

Resultado y una MF y forma de expresarlo

Resultado

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) Ud.$$

\bar{x} : Valor más representativo

Δx : Incerteza Absoluta

Mediciones Indirectas (MI)

$$W = f(x, y, z, \dots)$$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Ud.}$$

$$y = (\bar{y} \pm \Delta y) \text{ Ud.}$$

$$z = (\bar{z} \pm \Delta z) \text{ Ud.}$$

⋮

$x, y, z \dots$ variables
independientes

$$\bar{W} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}\right)^2 \Delta y^2 + \dots}$$

Mediciones Directas (MD)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Incerteza Absoluta para diferentes casos

Si mido dentro del error instrumental $\longrightarrow \sigma_{ap}$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_{ap} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{ap}$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_{ap}) Ud.$$

Si mido fuera del error instrumental → Error estadístico

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S) Ud.$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e) Ud.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$S \text{ o } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

En general si tomo una muestra de N medidas:

Si nuestra serie se comporta como otra de la misma MF

σ_e Es el error
de la media

S o σ Es el error de
cada medida

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2021

RELACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES
MODELO LINEAL DE CUADRADOS MÍNIMOS

Lucía Famá, Mauro Silberberg
Sofía Angriman



Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Objetivo de la clase de hoy

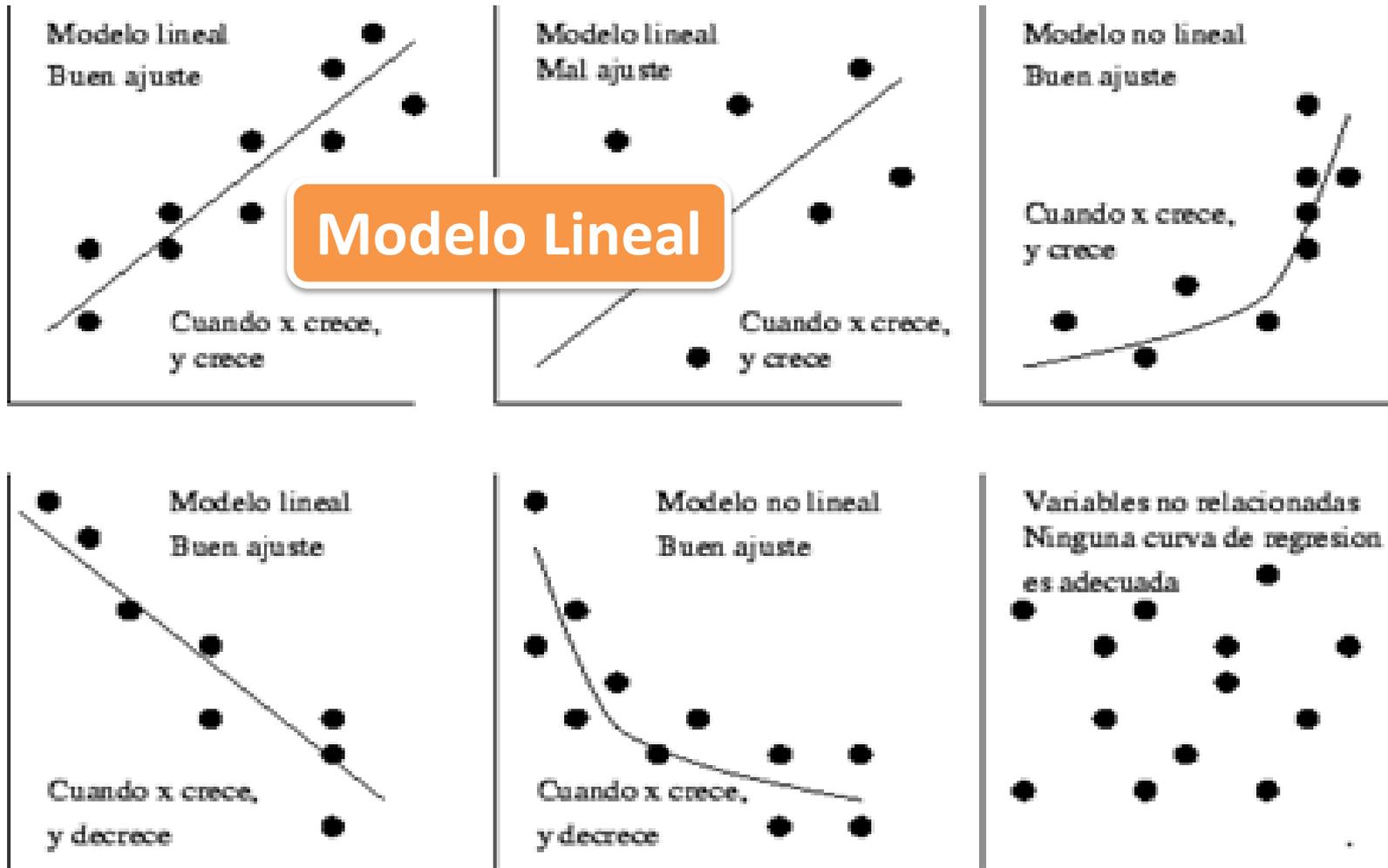
Analizar la relación entre dos magnitudes y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - Modelado

Objetivo de la práctica de hoy y ... Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo para distintas Longitudes y el Método de Cuadrados Mínimos

CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre dos medidas ... caso más sencillo



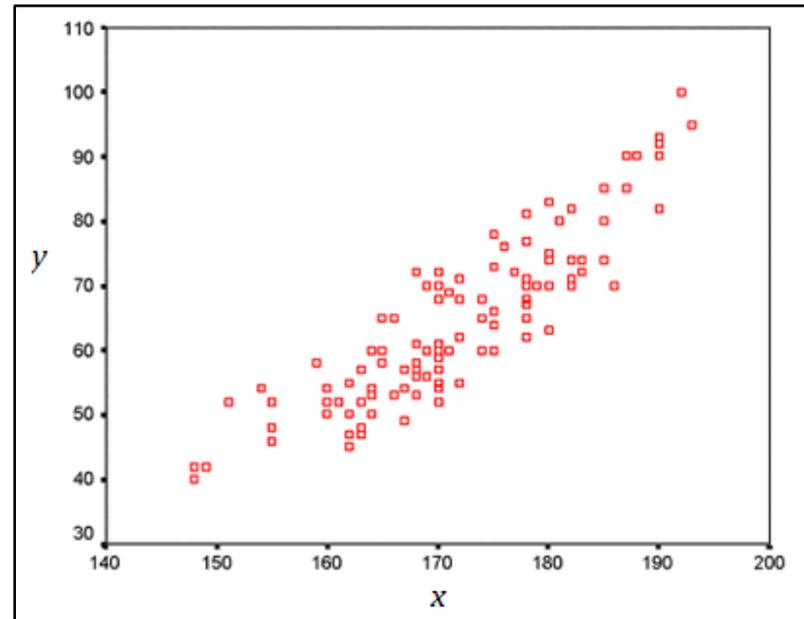
Caso más sencillo

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)

Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

Modelo Lineal



Buscamos encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos experimentales

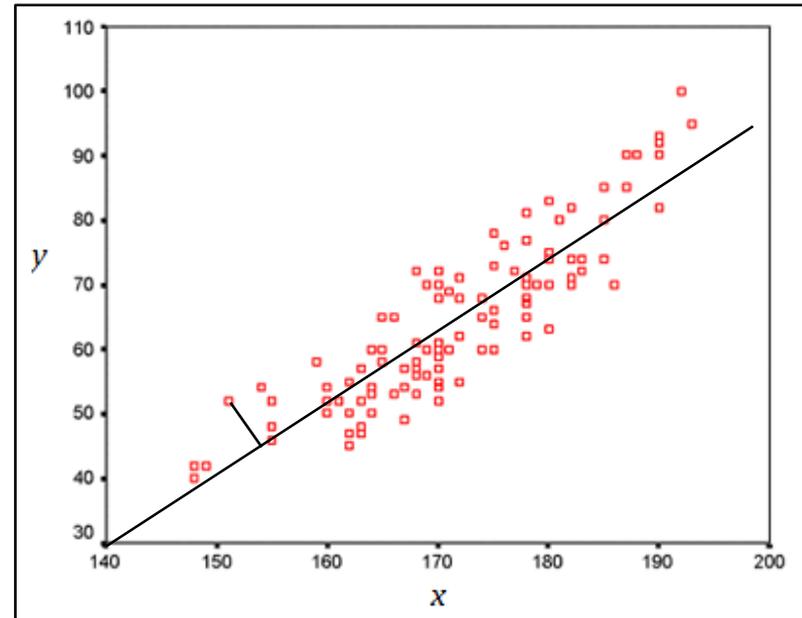
Caso más sencillo

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)

Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

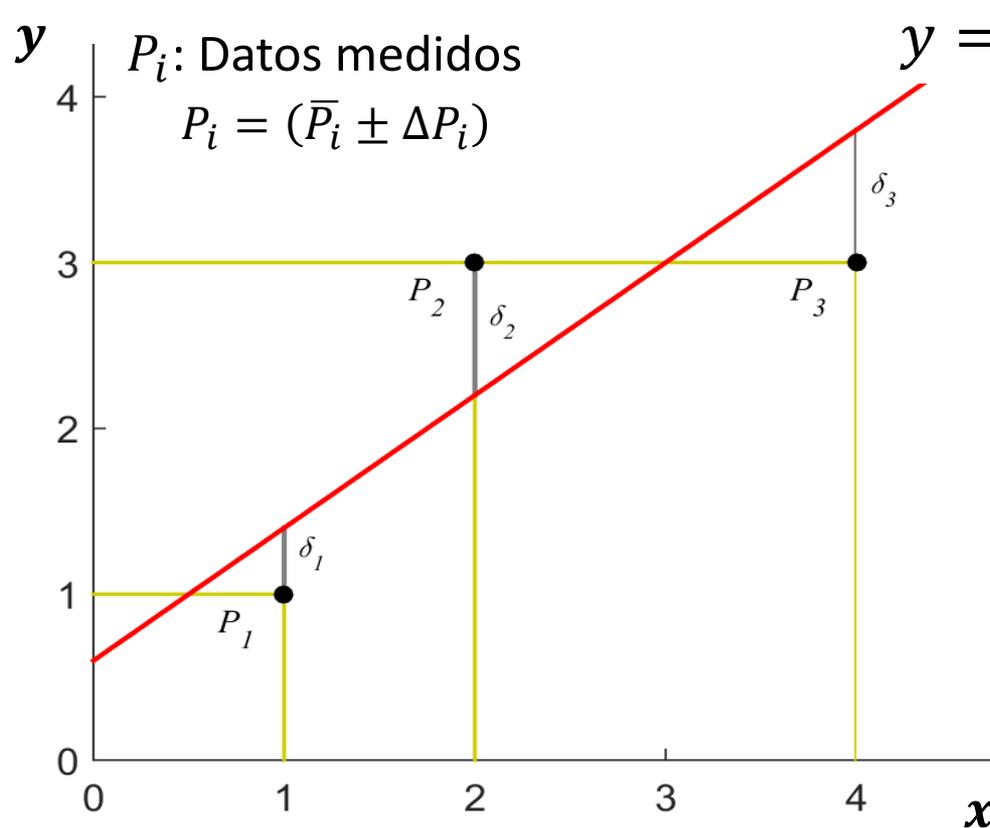
Modelo Lineal



Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso aún más sencillo



Hipótesis:

$$\epsilon_{ry} \gg \epsilon_{rx}$$

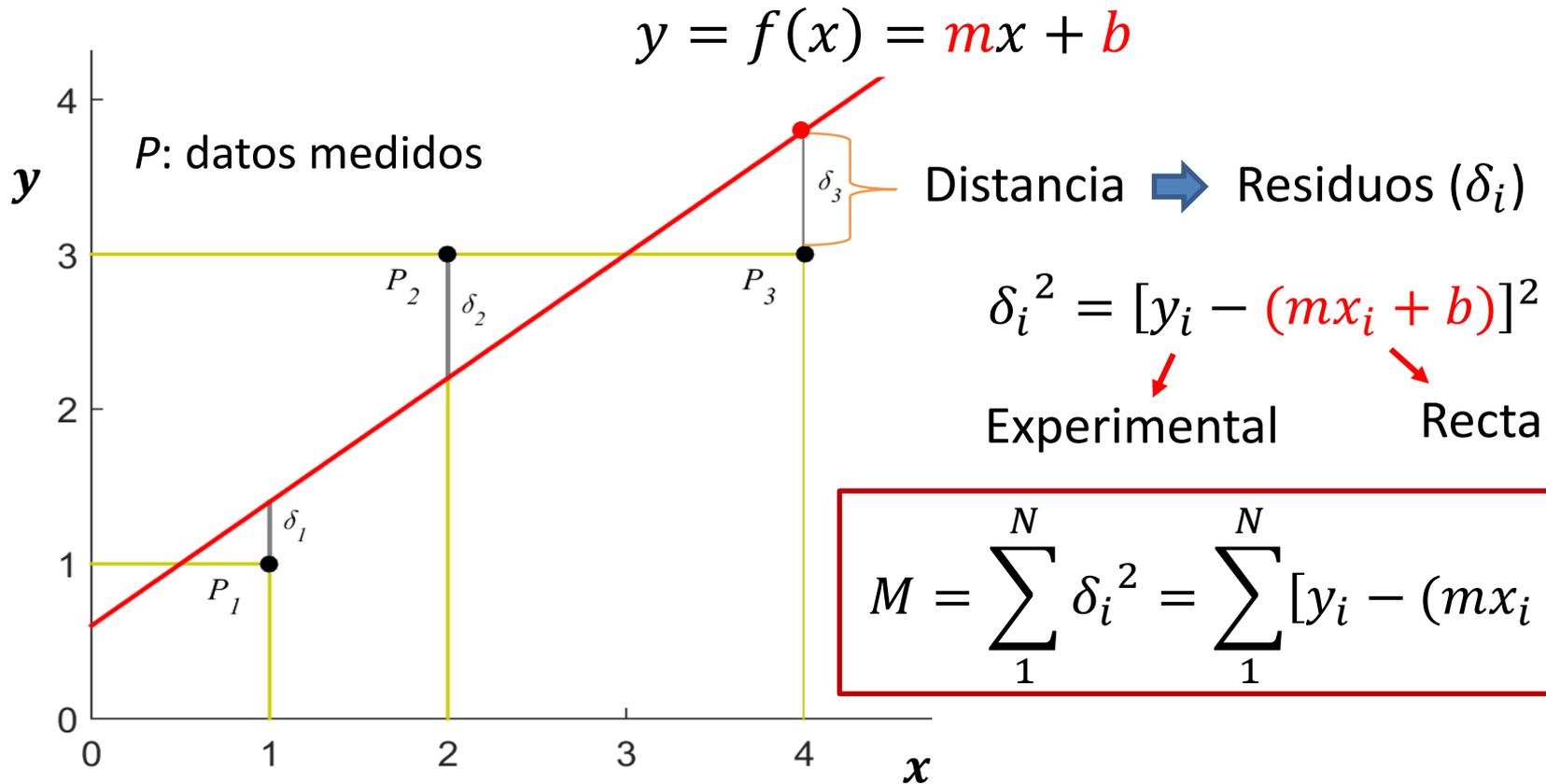
$$\epsilon_{ry} = \left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right|$$

D. C. Baird. Prentice Hall
(1991). Apéndice 2

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO** Ponderados

Cuando todos los datos en "y" tienen igual incerteza



$$M = \sum_1^N \delta_i^2 = \sum_1^N [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO** Ponderados

¿Cómo encontramos los parámetros ***m*** y ***b***?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m, b) = \sum_1^N [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$M(m, b) = \sum_1^N y_i^2 + m^2 \sum_1^N x_i^2 + Nb^2 + 2mb \sum_1^N x_i - 2m \sum_1^N x_i y_i - 2b \sum_1^N y_i$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{array} \right\} 2m \sum_1^N x_i^2 + 2b \sum_1^N x_i - 2 \sum_1^N x_i y_i = 0$$

$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$2Nb + 2m \sum_1^N x_i - 2 \sum_1^N y_i = 0$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Caso 1

Ejemplo

Encontremos la recta que mejor aproxima a los siguientes datos:

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

x	y	x·y	x ²	
7	2	14	49	
1	9	9	1	
10	2	20	100	
5	5	25	25	
4	7	28	16	
3	11	33	9	
13	2	26	169	
10	5	50	100	
2	14	28	4	
Σ	55	57	233	473

$$m = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{233 - \frac{55 \cdot 57}{9}}{473 - \frac{(55)^2}{9}} \approx -0,84$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{\sum y}{n} - (-0,84) \frac{\sum x}{n} = \frac{57}{9} + 0,84 \cdot \frac{55}{9} = 11,4$$

Caso 1

¿Cómo encontramos σ_m y σ_b ?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!!



*D. C. Baird. Prentice Hall
(1991). Apéndice 2*

Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\dots \rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{N-2}}$$

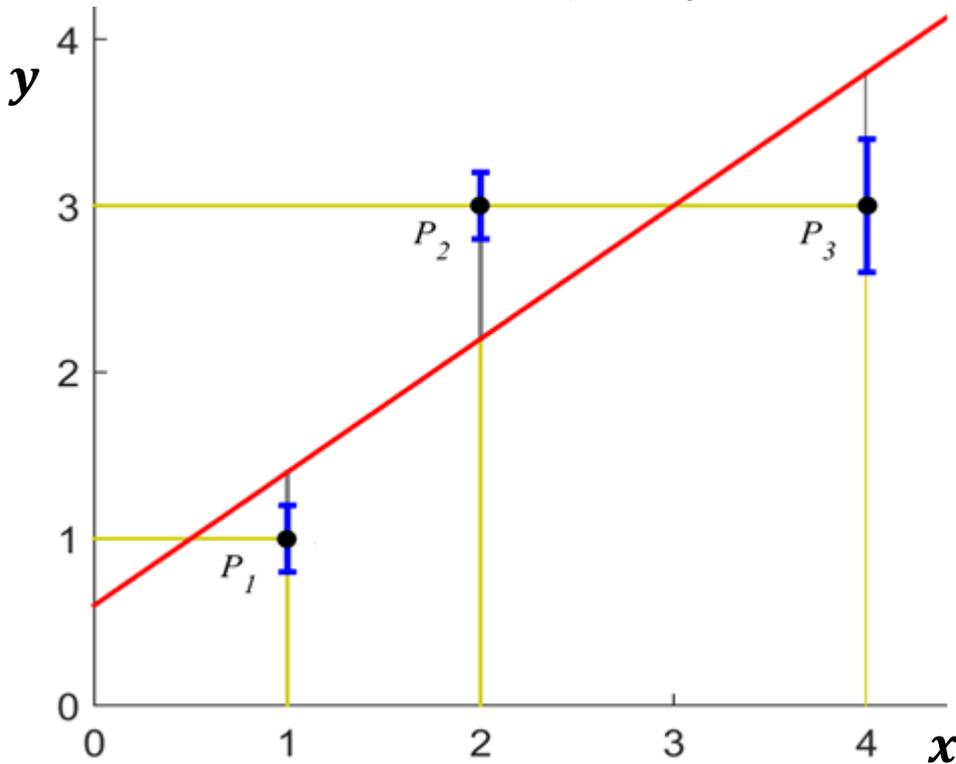
Válido cuando todas las medidas de “y” tienen igual incerteza

Caso 2

Cuadrados mínimos Ponderados

Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



Hipótesis: Considera a las medidas más precisas las más relevantes

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos Normalizados

Caso 2

Cuadrados mínimos Ponderados

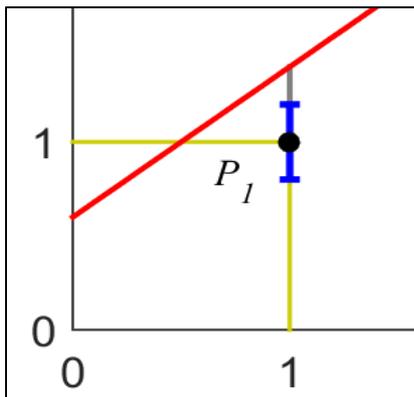
Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i (x_i y_i) - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i \sum w_i x_i^2 - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

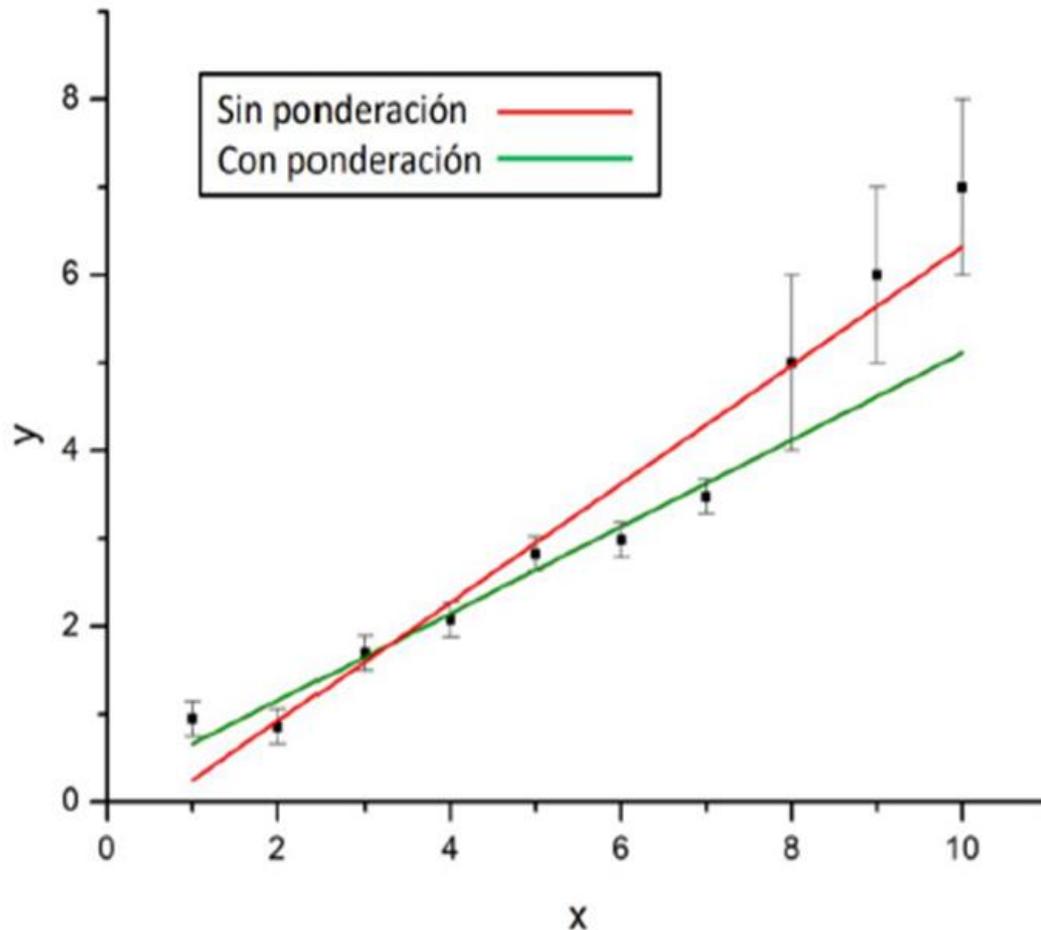


$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Definiendo:

$$w_i = \frac{1}{(\sigma_{y_i})^2}$$

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_1^N [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

¿Qué podemos discutir sobre un ajuste?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Chi-cuadrado (χ^2), coeficiente de determinación (R), ...

Coeficiente de Correlación de Pearson: r

Gráfico de Residuos

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

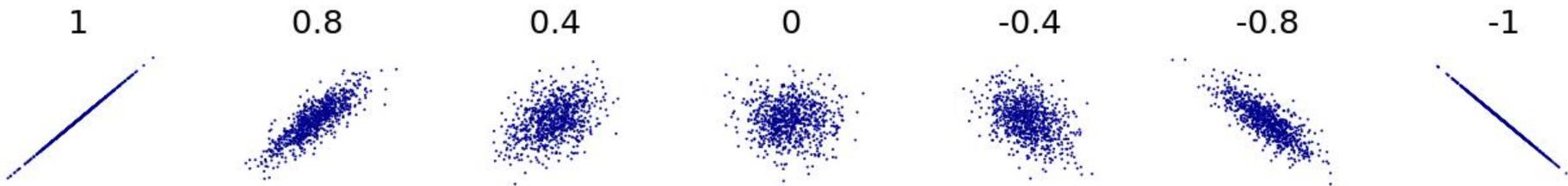
$$\text{Var}(x) = S_x^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{Var}(y) = S_y^2 = \frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

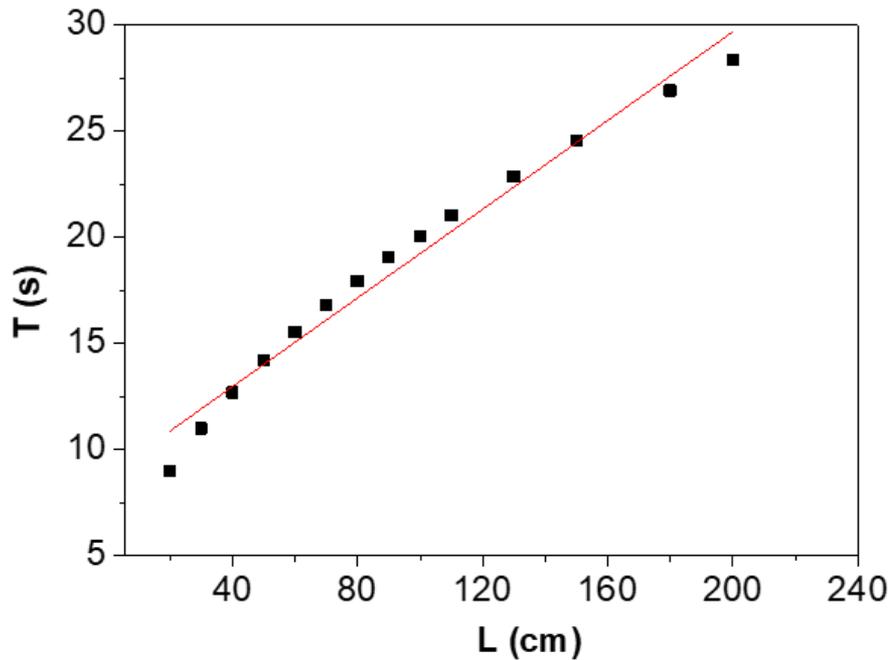
$$-1 \leq r \leq 1$$

$$\text{Cov}(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$



Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l !!



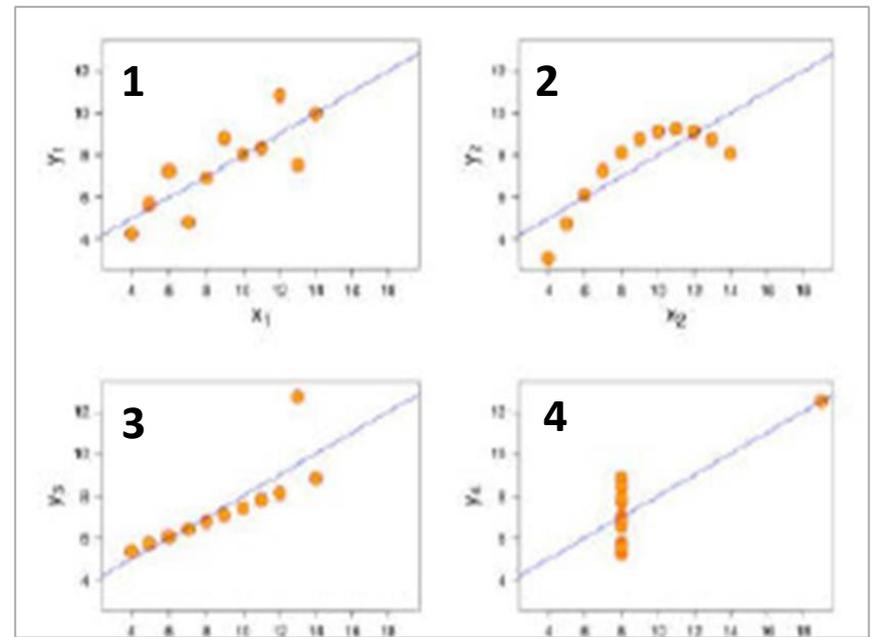
$$r = 0,988$$

Pero **OJO!!!!**

Estos cuatro ejemplos tienen igual valor de $|r|$

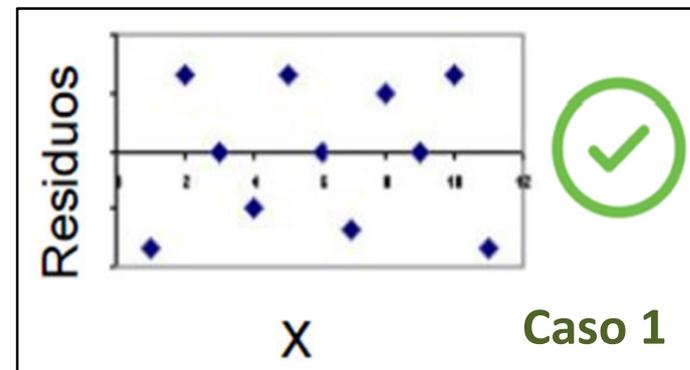
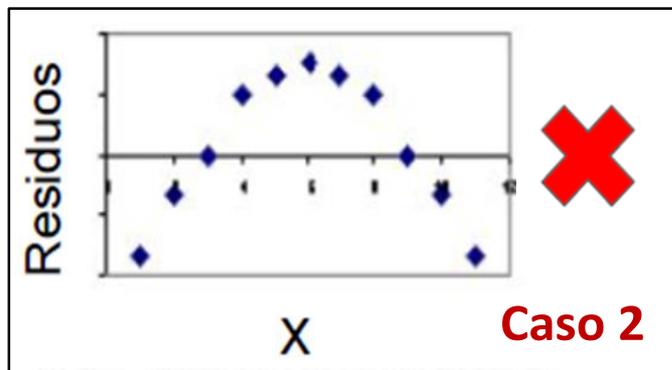
Necesito evaluar algo Más!!

Evaluar los residuos!!!

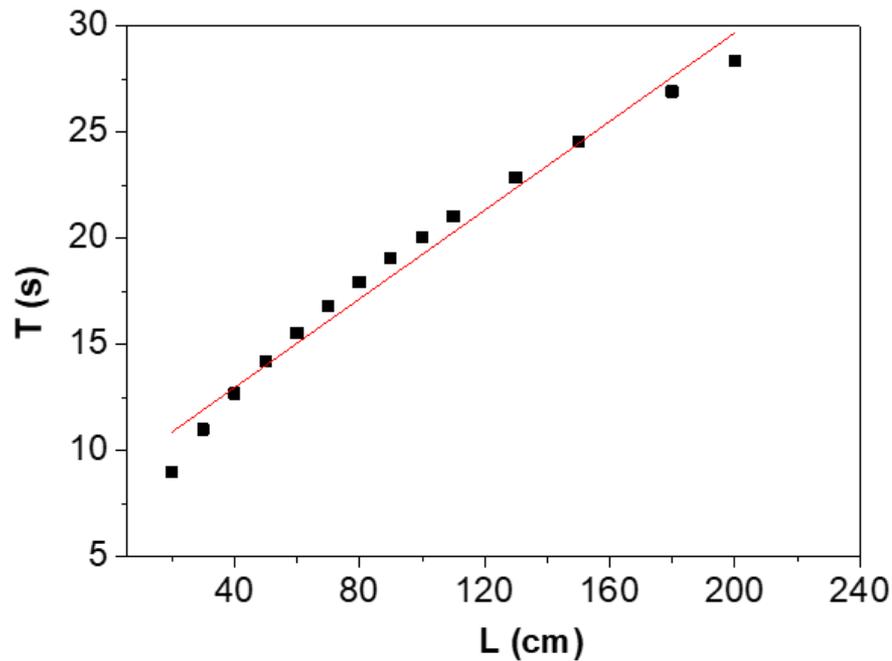


Residuos

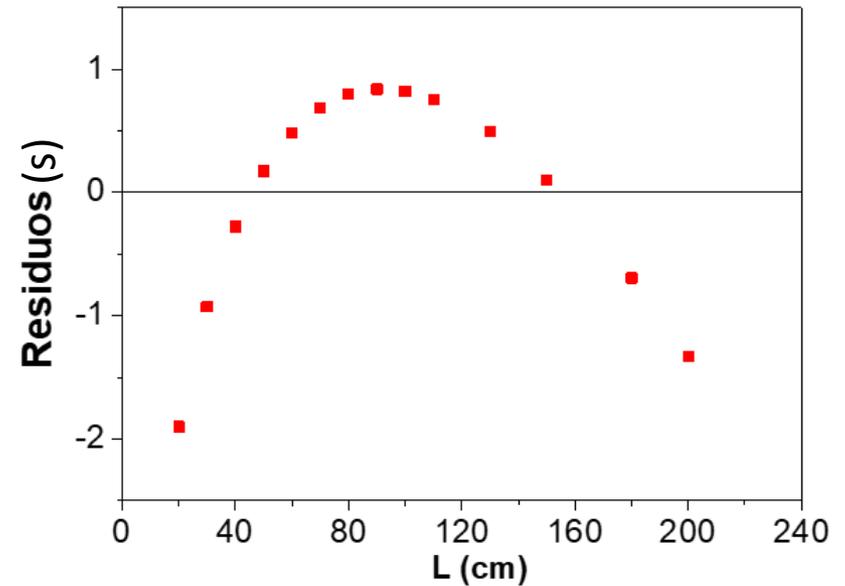
En los **casos 2, 3 y 4** sucedió que la distribución de los datos alrededor de la recta no era normal. Los residuos tenían estructura



Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l !!



$r = 0,988$



¿Qué esperamos?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de
Correlación de Pearson

r →

$$|r| \sim 1$$

Residuos →



Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
178	69.8	8.25	0.41	68.06	0.17	3.38
160	67.5	-9.75	-1.89	95.06	3.57	18.43
183	81	13.25	11.61	175.56	134.79	153.83
152	60.8	-17.75	-8.59	315.06	73.79	152.47
168	70.2	-1.75	0.81	3.06	0.66	-1.42
178	75.6	8.25	6.21	68.06	38.56	51.23
188	80.1	18.25	10.71	333.06	114.70	195.46
165	72	-4.75	2.61	22.56	6.81	-12.40
157	59.4	-12.75	-9.99	162.56	99.80	127.37
170	65.3	0.25	-4.09	0.06	16.73	-1.02
165	62.6	-4.75	-6.79	22.56	46.10	32.25
173	68.4	3.25	-0.99	10.56	0.98	-3.22
2037	832.7			1276.25	536.67	716.38

$$\bar{x} = \frac{2037}{12} = 169.75$$

$$\bar{y} = \frac{832.7}{12} = 69.39$$

$$S_{xy} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N}$$

$$S_{xy} = \frac{716.38}{12} = 59.70$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1276.25}{12}}$$

$$S_x = \sqrt{106.35} = 10.31$$

$$S_y = \sqrt{\frac{536.67}{12}} = 6.69$$

$$S_{xy} = 59.70$$

$$S_x = 10.31$$

$$S_y = 6.69$$

Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

$$S_{xy} = 59.70$$

$$S_x = 10.31$$

$$S_y = 6.69$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{59.70}{(10.31)(6.69)} = \frac{59.70}{68.97} = 0.87$$

Coeficiente de determinación

$$r^2 = 0.87^2 = 0.7569 = 75.69\%$$

Objetivo de la práctica de hoy y Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo (T) para distintas Longitudes (l) y utilizando un modelo lineal del Método de Cuadrados Mínimos

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g) \text{ Ud.}$$

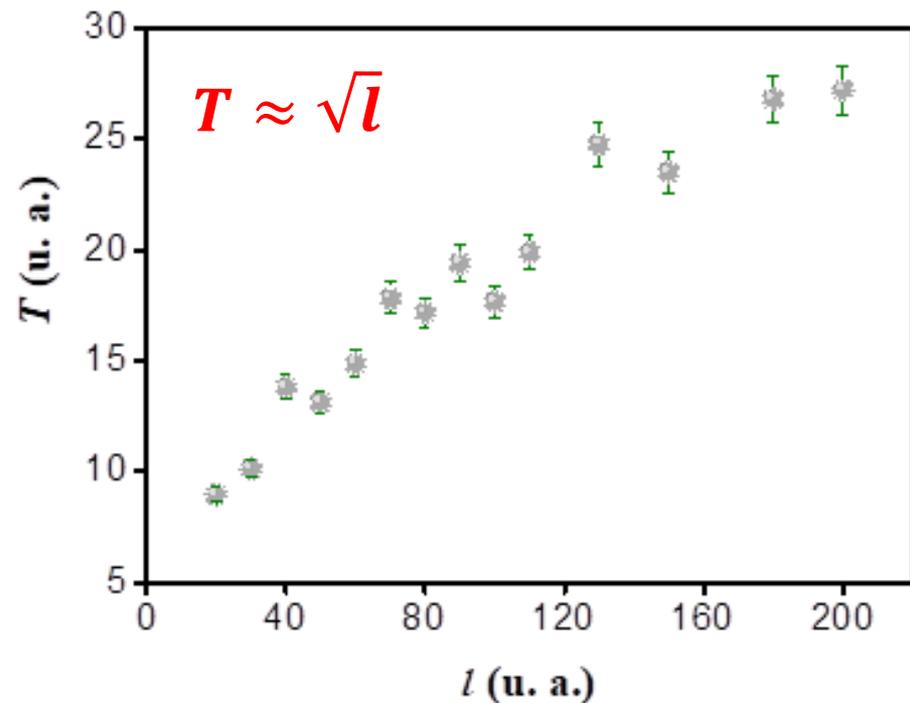
ACTIVIDAD 1

- Determinar el período del péndulo (T) para 10 valores de longitud (l) en el rango 30-120 cm si puede.
- Graficar T en función de l (con un gráfico de puntos) con las incertezas ¿Parece ser lineal?

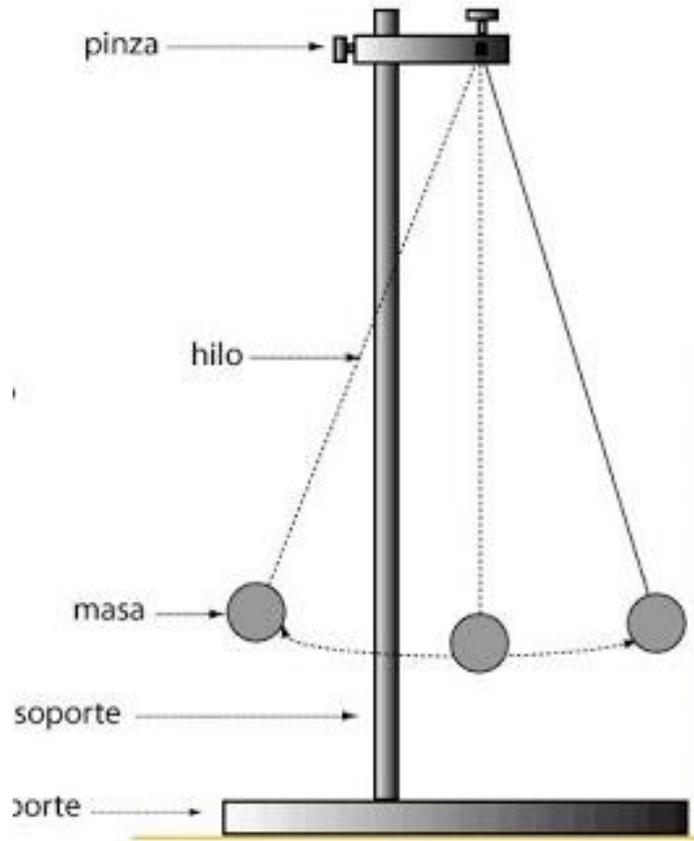
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



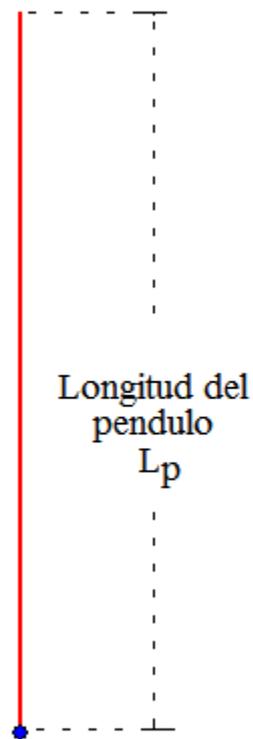
**T NO ESTÁ RELACIONADO
LINEALMENTE CON l**



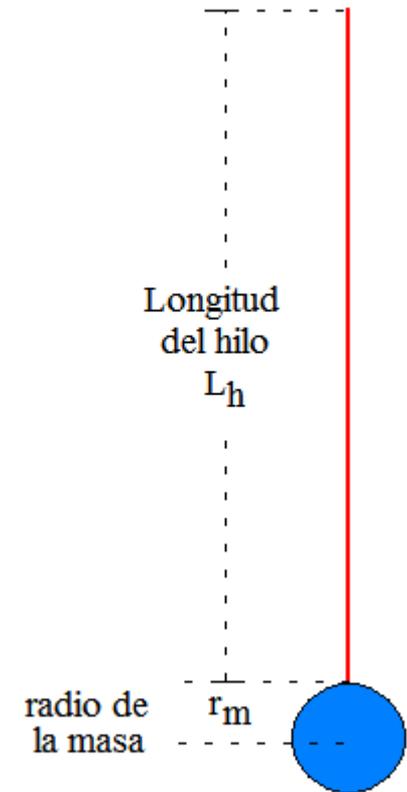
PÉNDULO



Caso ideal

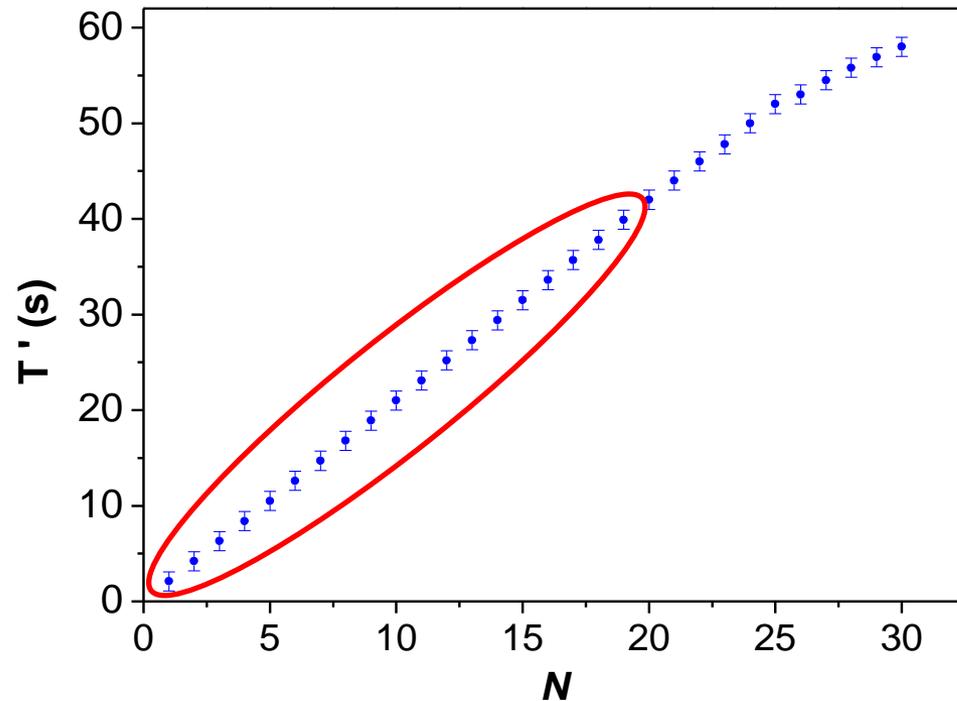


Caso real



¿MIDO N VECES CADA PERÍODO (T)?

Repasemos la clase pasada: Qué observamos en el gráfico del tiempo transcurrido en función del número de períodos...



Para un dado N la respuesta es lineal

Puedo concluir que podría medir 1 sola vez N períodos juntos en lugar de medir N veces cada período

MIDO 1 VEZ N PERÍODOS JUNTOS

EXPERIMENTO

¿Cuál será el resultado de T ?

$$N \text{ períodos juntos } (T'): T' = N \cdot T \rightarrow T = \frac{T'}{N} \rightarrow \boxed{\bar{T} = \frac{\bar{T}'}{N}}$$

Propagando!

¿Y la incerteza de T ?

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 \Delta T'^2} = \frac{1}{N} \Delta T'$$

La incerteza de una medida $\rightarrow \Delta T' = S \text{ o } \sigma$

$$\boxed{\Delta T = \frac{S}{N}} \rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{\sigma}{N}}$$

S (σ) \rightarrow **Y ya la calculamos antes!!**

¿Variará si cambiamos la longitud del hilo?

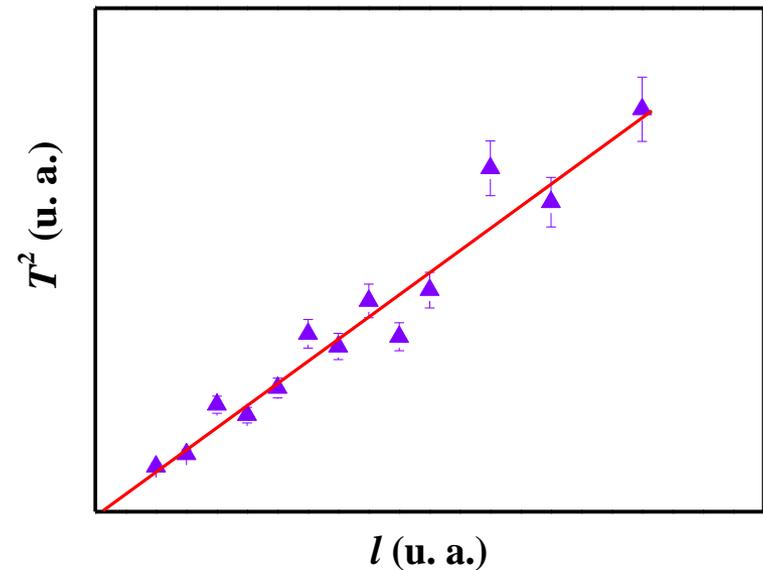
ACTIVIDAD 2

Determinar la aceleración de la gravedad (g) ... **utilizando un Modelo Lineal**

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

T (circled in red) = $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ (circled in red) \tilde{l} (circled in red)
 T^2 (circled in red) = $\frac{4\pi^2}{g}$ (circled in blue) l (circled in red)
 \tilde{T} (circled in red) (Pendiente)



ACTIVIDAD 2

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ y $l = l$:
 - 1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $T^2 \rightarrow \Delta T^2$) y Δl
 - 2- Obtenga los errores relativos de \tilde{T} y l ($\varepsilon_{r\tilde{T}}$ y ε_{rl}) y compárelos
- Graficar T^2 en función de l con las incertezas (o l en función de T^2 dependiendo de los ε_{rT^2} y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje “y”.
- Realizar un ajuste por dos modelos lineales:
 - ✓ $y = mx$
 - ✓ $y = mx + b$
 ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?
- Graficar los residuos de ambos ajustes y discutirlos.

ACTIVIDAD 2

- Reportar m y b (con incertezas y unidades!). Discutir qué podría representar b en su experiencia. *¿Es distinto de cero?*
- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)$ Ud. a partir de los resultados de los ajustes.

- Comparación de g :

¿Presentan diferencias significativas entre sí?

¿Cuál resultó más exacto?

¿Cuál más preciso?

Son los resultados de g obtenidos por el modelo lineal más precisos que el obtenido la clase anterior para 1 único valor de l ?

A cuántos σ quedó el valor de g del esperado: $g = 9.79688239 \text{ m/s}^2$

ACTIVIDAD 2

AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y ↑
 x ↑

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

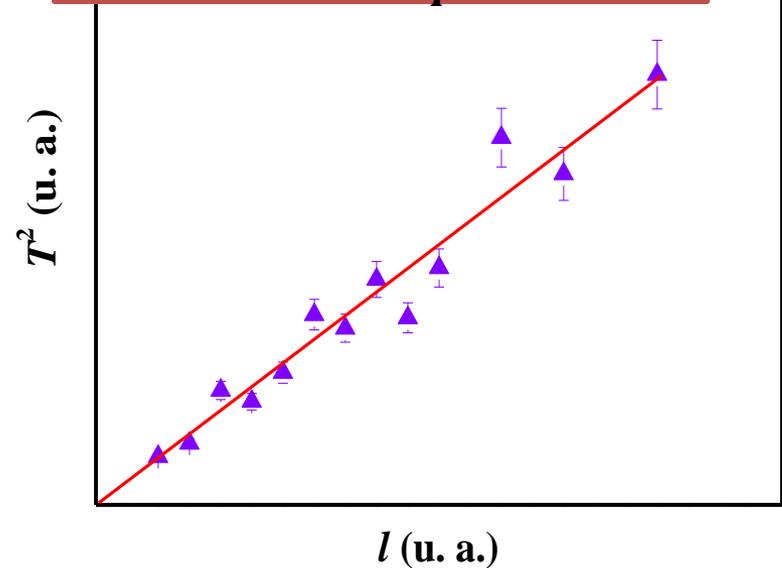
$$m = \frac{4\pi^2}{g} \rightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}$$

¿ Δg ?

Propago!!

Ejemplo Si $\epsilon_{rT^2} \gg \epsilon_{rl}$



$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{2\pi^2}{m^{3/2}}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta \pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π ?

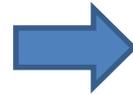
ACTIVIDAD 2

AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r_l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$



$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

The diagram shows the equation $l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$ with annotations: a blue oval around the fraction $\frac{g}{4\pi^2}$, a red circle around l , and a red circle around T^2 . A red arrow points from the l circle to the label 'y' below it. Another red arrow points from the T^2 circle to the label 'x' below it. A blue arrow points from the blue oval to the text 'Pendiente m = m̄ + Δm' below.

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \rightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿ Δg ?

Propago!!

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin

(ver el apunte de la página)

The screenshot displays the OriginPro 8.5 software interface. The main window shows a plot titled "Péndulo relación T vs L" with data points represented by purple triangles. The plot is labeled "l (u. a.)" on the x-axis. The "Analysis" menu is open, and the "Fitting" option is selected, showing a sub-menu with various fitting options. The "Linear Fit" option is highlighted, and the "Open Dialog..." button is visible. The status bar at the bottom indicates "FitLinear: linear regression on XY data".

OriginPro 8.5 - C:\Loulou\Docencia\Clases Dictadas\Laboratorio 1 (F)\2021 - 1erC\Clases\Clase 5 - Cuadrados mínimos \Péndulo relación T vs L

File Edit View Graph Data Analysis Gadgets Tools Format Window Help

Statistics
Mathematics
Data Manipulation
Fitting
Signal Processing
Peaks and Baseline

1 Linear Fit: <Last used> ...
2 Linear Fit: <default> ...
3 Peak Analyzer: <Last used> ...
4 Peak Analyzer: <default> ...
5 Single Peak Fit: <default> ...
6 Integrate: <default> ...
7 Polygon Area: <Last used> ...
8 Polygon Area: <default> ...
9 Integrate: <Last used> ...
10 Horizontal Translate

Linear Fit
Fit Linear with X Error
Polynomial Fit...
Nonlinear Curve Fit
Nonlinear Surface Fit...
Simulate Curve...
Simulate Surface...
Exponential Fit...
Sigmoidal Fit...
Compare Datasets...
Compare Models...

1 <Last used>
Open Dialog...

l (u. a.)

Graph1 Book2 Graph3 - C... Graph2 - C... Book1

FitLinear: linear regression on XY data AU : ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]114 Radian

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin

(ver el apunte de la página)

The image shows the OriginPro 8.5 interface. The 'Linear Fit' dialog box is open, with the 'Instrumental' option selected in the 'Fit Options' section, highlighted by a red circle. The text 'Pondera las incertezas' is overlaid on the dialog. The background shows a graph with data points and error bars, labeled '4 - Copy of Graph1'.

Linear Fit

Dialog Theme

Description Perform Linear Fitting

Range 1 [[Graph4]114"E"

Fit Options

- Errors as Weight **Instrumental**
- Fix Intercept
- Fix Intercept at 0
- Fix Slope
- Fix Slope at 1
- Use Reduced Chi-Sqr
- Apparent Fit

Quantities to Compute

- Fit Parameters
- Value
- Standard Error
- LCL
- UCL
- Confidence Level for Parameters(%) 95

OK Cancel

4 - Copy of Graph1

l (u. a.)

l (u. a.)

AU : ON Dark Colors & Light Grids 4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14] 1:[Graph4]114 Radian

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin

(ver el apunte de la página)

The image shows the OriginPro 8.5 software interface. The main window displays a graph titled "4 - Copy of Graph1" with a scatter plot of data points and error bars. The x-axis is labeled l (u. a.) and the y-axis is labeled T (u. a.).

Overlaid on the graph is the "Linear Fit" dialog box. The "Description" field is set to "Perform Linear Fitting". The "Fit Statistics" section is expanded, and the following options are checked:

- Fit Statistics
- Number of Points
- Degrees of Freedom
- Reduced Chi-Sqr
- Residual Sum of Squares
- Pearson's r
- Adj. R-Square
- Root-MSE (SD)
- Norm of Residuals

The "OK" and "Cancel" buttons are visible at the bottom of the dialog box. The "Reduced Chi-Sqr" and "Pearson's r" checkboxes are circled in red.

At the bottom of the screen, the status bar shows: "For Help, press F1", "AU : ON", "Dark Colors & Light Grids", "4:[Book2]Sheet1!Col(E)[1:14]", "1:[Graph4]114", and "Radian".

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin

(ver el apunte de la página)

