Resultado y una MF y forma de expresarlo

Resultado

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

$\boldsymbol{\bar{x}}$**:** Valor más representativo

$\Delta \boldsymbol{x}$**:** Incerteza Absoluta

Mediciones Indirectas (MI)

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \dots)$$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\, Ud.$$
$$y = (\bar{y} \pm \Delta y)\, Ud.$$
$$z = (\bar{z} \pm \Delta z)\, Ud.$$
$$\vdots$$

x, y, z ... variables independientes

$$\boxed{\bar{W} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)}$$

$$\boxed{\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}\right)^2 \Delta y^2 + \dots}}$$

Mediciones Directas (MD)

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Incerteza Absoluta para diferentes casos

Si mido dentro del error instrumental $\longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{ap}}$

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_{ap} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{ap}$$

Expresión

$$x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right)\, Ud.$$

Si mido fuera del error instrumental → Error estadístico

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S)\ Ud.$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$S \text{ o } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

En general si tomo una muestra de N medidas:

Si nuestra serie se comporta como otra de la misma MF

σ_e **Es el error de la media**

S o σ **Es el error de cada medida**

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2021

Relación entre dos magnitudes
Modelo Lineal de Cuadrados Mínimos

Lucía Famá, Mauro Silberberg
Sofía Angriman

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Objetivo de la clase de hoy

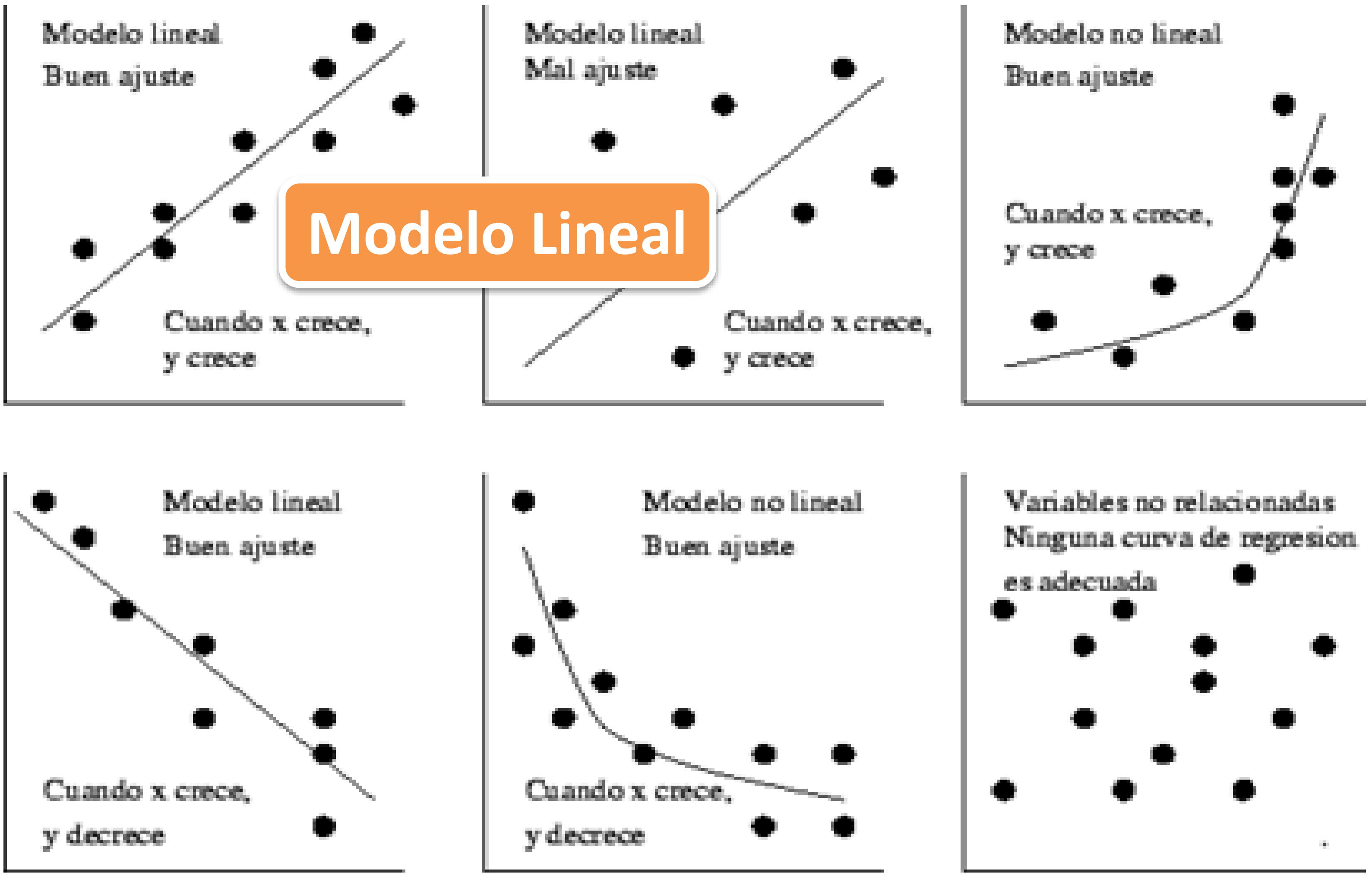
Analizar la relación entre dos magnitudes y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - Modelado

Objetivo de la práctica de hoy y …. Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo para distintas Longitudes y el Método de Cuadrados Mínimos

Cuadrados Mínimos

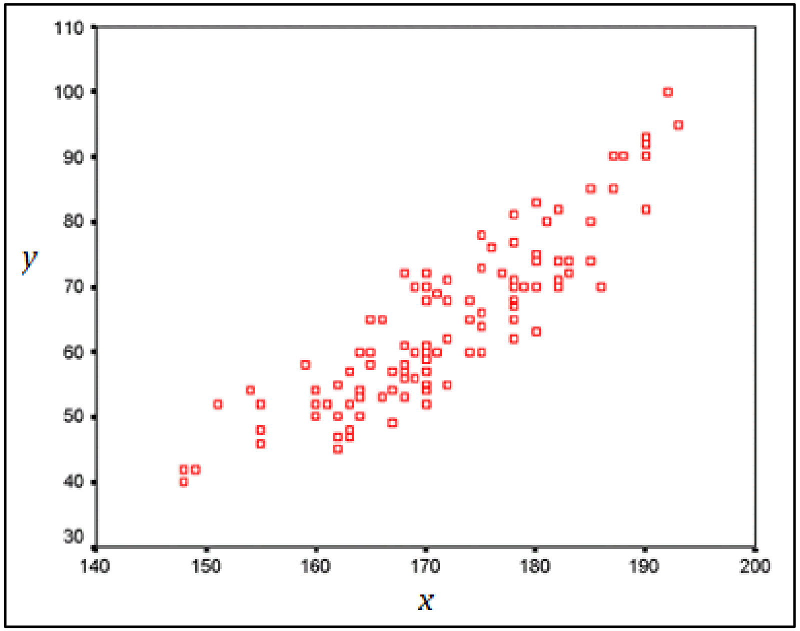
Relación entre dos medidas … caso más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

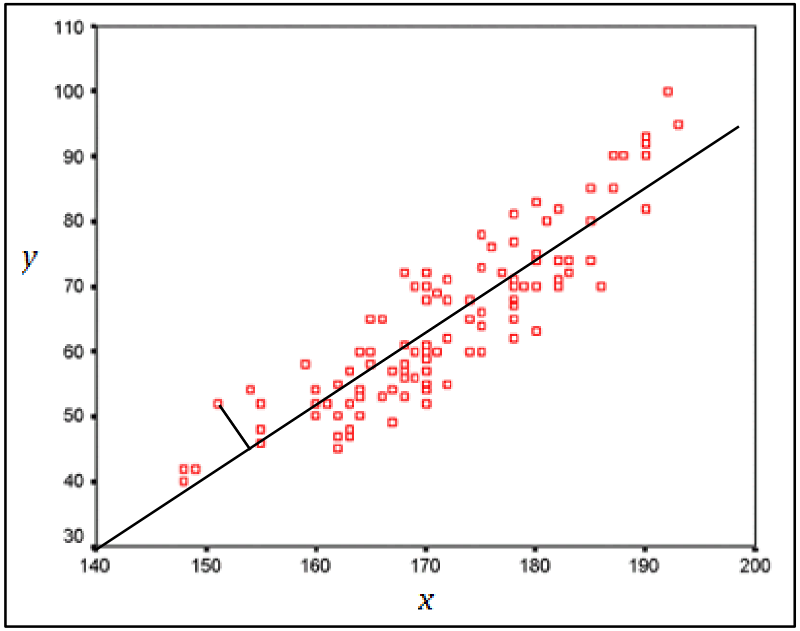
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos experimentales

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

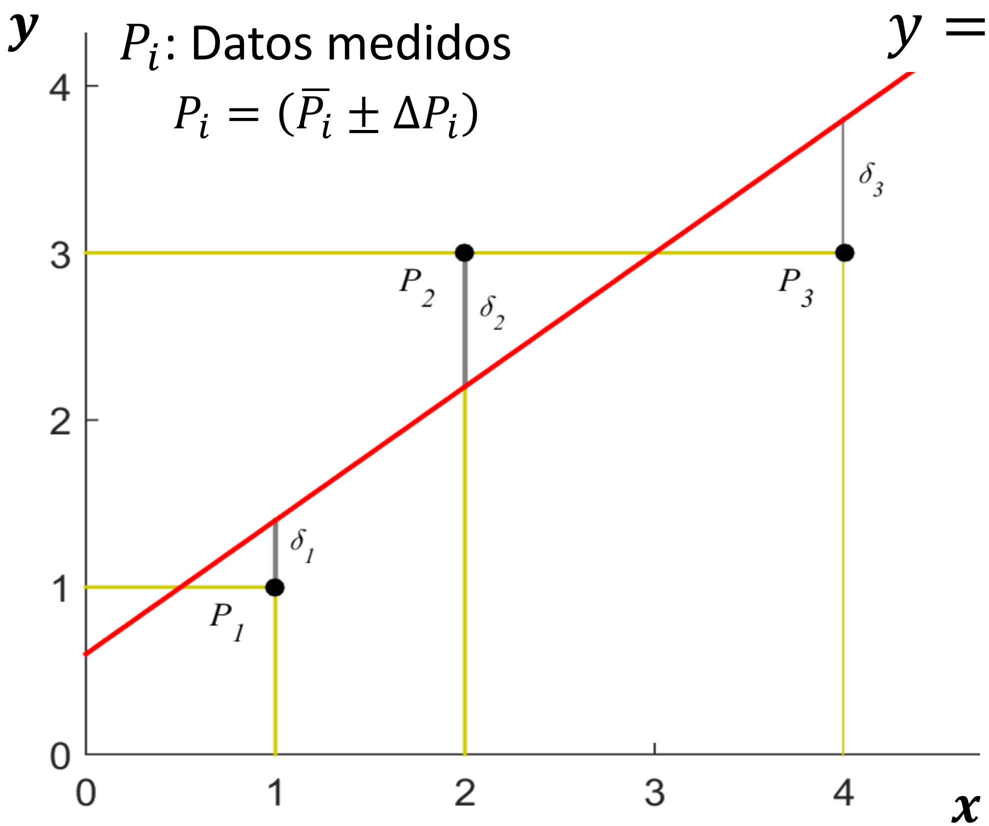
Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Buscamos encontrar los parámetros *m* y *b* que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso aún más sencillo

P_i: Datos medidos

$$P_i = (\overline{P}_i \pm \Delta P_i)$$



$$y = f(x) = mx + b$$

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{\overline{y}}\right|$$

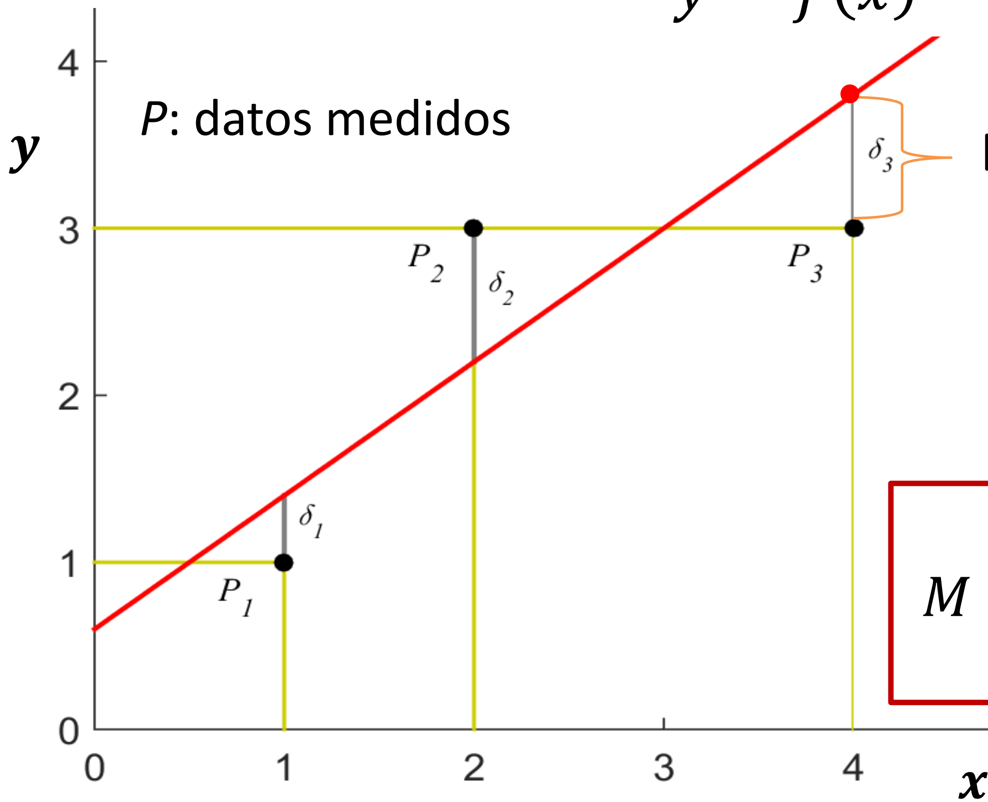
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen igual incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



Distancia ➡ Residuos (δ_i)

$${\delta_i}^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Experimental

Recta

$$\boxed{M = \sum_{1}^{N} {\delta_i}^2 = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

Caso 1

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m,b)=\sum_{1}^{N}[y_i-(mx_i+b)]^2$$

$$M(m,b)=\sum_{1}^{N}{y_i}^2+m^2\sum_{1}^{N}{x_i}^2+Nb^2+2mb\sum_{1}^{N}x_i-2m\sum_{1}^{N}x_iy_i-2b\sum_{1}^{N}y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m}=0 \qquad 2m\sum_{1}^{N}{x_i}^2+2b\sum_{1}^{N}x_i-2\sum_{1}^{N}x_iy_i=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b}=0 \qquad 2Nb+2m\sum_{1}^{N}x_i-2\sum_{1}^{N}y_i=0$$

$$\boxed{m=\frac{N\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i}{N\sum {x_i}^2-(\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b=\frac{\sum {x_i}^2\sum y_i-\sum x_i\sum x_iy_i}{N\sum {x_i}^2-(\sum x_i)^2}}$$

Caso 1

Ejemplo

Encontremos la recta que mejor aproxima a los siguientes datos:

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i{}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}$$

	x	y	x.y	x^2
	7	2	14	49
	1	9	9	1
	10	2	20	100
	5	5	25	25
	4	7	28	16
	3	11	33	9
	13	2	26	169
	10	5	50	100
	2	14	28	4
Σ	55	57	233	473

$$m = \frac{\Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}} = \frac{233 - \frac{55 \cdot 57}{9}}{473 - \frac{(55)^2}{9}} \simeq -0{,}84$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{\Sigma y}{n} - (-0{,}84)\frac{\Sigma x}{n} = \frac{57}{9} + 0{,}84 \cdot \frac{55}{9} = 11{,}4$$

Caso 1

¿Cómo encontramos σ_m y σ_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*

Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$\boxed{\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \qquad \boxed{\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \quad \dashrightarrow \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

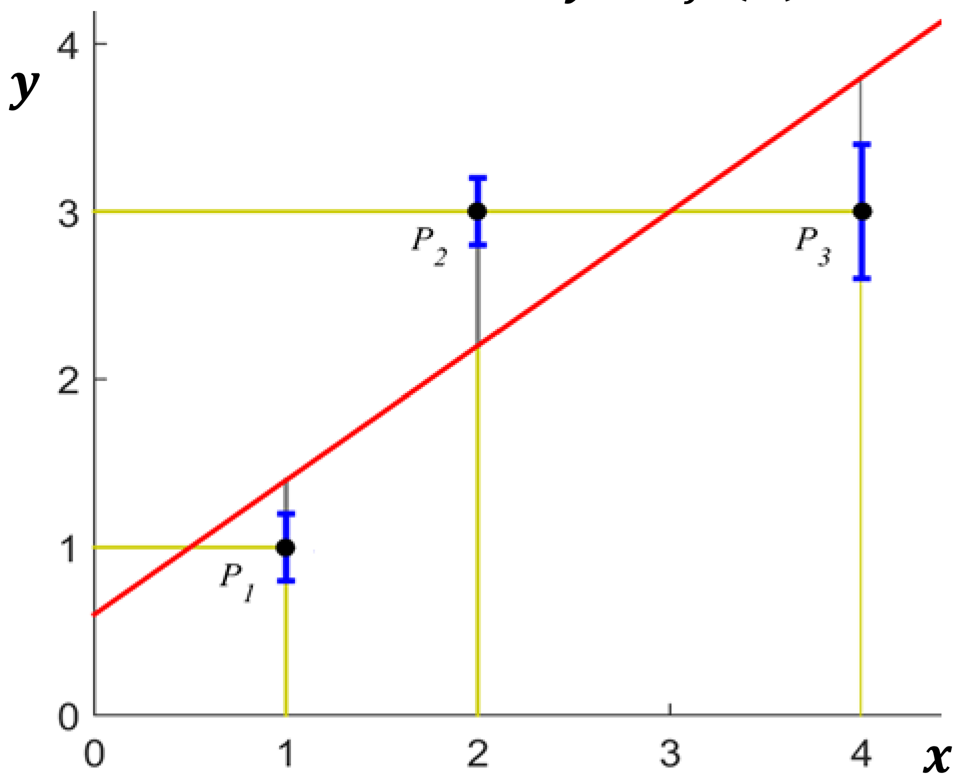
Válido cuando todas las medidas de "*y*" tienen igual incerteza

Caso 2

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



Hipótesis: Considera a las medidas más precisas las más relevantes

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos Normalizados

Caso 2

Cuadrados mínimos **Ponderados**

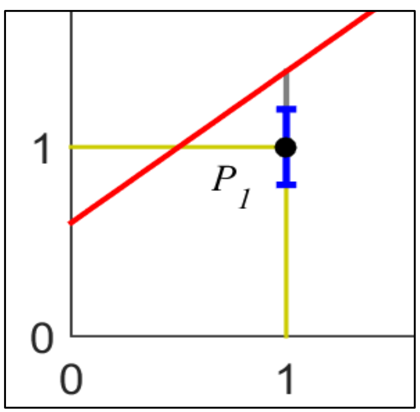
Cuando todos los datos en "*y*" tienen diferente incerteza

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i (x_i y_i) - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i \sum w_i {x_i}^2 - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i x_i)^2}$$

$${\sigma_m}^2 = \frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i {x_i}^2)^2}$$

$${\sigma_b}^2 = \frac{\sum w_i {x_i}^2}{\sum w_i \sum w_i {x_i}^2 - (\sum w_i {x_i}^2)^2}$$

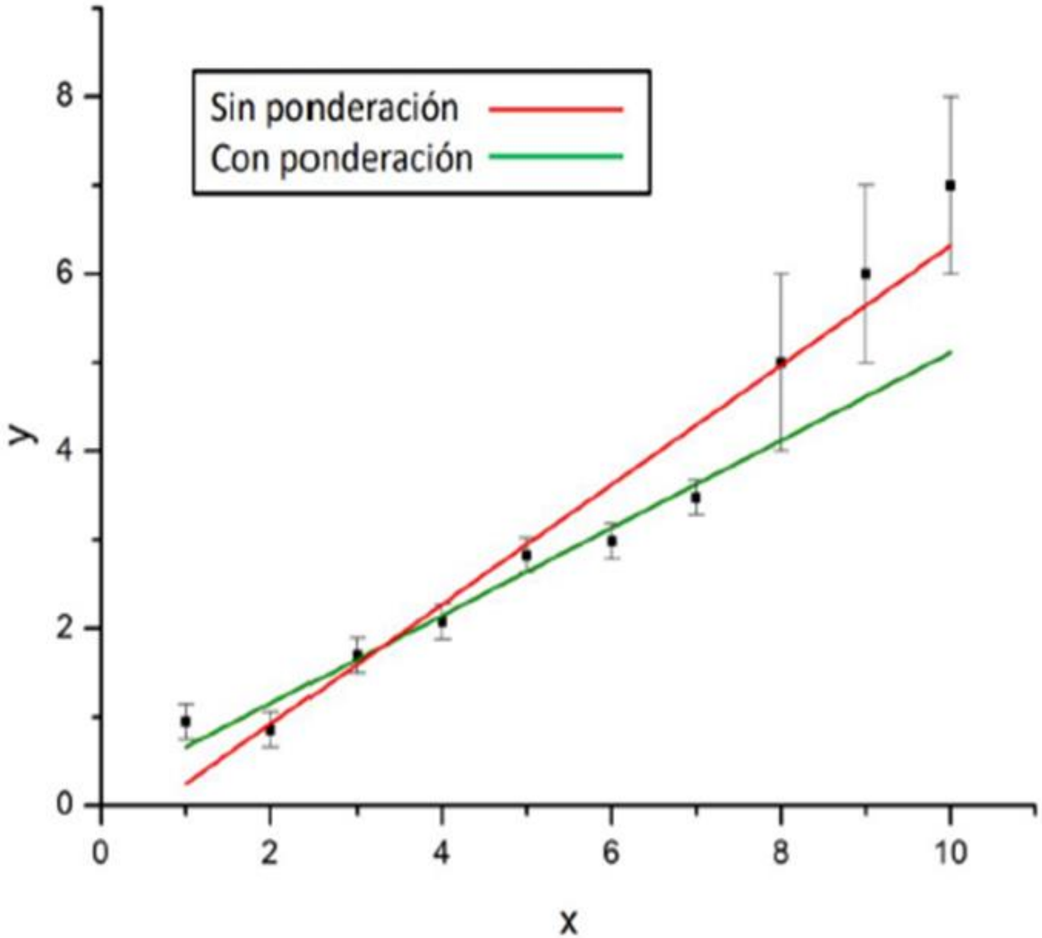


$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (m x_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Definiendo:

$$w_i = \frac{1}{\left(\sigma_{yi}\right)^2}$$

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{S_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

¿Qué podemos discutir sobre un ajuste?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Chi-cuadrado (χ^2), coeficiente de determinación ($\boldsymbol{R}$), …

Coeficiente de Correlación de Pearson: $\boldsymbol{r}$

Gráfico de Residuos

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

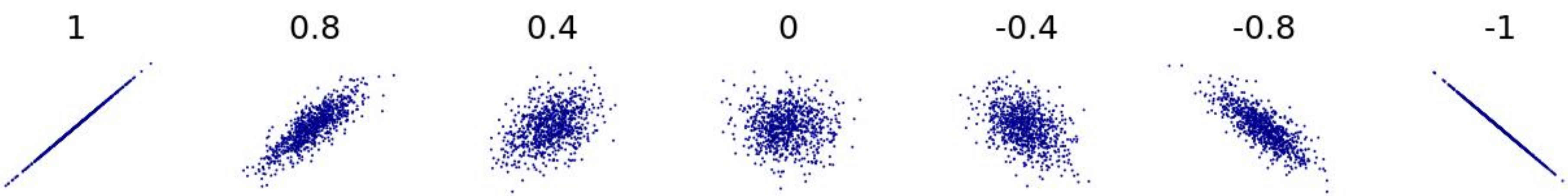
$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

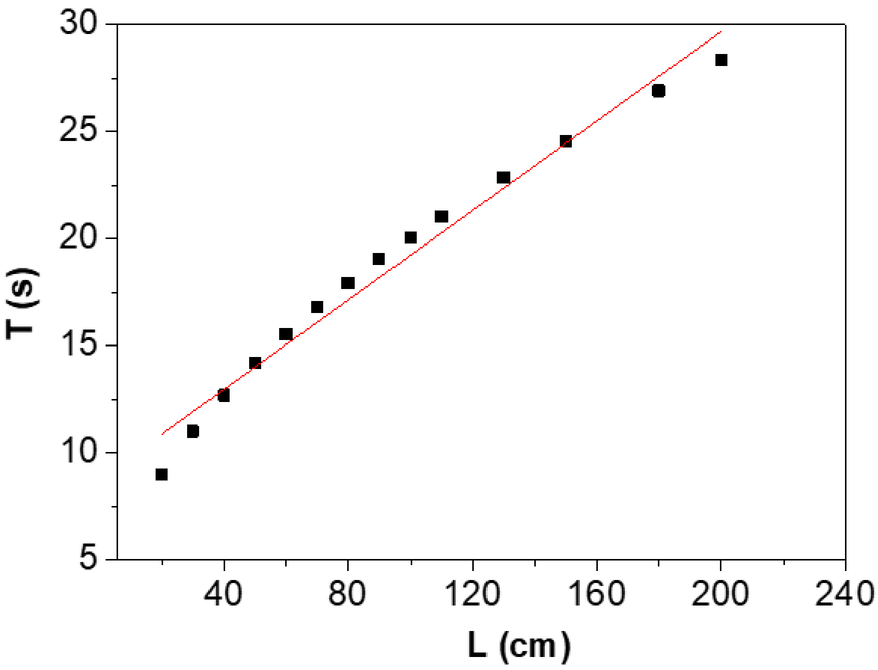
$$-1 \leq r \leq 1$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$



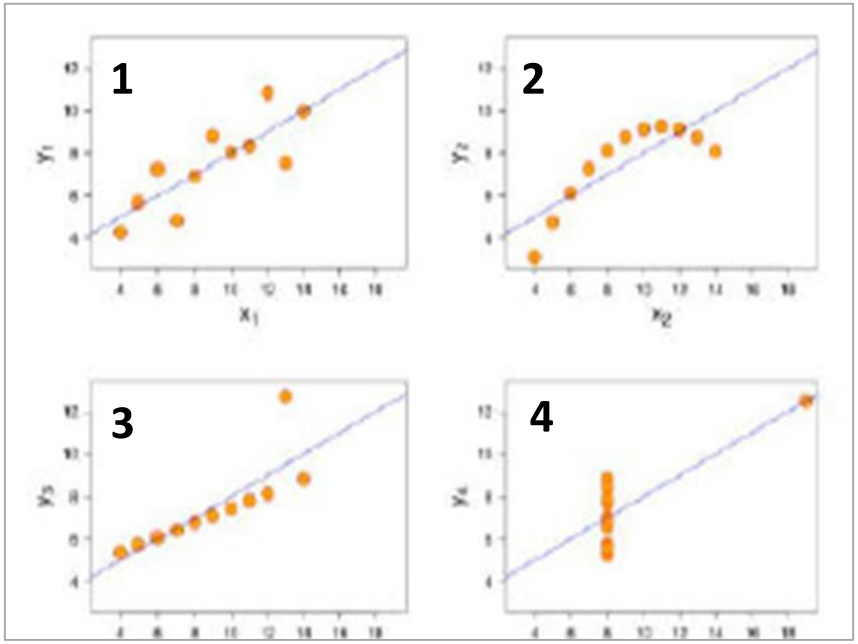
Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a *T* en función de *l*!!



$$r = 0,988$$

Pero **OJO!!!!**

Estos cuatro ejemplos tienen igual valor de $|r|$

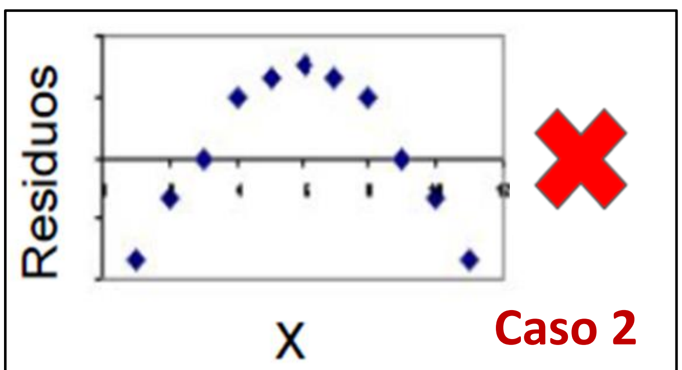


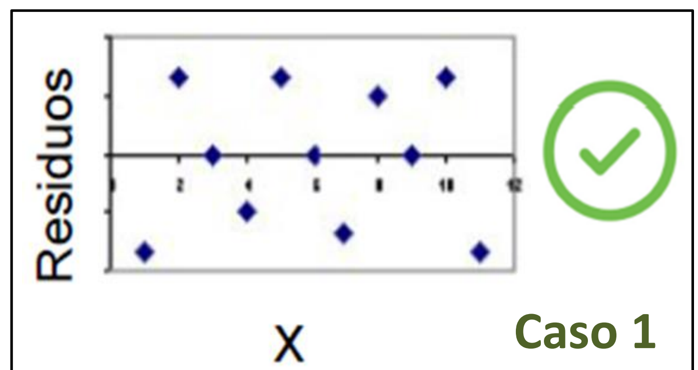
Necesito evaluar algo Más!!

Evaluar los residuos!!!

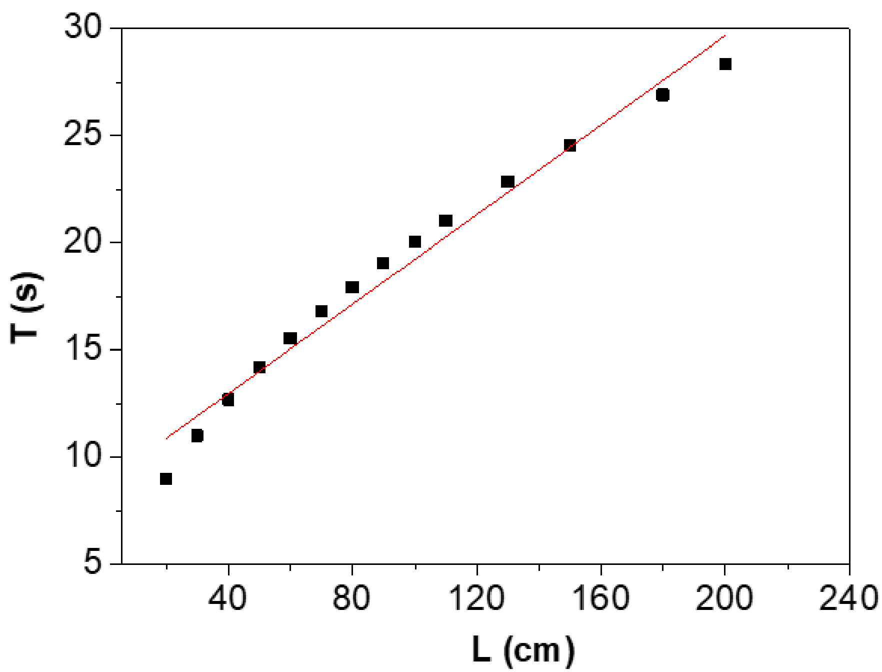
Residuos

En los casos 2, 3 y 4 sucedió que la distribución de los datos alrededor de la recta no era normal. Los residuos tenían estructura

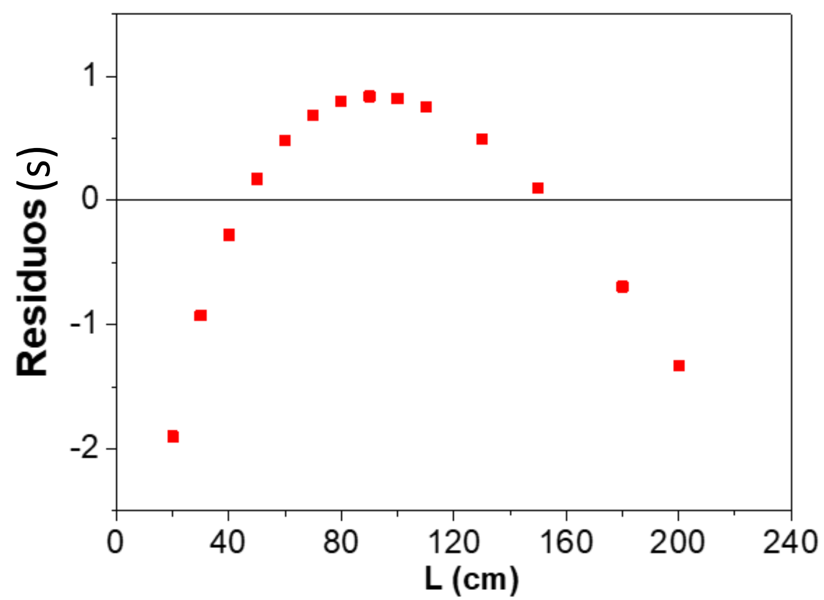




Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a T en función de l!!



$r = 0,988$



¿Qué esperamos?

Parámetros que nos servirán de ayuda

Coeficiente de Correlación de Pearson $\boldsymbol{r}$ → $\boldsymbol{|r| \sim 1}$

Residuos →

Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
178	69.8	8.25	0.41	68.06	0.17	3.38
160	67.5	-9.75	-1.89	95.06	3.57	18.43
183	81	13.25	11.61	175.56	134.79	153.83
152	60.8	-17.75	-8.59	315.06	73.79	152.47
168	70.2	-1.75	0.81	3.06	0.66	-1.42
178	75.6	8.25	6.21	68.06	38.56	51.23
188	80.1	18.25	10.71	333.06	114.70	195.46
165	72	-4.75	2.61	22.56	6.81	-12.40
157	59.4	-12.75	-9.99	162.56	99.80	127.37
170	65.3	0.25	-4.09	0.06	16.73	-1.02
165	62.6	-4.75	-6.79	22.56	46.10	32.25
173	68.4	3.25	-0.99	10.56	0.98	-3.22
2037	832.7			1276.25	536.67	716.38

$S_{xy} = 59.70$ $S_x = 10.31$ $S_y = 6.69$

$$\bar{x} = \frac{2037}{12} = 169.75$$

$$\bar{y} = \frac{832.7}{12} = 69.39$$

$$S_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N}$$

$$S_{xy} = \frac{716.38}{12} = 59.70$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1276.25}{12}}$$

$$S_x = \sqrt{106.35} = 10.31$$

$$S_y = \sqrt{\frac{536.67}{12}} = 6.69$$

Coeficiente de Correlación de Pearson

Ejemplo

$$S_{xy} = 59.70 \qquad S_x = 10.31 \qquad S_y = 6.69$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{59.70}{(10.31)(6.69)} = \frac{59.70}{68.97} = 0.87$$

Coeficiente de determinación

$$r^2 = 0.87^2 = 0.7569 = 75.69\%$$

Objetivo de la práctica de hoy y …. Cómo resolverlo

Determinar la aceleración de la gravedad (g) a partir de los datos del Período de un Péndulo (T) para distintas Longitudes (l) y utilizando un modelo lineal del Método de Cuadrados Mínimos

$$\boxed{\boldsymbol{g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud.}}$$

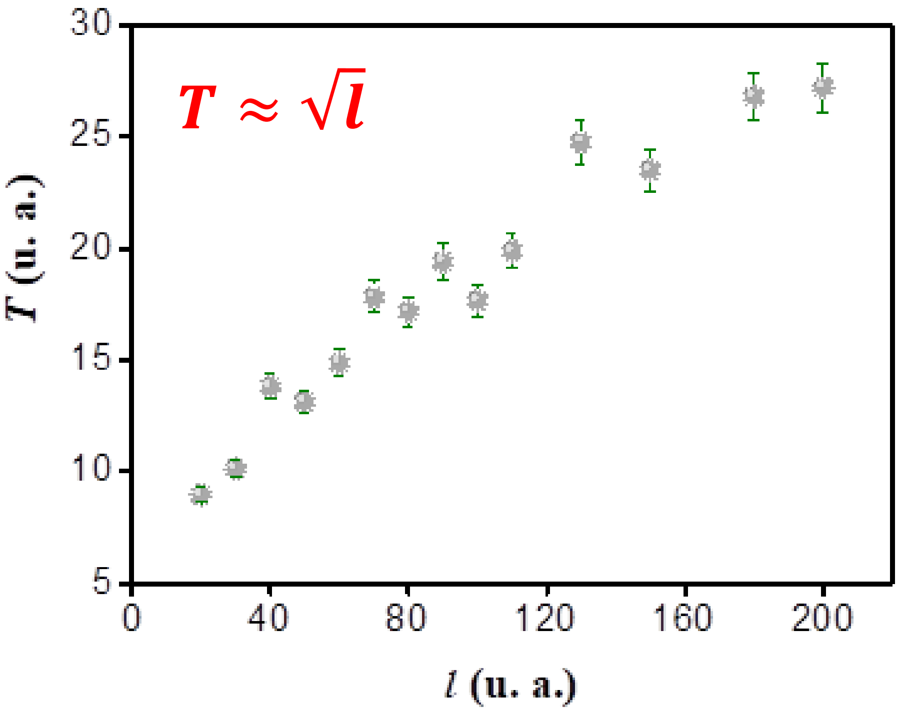
EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 1

- Determinar el período del péndulo (T) para 10 valores de longitud (l) en el rango 30-120 cm si puede.
- Graficar T en función de l (con un gráfico de puntos) con las incertezas *¿Parece ser lineal?*

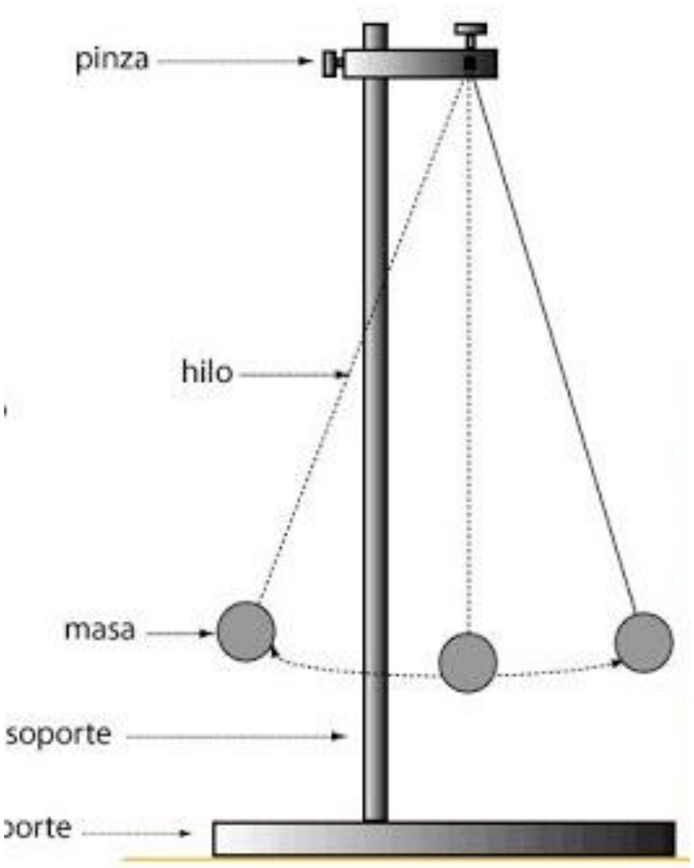
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

T NO ESTÁ RELACIONADO LINEALMENTE CON l

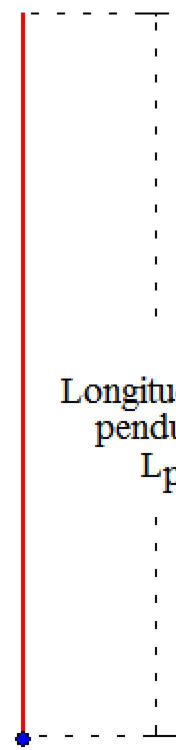


EXPERIMENTO

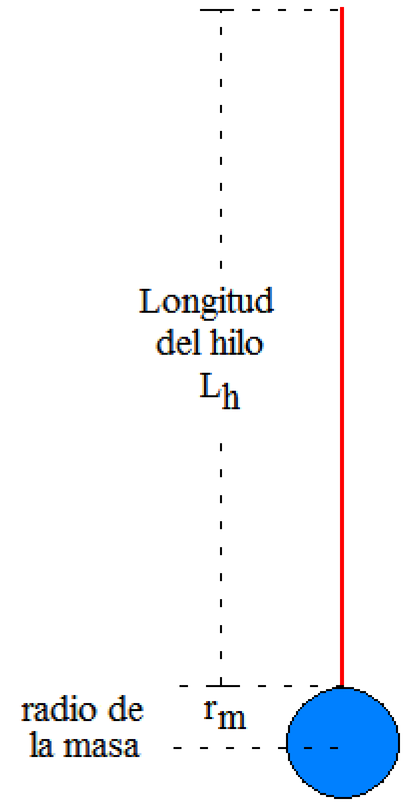
PÉNDULO



Caso ideal



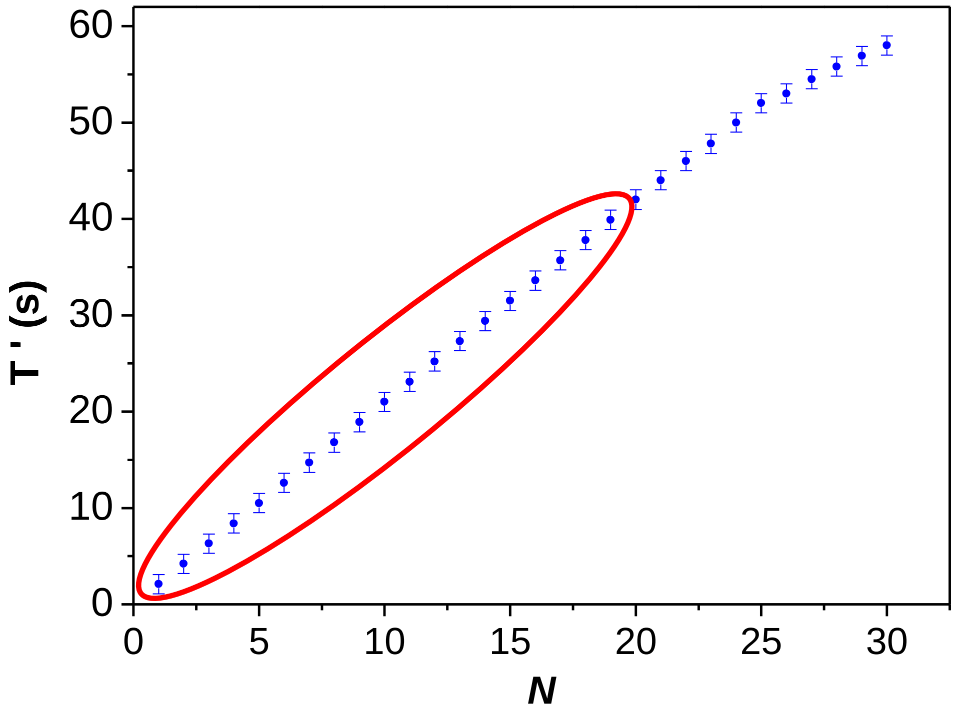
Caso real



¿Mido *N* veces cada período (*T*)?

EXPERIMENTO

Repasemos la clase pasada: Qué observamos en el gráfico del tiempo trascurrido en función del número de períodos...



Para un dado N la respuesta es lineal

Puedo concluir que podría medir 1 sola vez N períodos juntos en lugar de medir N veces cada período

MIDO 1 VEZ N PERÍODOS JUNTOS

EXPERIMENTO

¿Cuál será el resultado de T?

N períodos juntos (T'): $T' = N.T \rightarrow T = \frac{T'}{N}$ ⇨ $\boxed{\bar{T} = \frac{\bar{T'}}{N}}$

Propagando!

¿Y la incerteza de T?

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 \Delta T'^2} = \frac{1}{N}\Delta T'$$

La incerteza de una medida $\rightarrow \Delta T' = S \text{ o } \sigma$

$$\boxed{\Delta T = \frac{S}{N}} \rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{\sigma}{N}}$$

$S\ (\sigma) \rightarrow$ Y ya la calculamos antes!!

¿Variará si cambiamos la longitud del hilo?

ACTIVIDAD 2

EXPERIMENTO

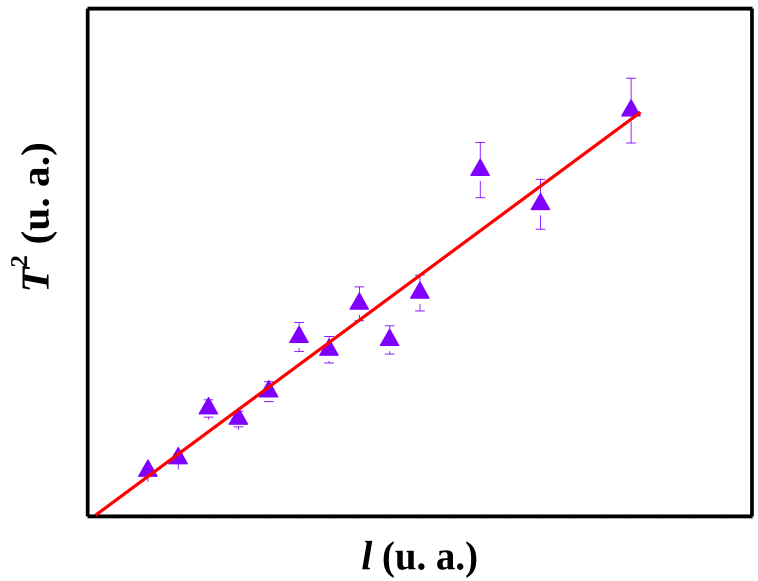
Determinar la aceleración de la gravedad (g) … utilizando un Modelo Lineal

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\overset{T}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\,\overset{\tilde{l}}{\sqrt{l}}$$

$$\underset{\tilde{T}}{T^2} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\,\underset{l}{l}$$



EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 2

Propago!!

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ y $l = l$:

  1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $T^2 \rightarrow \Delta T^2$) y Δl

  2- Obtenga los errores relativos de $\tilde{T}$ y l ($\varepsilon_{r_{\tilde{T}}}$ y ε_{rl}) y compárelos

- Graficar T^2 en función de l con las incertezas (o l en función de T^2dependiendo de los $\varepsilon_{r_{T^2}}$ y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje "y".

- Realizar un ajuste por dos modelos lineales:
  ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?

  ✓ $y = mx$

  ✓ $y = mx + b$

- Graficar los residuos de ambos ajustes y discutirlos.

EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 2

- Reportar m y b (con incertezas y unidades!). Discutir qué podría representar b en su experiencia. *¿Es distinto de cero?*

- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud$. a partir de los resultados de los ajustes.

- Comparación de g:

¿Presentan diferencias significativas entre sí?

¿Cuál resultó más exacto?

¿Cuál más preciso?

Son los resultados de g obtenidos por el modelo lineal más precisos que el obtenido la clase anterior para 1 único valor de l?

A cuántos σ quedó el valor de g del esperado: g= 9.79688239 m/s^2

EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 2

AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

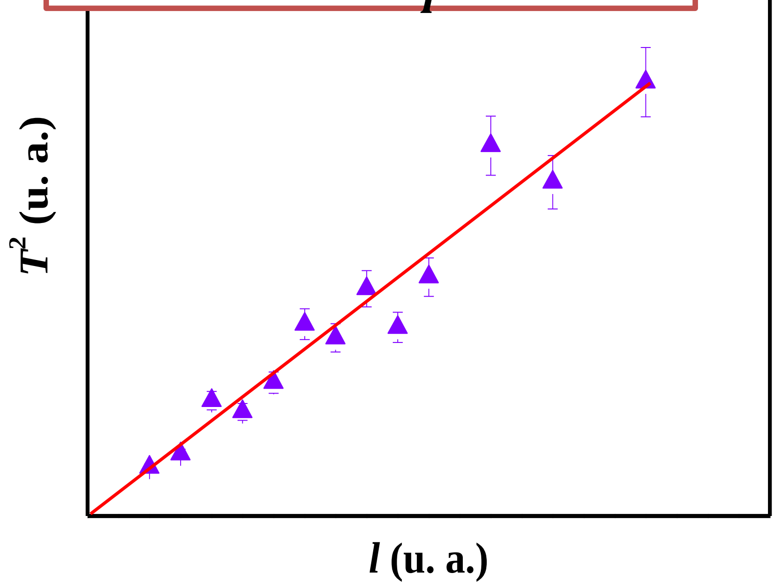
$$m = \frac{4\pi^2}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\boxed{\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}}$$

¿ Δg?

Propago!!

Ejemplo Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \gg \varepsilon_{r_l}$



$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{2\pi^2}{m^{3/2}}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta\pi^2}$$

¿Puedo despreciar el término de π?

EXPERIMENTO

ACTIVIDAD 2

AYUDA

¿ Si $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r\ l}$?

SE DEBE GRAFICAR l en función de T^2

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \quad \Rightarrow \quad \underset{y}{l} = \frac{g}{4\pi^2} \underset{x}{T^2}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

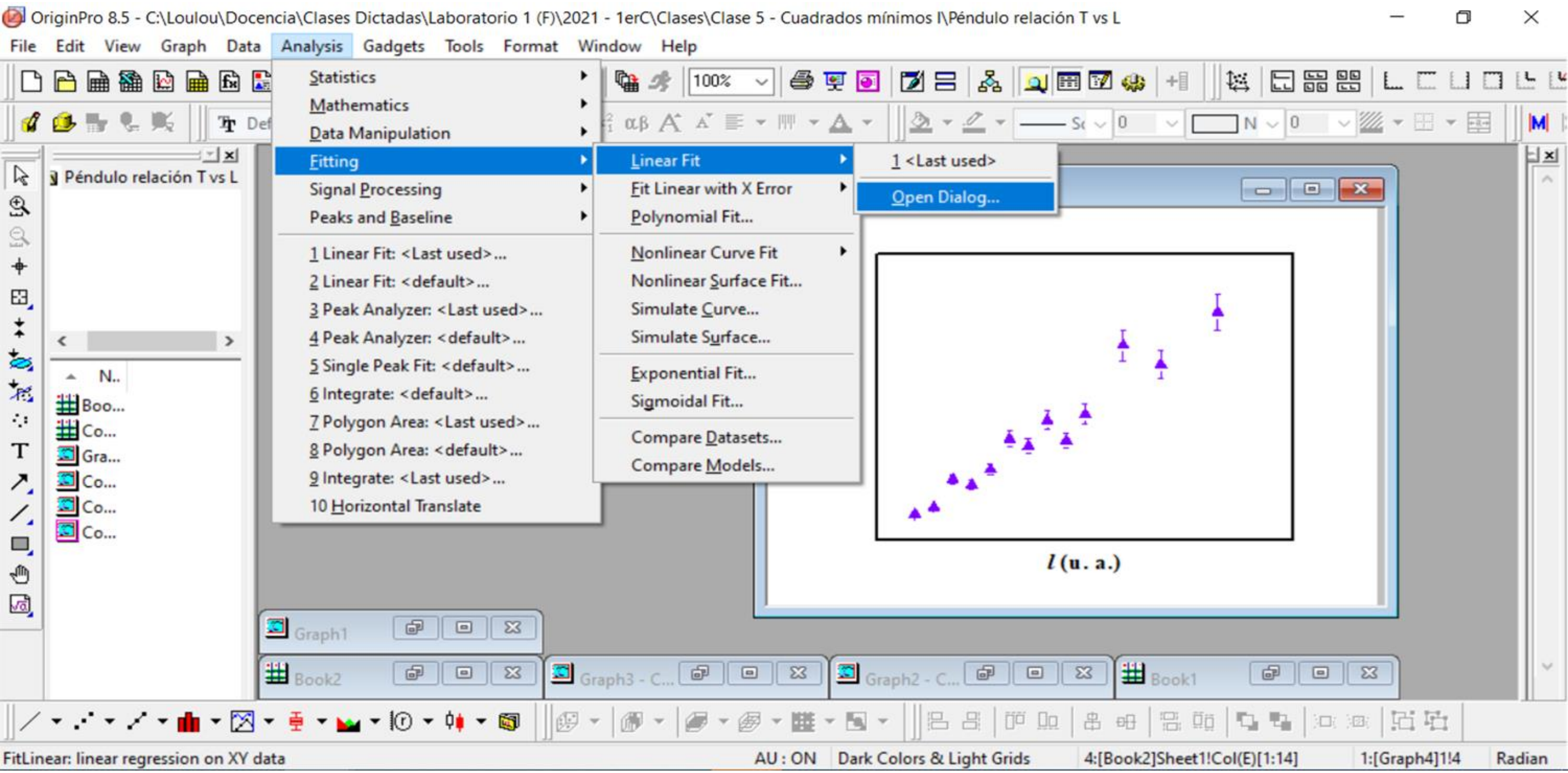
$$m = \frac{g}{4\pi^2} \longrightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿ Δg?

Propago!!

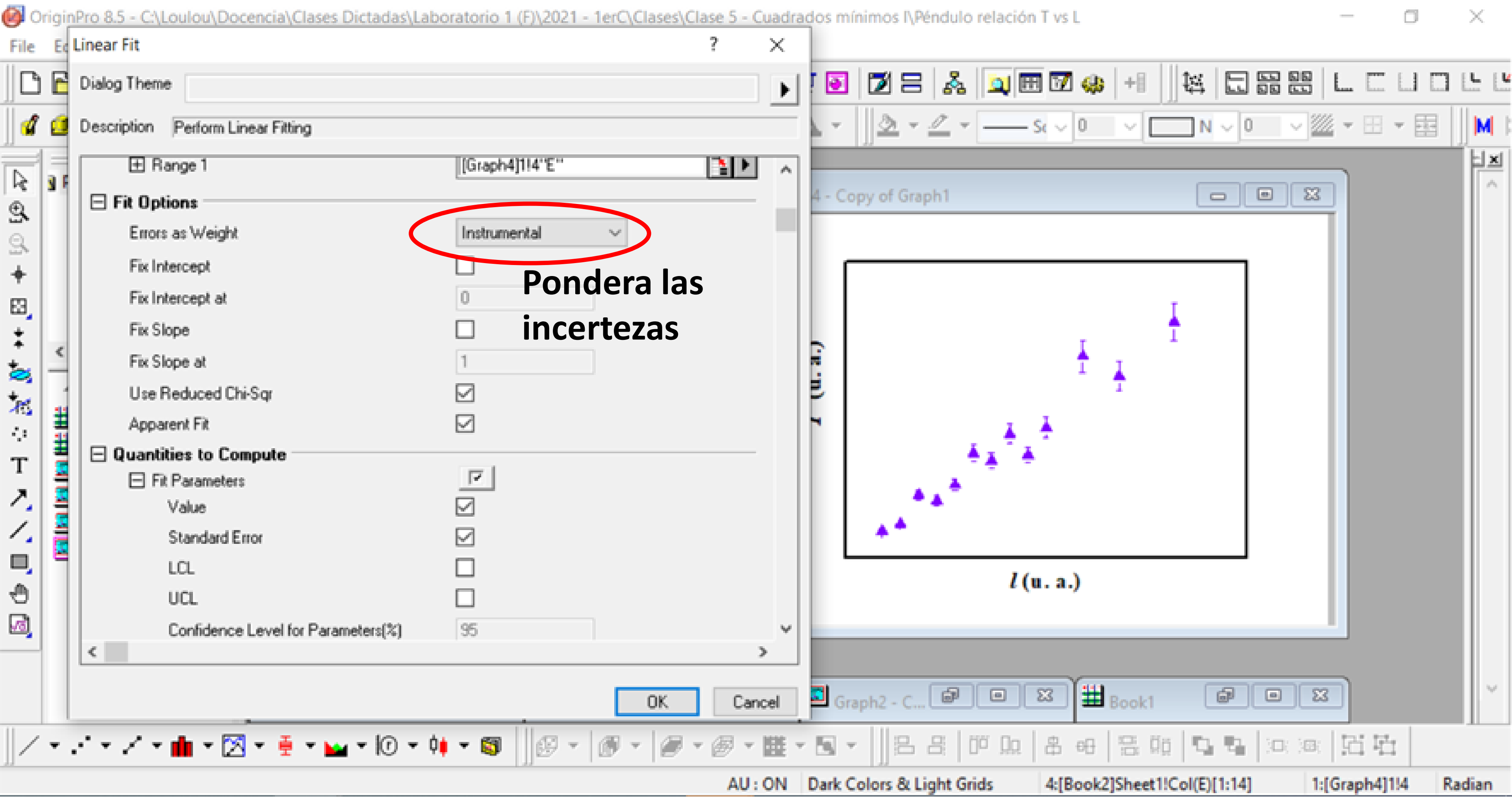
EXPERIMENTO

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)



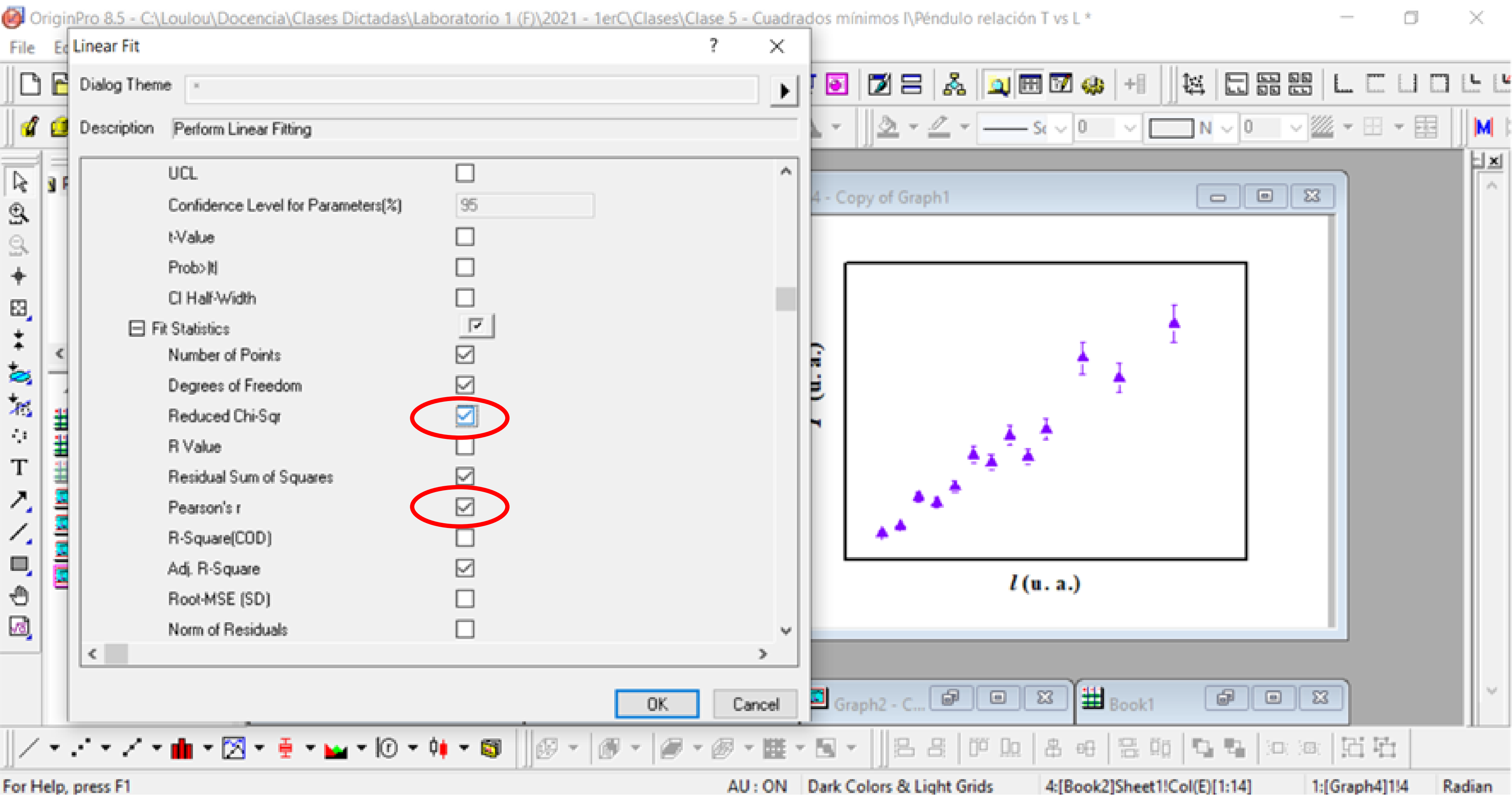
EXPERIMENTO

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)



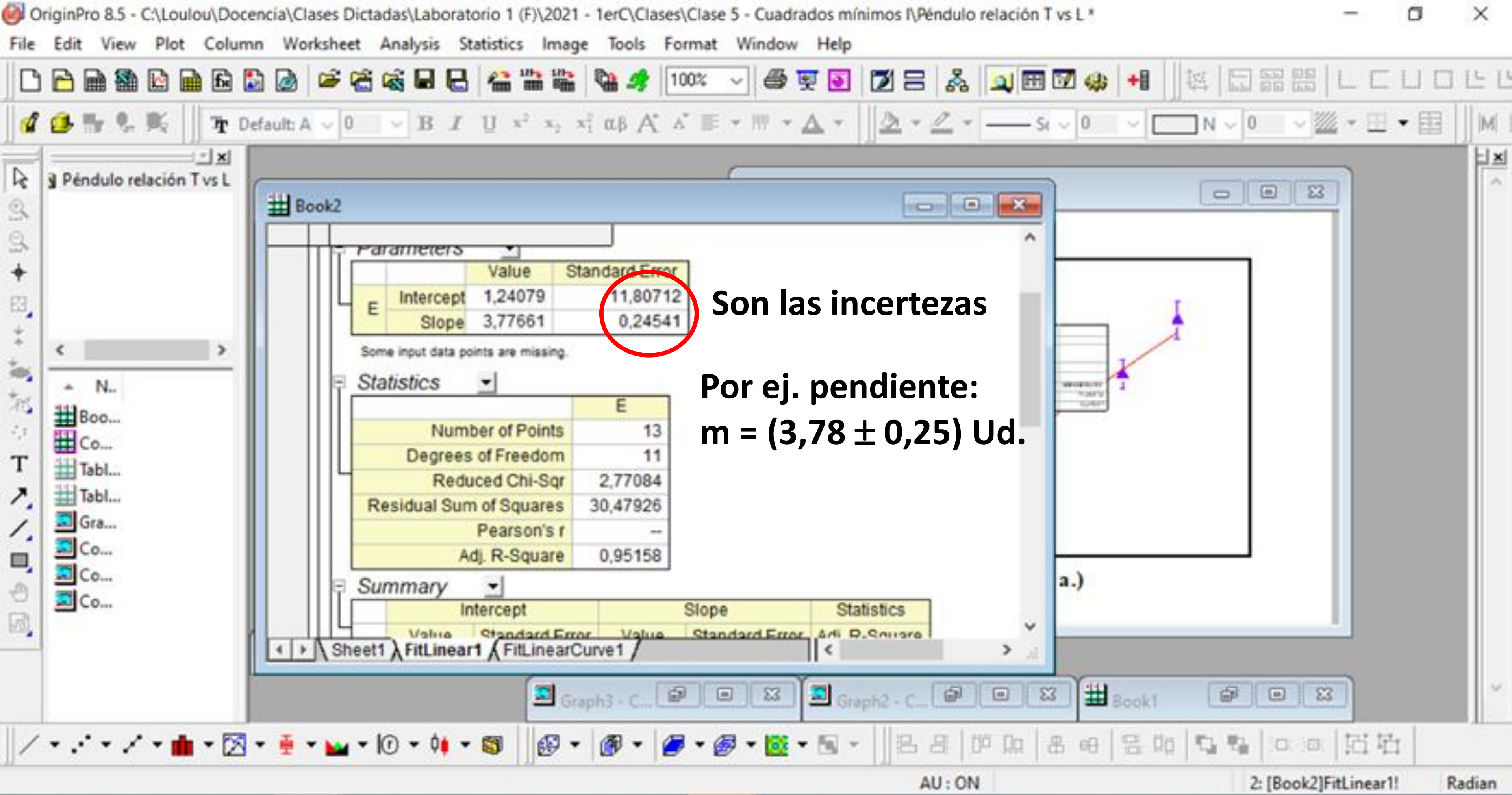
EXPERIMENTO

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)



EXPERIMENTO

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)



Son las incertezas

Por ej. pendiente:

m = (3,78 ± 0,25) Ud.

EXPERIMENTO

Ayuda para realizar el ajuste en el Origin (ver el apunte de la página)