ej.: Volumen de un cubo a partir de la medida de sus lados y la relación matemática

Mediciones Indirectas (MI)

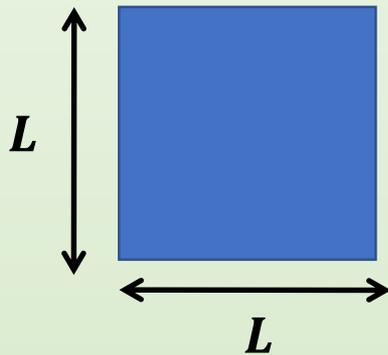
Por ejemplo: AREA de un cuadrado

$$A = (A_0 \pm \Delta A) \text{ Ud.}$$

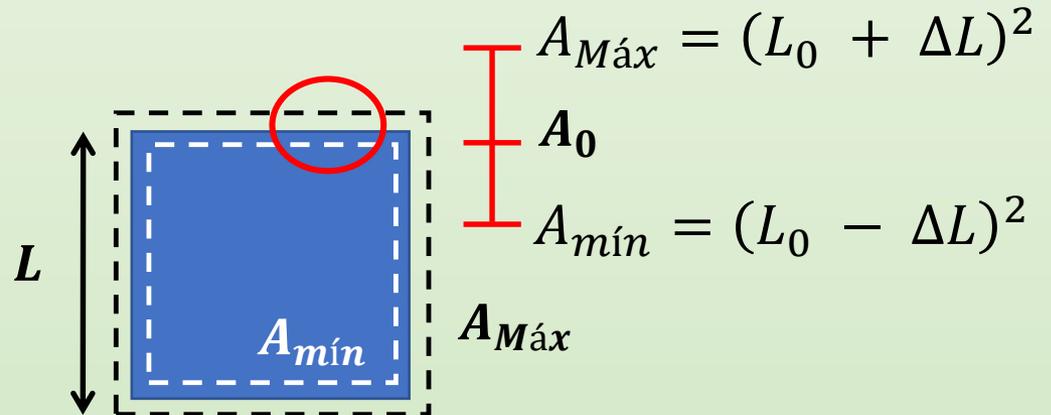
$$A = L^2$$

$$A_0 - \Delta A \leq A \leq A_0 + \Delta A$$

$$L = (L_0 \pm \Delta L) \text{ Ud.}$$



Estimemos un posible valor de A



Estimemos un posible valor de A

$$A = L^2 \quad A = (A_0 \pm \Delta A) \text{ Ud.} \quad A_{\text{mín}} \leq A \leq A_{\text{Máx}}$$

$$A_{\text{mín}} = (L_0 - \Delta L)^2$$

$$A_{\text{Máx}} = (L_0 + \Delta L)^2$$

VALOR MÁS REPRESENTATIVO

$$A_0 = \frac{A_{\text{Máx}} + A_{\text{mín}}}{2}$$

$$A_0 = \frac{2 L_0^2 + \cancel{2 \Delta L^2}}{2} \approx L_0^2$$

$$A_0 = L_0^2 = A(L_0)$$

Evaluar en L_0

INCETIDUMBRE

$$\Delta A = \frac{A_{\text{Máx}} - A_{\text{mín}}}{2}$$

$$\Delta A = \frac{4 L_0 \Delta L}{2} = 2 L_0 \Delta L$$

$$\Delta A = 2 L_0 \Delta L$$

$$2 L_0 \Delta L = \left. \frac{dA}{dL} \right|_{L_0}$$

$$A = A(L_0) \pm \left. \frac{dA}{dL} \right|_{L_0} \Delta L$$

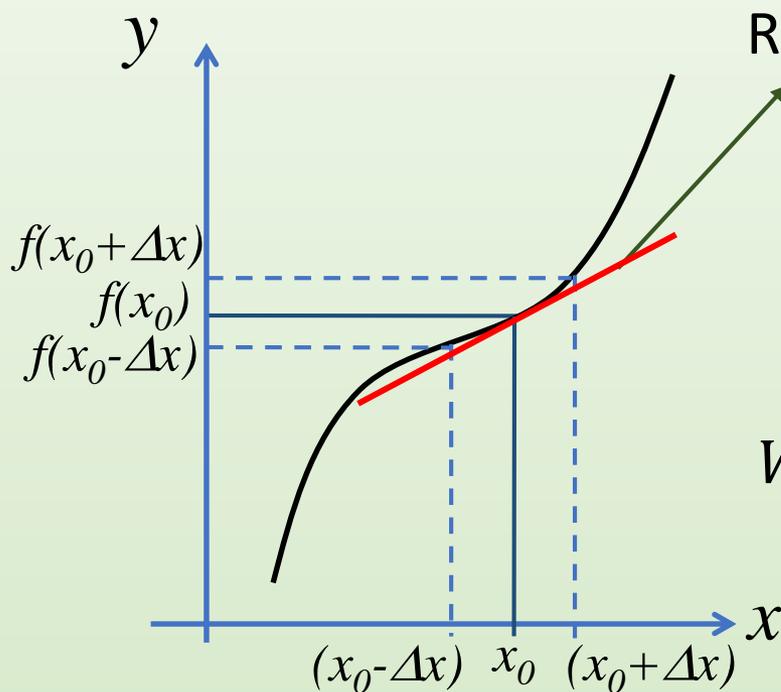
Supongamos que queremos determinar el valor de una MF

W que depende de otra MF x

$$W = f(x)$$

$$W = (W_0 \pm \Delta W) \text{ Ud.}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) \text{ Ud.}$$



La pendiente será: $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}$

Desarrollo de Taylor:

$$W = f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

$$W_0 = f(x_0)$$

$$\Delta W = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \Delta x$$

Evaluar f en el entorno de x_0

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF

W que depende de otras 2 MF (x e y)

$$W = f(x, y)$$

$$W = (W_0 \pm \Delta W) Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y) Ud.$$

x, y son variables independientes

Desarrollo de Taylor

$$W = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$$

$x \approx x_0$
 $y \approx y_0$

Δx Δy

Derivada parcial respecto de la variable x

Derivada parcial respecto de la variable x, evaluada en x_0 e y_0

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF

W que depende de otras 2 MF (x e y)

$$W = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) \right. + \dots$$

(Note: In the original image, $f(x_0, y_0)$ is circled in orange, and the partial derivative terms are circled in red. Arrows point from the orange circle to the W_0 box and from the red circle to the ΔW box. A red bracket underlines the partial derivative terms, with arrows pointing to Δx and Δy labels below them.)

$$W_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \right)^2 \Delta y^2}$$

$$\Delta W = \left| \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left| \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta y$$

$$\Delta W^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \right)^2 \Delta y^2$$

Generalizando

Valor de una MF determinada en forma indirecta $W = f(x, y, z, \dots)$

$$W = (W_0 \pm \Delta W) Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x) Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y) Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z) Ud.$$

⋮

$x, y, z \dots$ variables
independientes

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{x_0, y_0, \dots}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{x_0, y_0, \dots}\right)^2 \Delta y^2 + \dots}$$

Para Practicar!!!

Obtener el período de un péndulo (T) colgado de un hilo de longitud l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \begin{array}{l} l = (50,0 \pm 0,1) \text{ cm} \\ g = (9,81 \pm 0,01) \text{ m/s}^2 \end{array}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}} \quad \begin{array}{l} \left. \frac{\partial f(l, g)}{\partial l} \right|_{\substack{l_0, \\ g_0}} = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{l_0 g_0}} \\ \left. \frac{\partial f(l, g)}{\partial g} \right|_{\substack{l_0, \\ g_0}} = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{l}}{g^{3/2}} \end{array}$$

$$\Delta T = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial f(l, g)}{\partial l} \right|_{\substack{l_0, \\ g_0, \dots}} \right)^2 \Delta l^2 + \left(\left. \frac{\partial f(l, g)}{\partial g} \right|_{\substack{l_0, \\ g_0, \dots}} \right)^2 \Delta g^2}$$

Casos comunes ... Incerteza en MI

$$A = (A_0 \pm \Delta A) \text{ Ud.}$$

Sumas y Restas:

$$A = B + C$$

$$A_0 = B_0 + C_0$$

$$\Delta A = \Delta B + \Delta C$$

$$A = B - C$$

$$A_0 = B_0 - C_0$$

Multiplicación y División:

$$A = B * C$$

$$A_0 = B_0 * C_0$$

$$\varepsilon_{rA} = \varepsilon_{rB} + \varepsilon_{rC}$$

$$A = B / C$$

$$A_0 = B_0 / C_0$$

$$\varepsilon_{rA} ? \text{ TAREA!!}$$

OBTENER EL VOLUMEN DE UNA MONEDA MEDIANTE DIFERENTES MÉTODOS

- Determinar el **volumen de una moneda mediante diferentes métodos**. Reportar SIEMPRE con la expresión: $V = (\bar{V} \pm \Delta V) Ud.$
- **Dentro del grupo**: elijan una **moneda similar** (mismo valor y mismo material)
- **Cada integrante elija 2 métodos**
- El grupo reportará en una tabla con los resultados obtenidos por todos los integrantes

Posibles Métodos

1

VOLUMEN A PARTIR DE SU GEOMETRÍA

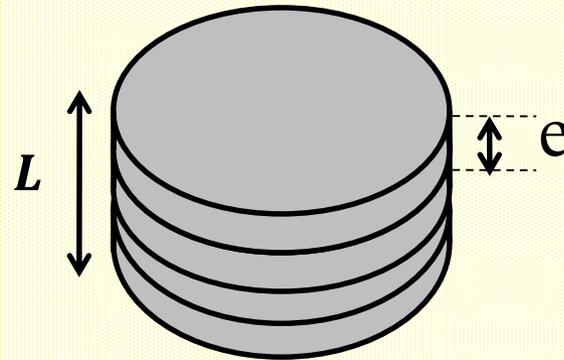
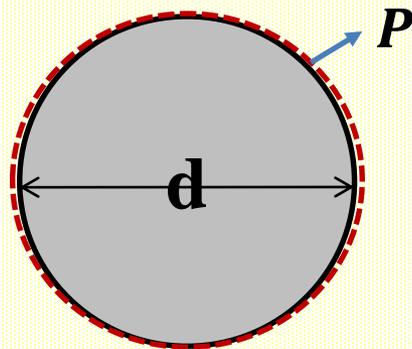
A- Utilizando el diámetro (d) y/o B- Utilizando el perímetro (P)

$$V = \pi r^2 e$$

$$r = \frac{d}{2}$$

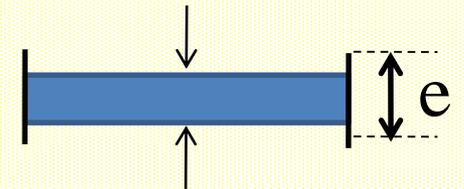
$$r = \frac{P}{2\pi}$$

$$e = \frac{L}{n}$$



Instrumento

Método

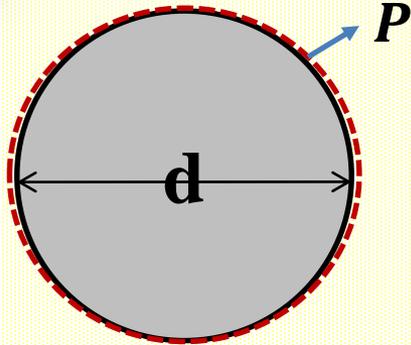


Diámetro de monedas (Banco Central de la República Argentina)

http://www.bcra.gov.ar/MediosPago/Nueva_familia_monedas.asp

1

VOLUMEN A PARTIR DE SU GEOMETRÍA



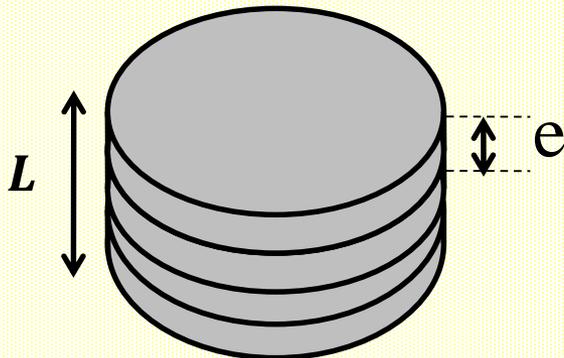
$$V_0 = \pi r_0^2 e_0$$

$$r = (r_0 \pm \Delta r) U d.$$

$$e = (e_0 \pm \Delta e) U d.$$

$$\Delta V^2 = \left(\left. \frac{\partial V(r, e)}{\partial r} \right|_{r_0, e_0} \right)^2 \Delta r^2 + \left(\left. \frac{\partial V(r, e)}{\partial e} \right|_{r_0, e_0} \right)^2 \Delta e^2$$

¿y cómo obtengo Δr y Δe ?



$$r = \frac{d}{2} \quad r = \frac{P}{2\pi}$$

$$d = (d_0 \pm \Delta d) U d.$$

⋮

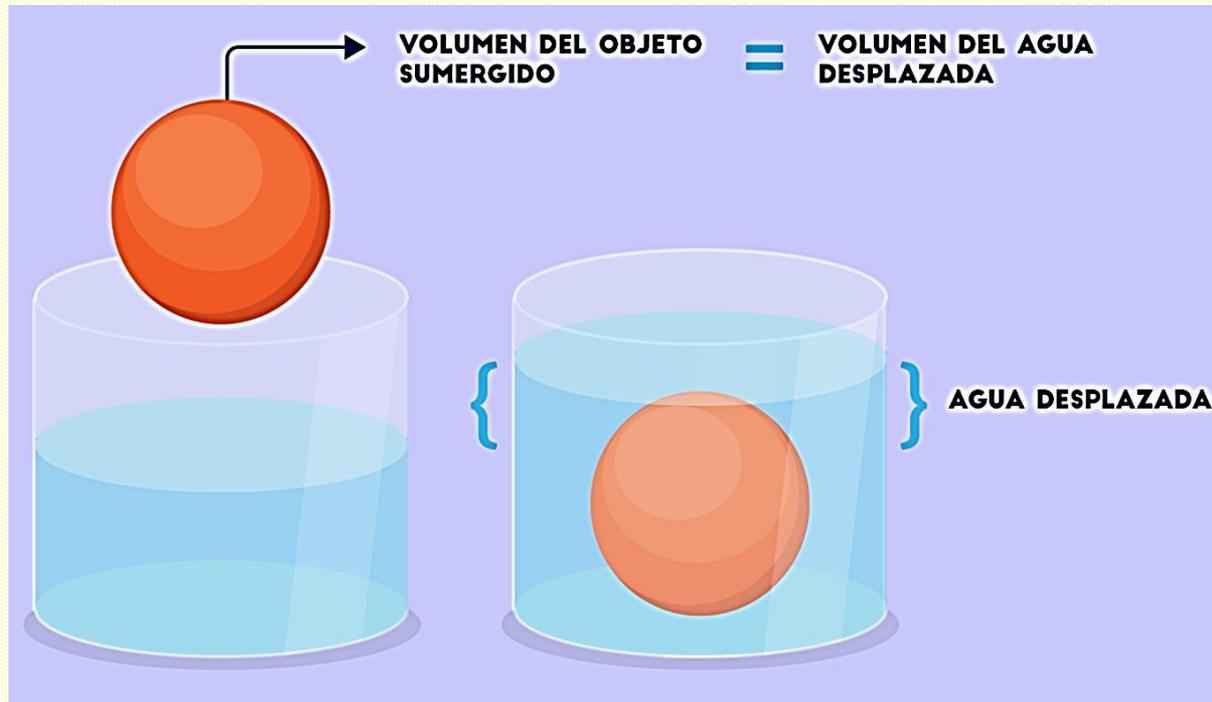
- Si uso $r = d/2 \rightarrow$ propagar el error de d
- Si uso $r = P/2\pi \rightarrow$ propagar el error de P
- Si mido e directamente \rightarrow Me salvo
- Si uso $L = ne \rightarrow$ propagar el error de L

2

VOLUMEN SUMERGIENDO EL CUERPO EN AGUA

$$V = V_f - V_i$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial V_f} \Big|_{V_{f0}, V_{i0}} \right)^2 \Delta V_f^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial V_i} \Big|_{V_{f0}, V_{i0}} \right)^2 \Delta V_i^2$$



Instrumento

¿Si no veo diferencia de volumen?

Método

Puedo agregar monedas iguales!!

$$V' = \frac{V}{n}$$



VOLUMEN A PARTIR DE LA MASA Y LA DENSIDAD

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial m} \bigg|_{\rho_0} \right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \bigg|_{m_0} \right)^2 \Delta \rho^2$$

Instrumento

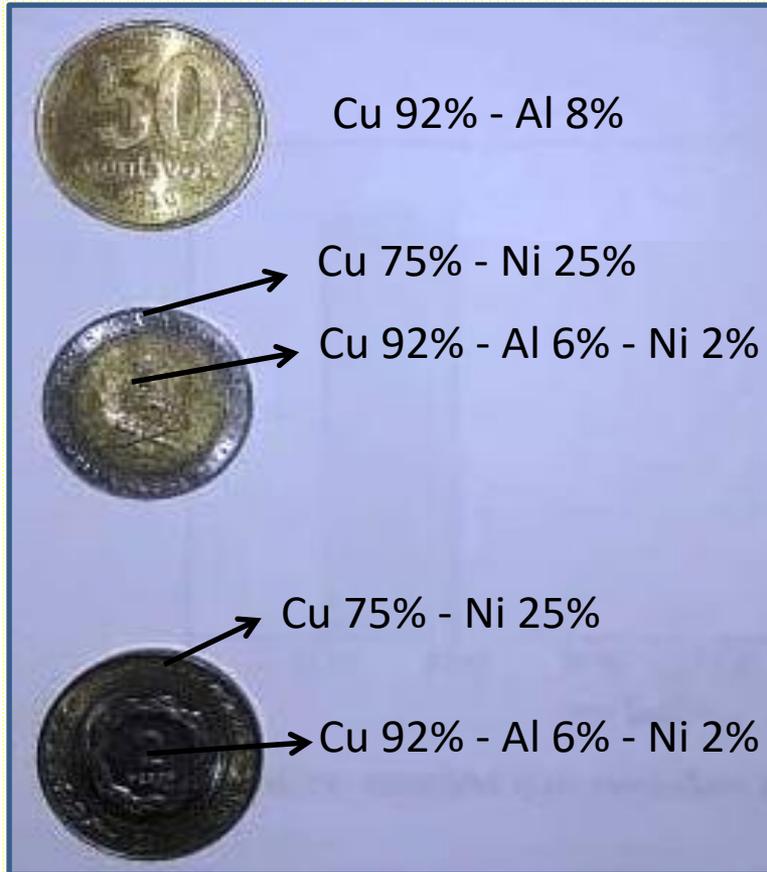
Balanza $\rightarrow m$

Método

Literatura $\rightarrow \rho$

3

VOLUMEN A PARTIR DE LA MASA Y LA DENSIDAD

Datos útiles

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Al}} = 2,70 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Ni}} = 8,91 \text{ g/cm}^3$$

¿Qué incerteza tiene ρ ?

¿Los materiales serán libres de impurezas?

3

VOLUMEN A PARTIR DE LA MASA Y LA DENSIDAD



Acero electrodepositado con Cu



Acero electrodepositado con Latón



Alpaca

Datos útiles

$$\rho_{\text{acero}} \sim 7,85 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Alpaca}} = 8,73 \text{ g/cm}^3$$

¿y el valor de la densidad por el depósito de Cu o Latón?

Preguntas frecuentes

Podemos hablar de precisión y exactitud de resultados, pero

¿Cómo sabemos si una medición es confiable?

Debemos cuestionarnos sobre: el método, instrumento, objeto, observador...

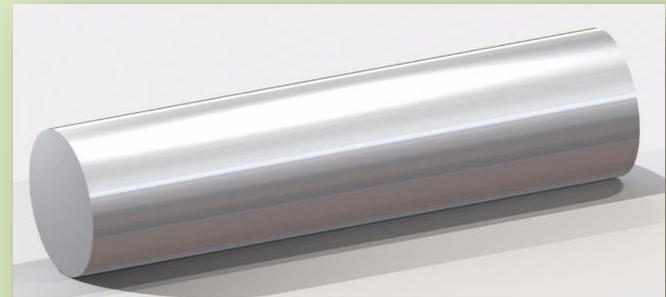
EVALUAR LAS HIPÓTESIS EMPLEADAS!!

Instrumento para determinar masas



Balanza de precisión

*Uso la densidad del material
tomado de la literatura*



Barra de aluminio

¿Es aluminio puro?

OBTENER EL VOLUMEN DE UNA MONEDA MEDIANTE DIFERENTES MÉTODOS

Consideraciones a tener en cuenta

- Analizar cómo influye la incerteza absoluta de cada magnitud en la incerteza absoluta del volumen.
- Precisión de los instrumentos utilizado.
- Ventajas y desventajas de cada método.
- Confiabilidad del método (de las magnitudes utilizadas, por ej.: la medí yo?, qué tan confiable es?)

!A MEDIR!

Cómo reportar un resultado: Cifras Significativas

Para expresar un resultado se deben incluir sólo las cifras que tienen algún significado experimental: **Las CIFRAS SIGNIFICATIVAS se evalúan en Δx**

4 Cifras significativas

$\Delta x = 0,00003400$

Los 0 sin un número distinto de cero delante no son significativos

Los 0 después de un número distinto de cero son significativos

Los números distintos de 0 son significativos

4 Cifras Significativas 6 Cifras Significativas

$\Delta x = 1,093$ $\Delta x = 18,9030$

2 Cifras significativas:

$\Delta x = 1,1$ $\Delta x = 19$

1 Cifra significativa:

$\Delta x = 1$ $\Delta x = 20$

2 Cifras significativas: $\Delta x = 0,000034$

1 Cifra significativa: $\Delta x = 0,00003$

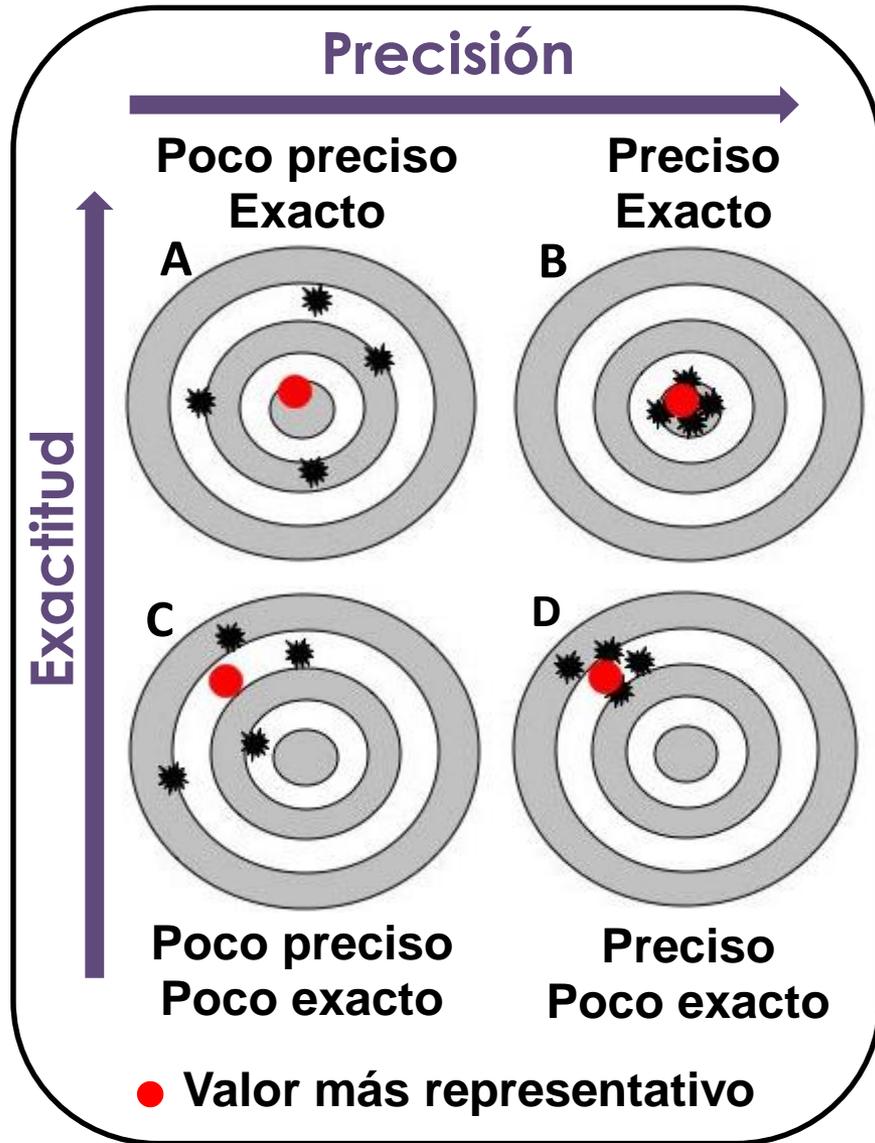
2 Cifras significativas: 1 Cifra significativa:

$x_0 = 32,24089$ $x_0 = 32,24$ $x_0 = 32,2$

$\Delta x = 0,2319$ \longrightarrow $\Delta x = 0,23$ \longrightarrow $\Delta x = 0,2$

$x = 32,24 \pm 0,23$ $x = 32,2 \pm 0,2$

Precisión y Exactitud



INSTRUMENTO

- **Precisión:** la mínima división de escala – resolución del instrumento
- **Exactitud:** Error de calibración

RESULTADO/MÉTODO

- **Precisión:** se evalúa $\varepsilon_r = \left| \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right|$

Menor ε_r mayor precisión

- **Exactitud:** se evalúa la cercanía del valor más representativo obtenido mediante diferentes métodos al valor tabulado

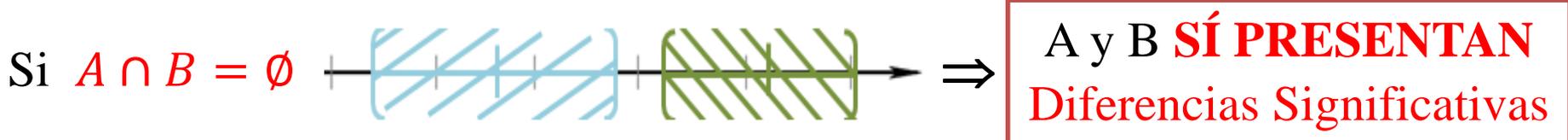
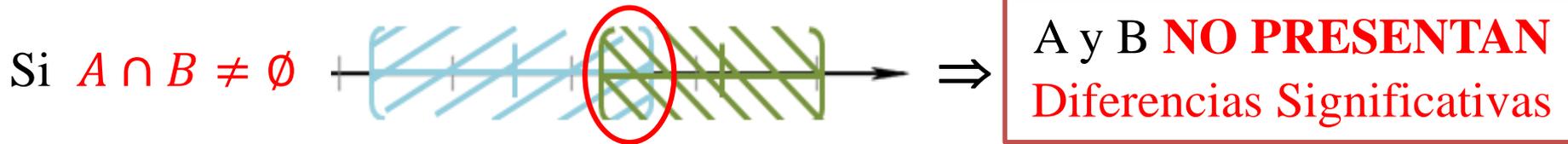
Más exacto el valor más representativo más cercano al tabulado

Diferencias Significativas

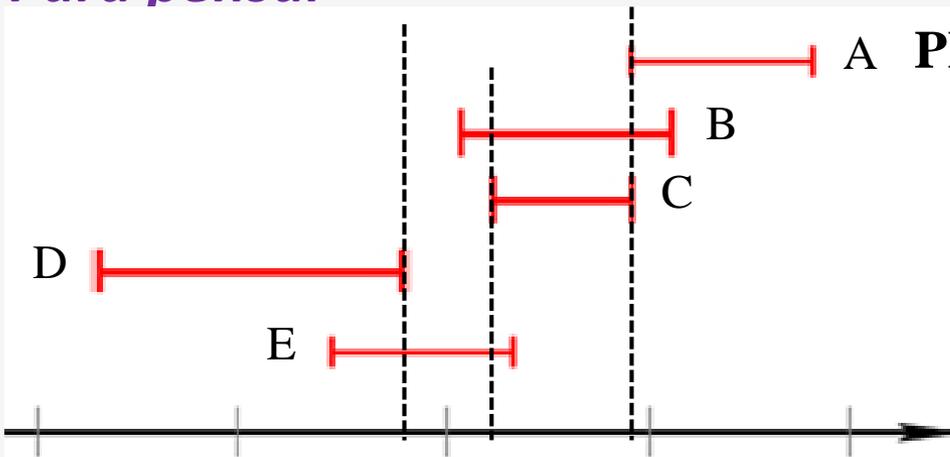
MÉTODO GRÁFICO: Sirve para comparar más de 2 resultados al mismo tiempo

 $A = \bar{A} \pm \Delta A$

 $B = \bar{B} \pm \Delta B$



Para pensar



Comparando D con A, B y C:

A PRESENTAN diferencias significativas

$$D \cap A = \emptyset, D \cap B = \emptyset \text{ y } D \cap C = \emptyset$$

¿Qué ocurre entre D y E?

¿Y entre A y B, A y C, y A y E?

¿Y entre B y C, y B y E?

Diferencias Significativas

MÉTODO CON FÓRMULA: Se puede usar de a pares de resultados

$$A = \bar{A} \pm \Delta A \quad B = \bar{B} \pm \Delta B$$

$$\text{Si } |\bar{A} - \bar{B}| \leq \Delta A + \Delta B$$

\Rightarrow

A y B **NO PRESENTAN**
Diferencias Significativas

Para pensar

$$A = 2,278 \pm 0,023$$

$$B = 1,964 \pm 0,019$$

$$C = 2,11 \pm 0,34$$

Comparando A con B. Presentan diferencias significativas, porque:

$$|\bar{A} - \bar{B}| = 0,314 \quad \text{y} \quad \Delta A + \Delta B = 0,042$$

Como $0,314 > 0,042 \Rightarrow$ A y B presentan diferencias significativas

¿Qué ocurre entre B y C? ¿Y entre A y C?

REPORTAR EN DISCORD
MIÉRCOLES 1/9 HASTA LAS 14 HS

- Describir la metodología experimental (incluir los instrumentos utilizados y su precisión)
- Reportar una Tabla con los resultados de V y de ε_r de todos los integrantes del grupo

Tabla 1. Resultados del volumen de**LEYENDA.**

	M1	ε_{r1}	M2	ε_{r2}	M3	ε_{r3}
V_A (Ud.)	2,36 ± 0,23					
V_B (Ud.)						
V_C (Ud.)						

- Comparar los resultados utilizando el criterio de **diferencias significativas y precisión**. Evaluar **CONFIANZA**