

# Laboratorio 1

## Turno C

Clase 3

Mediciones indirectas  
(23/04/2022)

- ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
  - ✓ Calibre
  - ✓ Micrómetro
- ✓ Mediciones indirectas
- ✓ Incertidumbre, propagación de errores
- ✓ Experiencias



## Instrumentos de Medición de dimensiones.

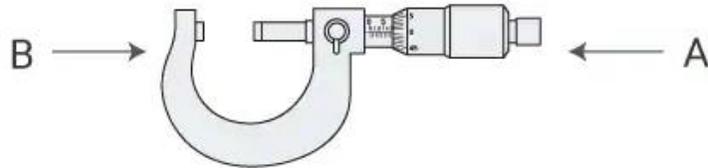
### Principio de Abbe

Para optimar la precisión de la medición, el objeto a medir y la escala del instrumento de medición, deben colocarse de forma colineal en la dirección de medición".

El principio de Abbe se refiere a la precisión al medir dimensiones.

Cuando se aplica a los instrumentos de medición reales, el principio implica que, **para los micrómetros exteriores**, la escala y la posición de medición son colineales.

#### Los micrómetros siguen el principio de Abbe

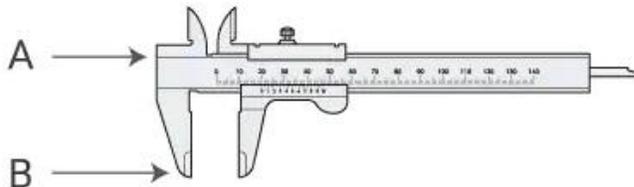


A : Posición de la escala B : Posición de medición



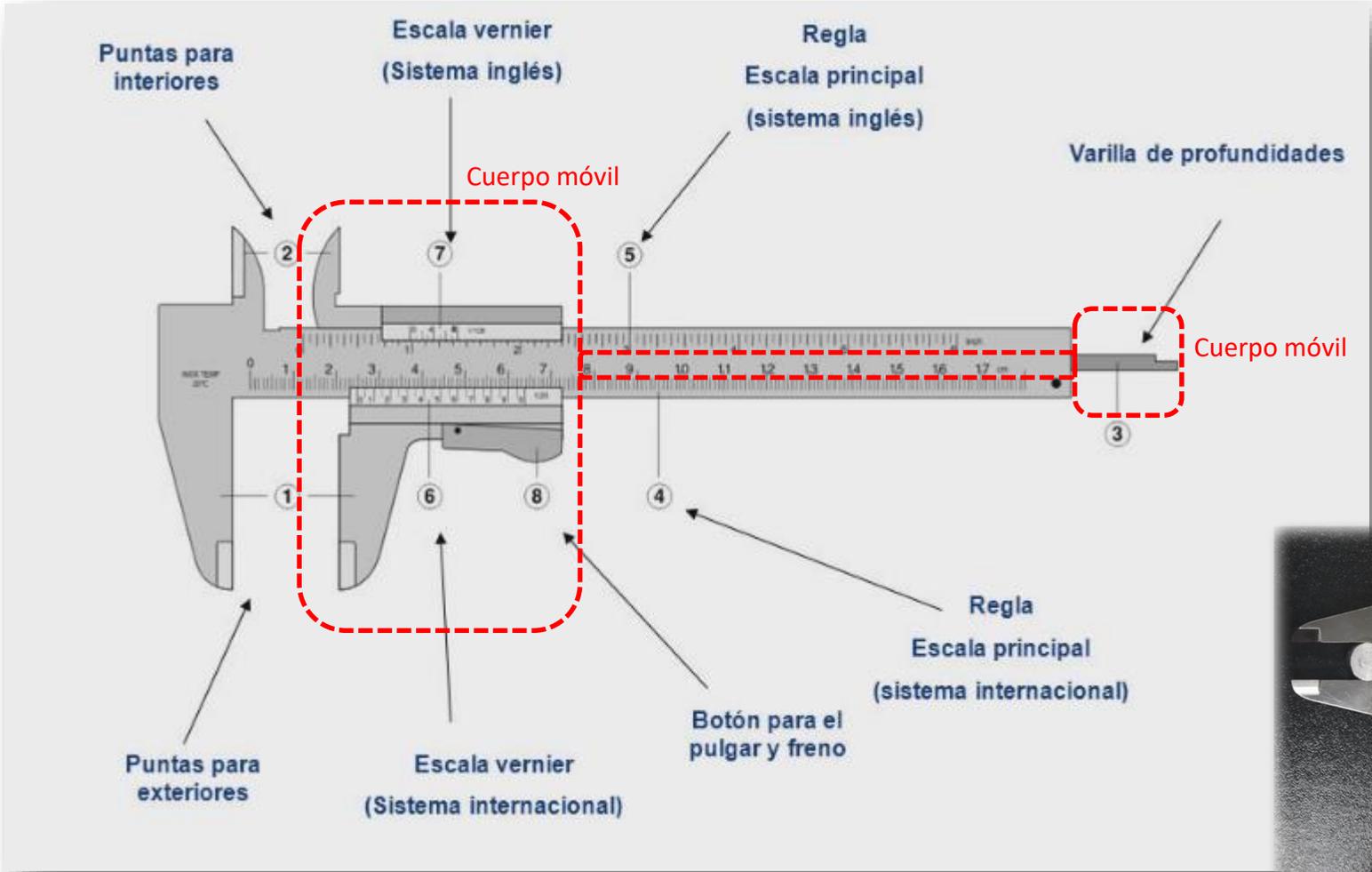
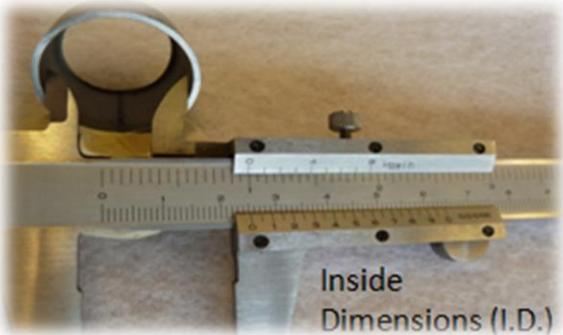
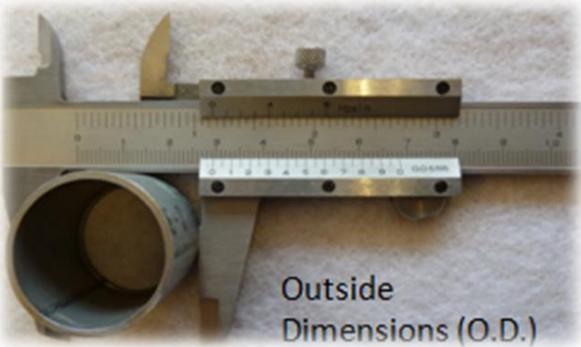
Se puede decir que los micrómetros exteriores tienen una mayor precisión de medición.

#### Los calibradores de mano no siguen el principio de Abbe

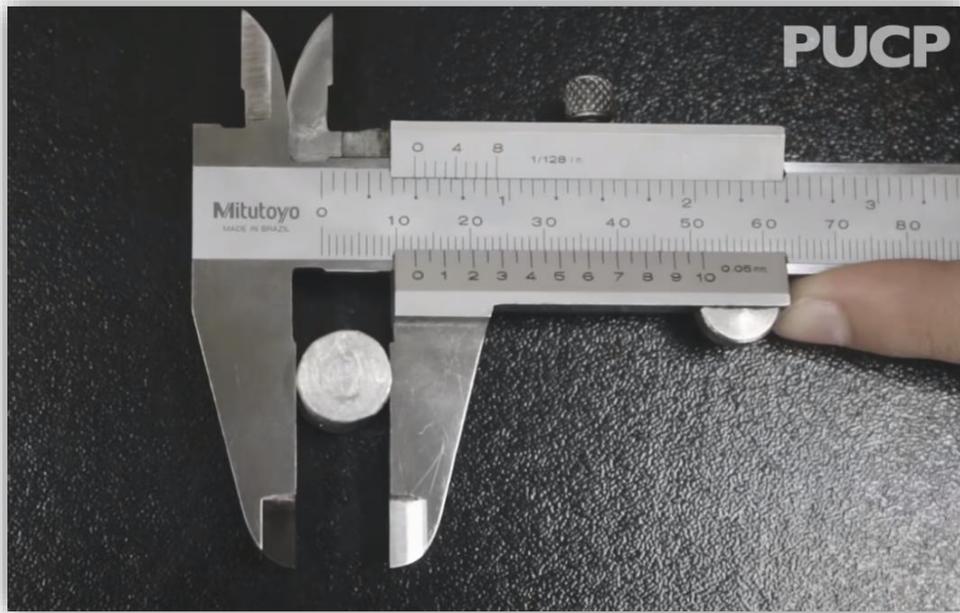


Para **los calibre de mano**, la escala y la posición de medición están a cierta distancia entre sí.

# Medición de dimensiones : Calibre



[https://www.stefanelli.eng.br/en/virtual-vernier-caliper-simulator-05-millimeter/#swiffycontainer\\_2](https://www.stefanelli.eng.br/en/virtual-vernier-caliper-simulator-05-millimeter/#swiffycontainer_2)



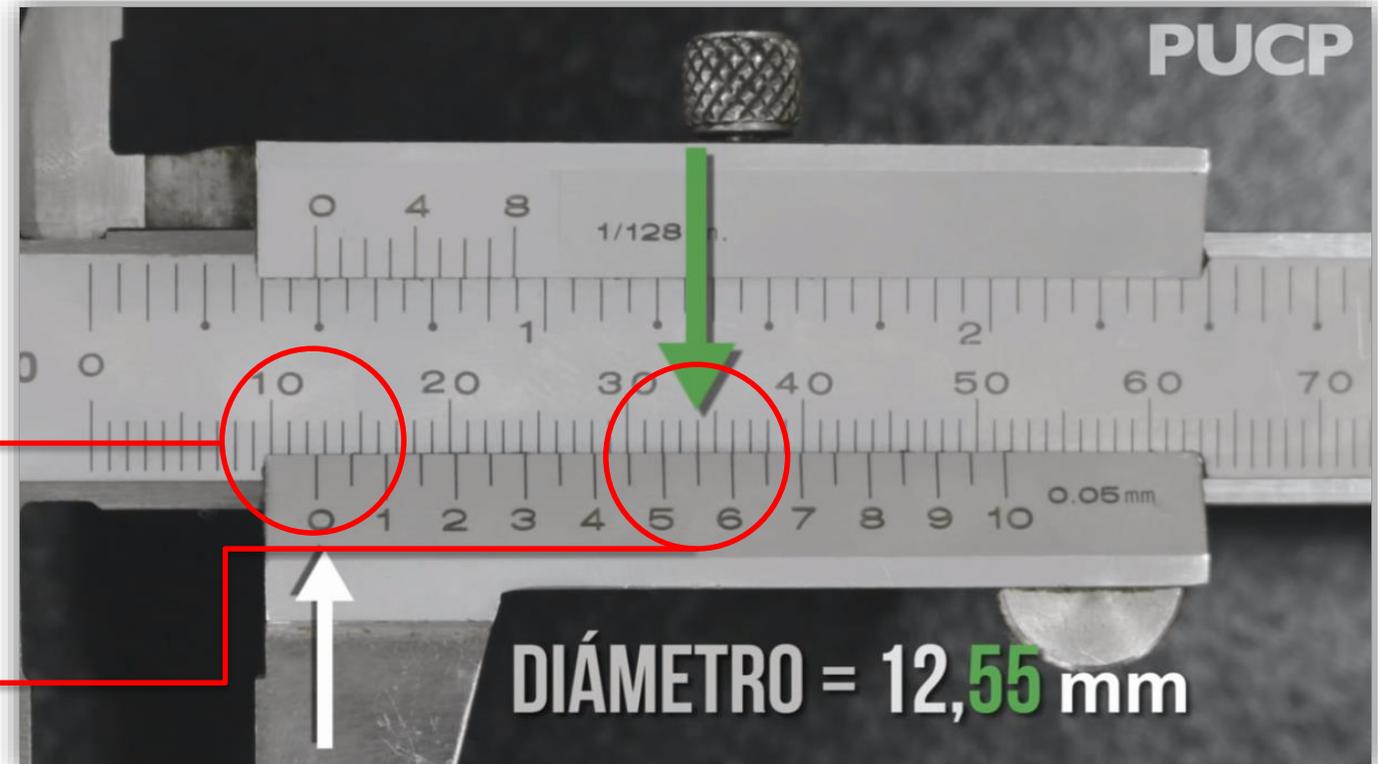
<https://www.youtube.com/watch?v=RFhelsCKC9w>

## ¿ Cómo se lee en un calibre ?

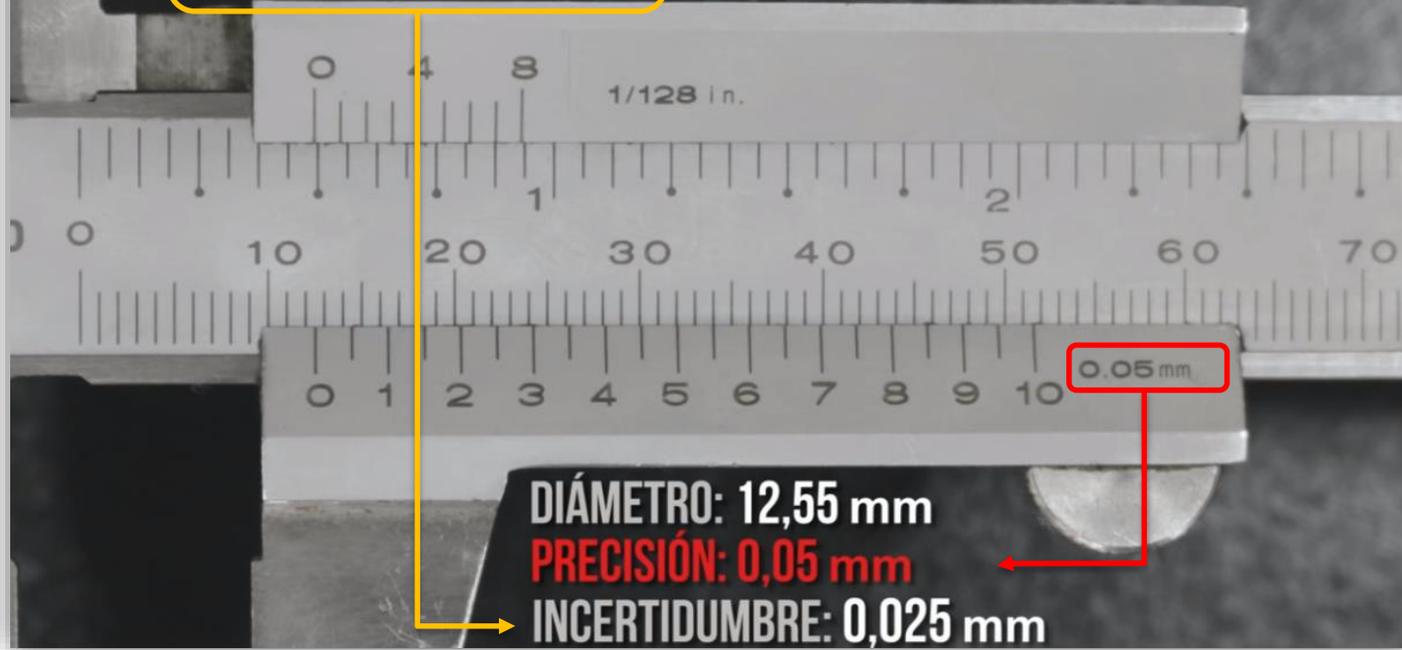
- El 0 (cero) de la parte móvil marca el intervalo de medida en el cual se encuentra el valor a determinar. Se toma límite inferior de ese intervalo con el entero (en la escala del calibre).
- Se busca en la regla móvil la concordancia entre divisiones de la regla móvil y la del cuerpo fijo. El valor correspondiente en la regla móvil indica la fracción de la medición.

La medición está entre 12 y 13 mm.  
Se fija como entero 12 mm

La concordancia está en 5,5 (la línea número 11) y cada mínima división es 0,05 mm, por lo tanto son 0,55 mm que se agregan a los 12 mm



$$\text{INCERTIDUMBRE} = \frac{\text{PRECISIÓN}}{2}$$



Incertidumbre (error o desviación estándar) de la lectura

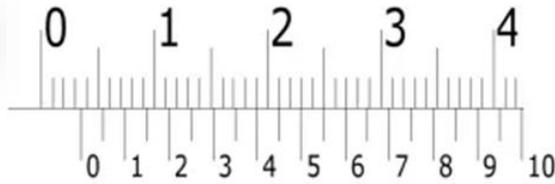
0,03 mm



DIÁMETRO =  
(12,55 ± 0,03) mm

## Ejemplos

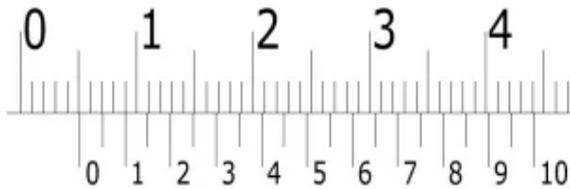
**3,45mm**



En la regla, a la izquierda del cero del nonio, hay 3 divisiones, esto significa que hay 3 milímetros enteros, en el nonio coincide la división que está justo entre el cuatro y el cinco con una división de la regla, o sea 4 décimas y media o 0,45mm , entonces el resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio:

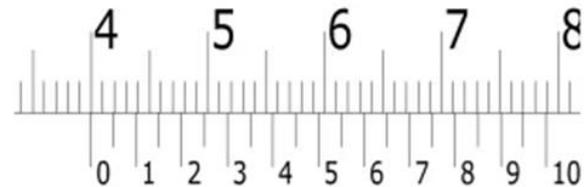
$$3 + 0,45 \text{ mm} = 3,45\text{mm}$$

**5,1mm**



5 divisiones de la regla a la izquierda del cero del nonio, lo que significa que hay 5 milímetros enteros, en el nonio coincide la división del 1 con una división de la regla, o sea 0,1 mm , entonces el resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio:

**39,95mm**



39 milímetros enteros a la izquierda del nonio, más 9 ,5 divisiones en el nonio del pie de rey, da como resultado 39,95 mm.

La experiencia consiste en hacer tres mediciones diámetro y altura de una cilindro de acero

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)
Primera medición	12,55	19,90
Segunda medición	12,30	19,85
Tercera medición	12,70	20,30
<b>Media (promedio)</b>	<b>12,52</b>	<b>20,02</b>
Desviación Estándar		
Incertidumbre Estándar		
Incertidumbre de lectura	<b>0,03</b>	<b>0,03</b>
Incertidumbre total en la medida		

4 c.s.



$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{promedio}$$

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)
Primera medición	12,55	19,90
Segunda medición	12,30	19,85
Tercera medición	12,70	20,30
Media (promedio)	12,52	20,02
Desviación Estándar	<b>0,2021</b>	<b>0,2466</b>
<b>Incertidumbre Estándar</b>	<b>0,1167</b>	<b>0,1424</b>
Incertidumbre de lectura	<b>0,03</b>	<b>0,03</b>
Incertidumbre total en la medida		

4 c.s.  
4 c.s.  
4 c.s.

*desviación estándar de una muestra* =  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2}{3 - 1}}$

La corrección no sesgada de Bessel (N-1) en vez de N

*incertidumbre estándar* =  $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Si hubiera repetido muchas veces la misma experiencia

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)	
Primera medición	12,55	19,90	} 4 c.s.
Segunda medición	12,30	19,85	
Tercera medición	12,70	20,30	
Media (promedio)	12,52	20,02	4 c.s.
Desviación Estándar	<b>0,2021</b>	<b>0,2466</b>	4 c.s.
<b>Incertidumbre Estándar</b>	<b>0,1167</b>	<b>0,1424</b>	4 c.s.
Incertidumbre de lectura	<b>0,03</b>	<b>0,03</b>	
Incertidumbre total en la medida			

$$\text{incertidumbre total en la medida} = \sqrt{(\text{incertidumbre de lectura})^2 + (\text{incertidumbre estándar})^2}$$

$$\text{incertidumbre total en la medida del diámetro} = \sqrt{(0,03)^2 + (0,1167)^2} = 0,1$$

$$\text{incertidumbre total en la medida de la altura} = \sqrt{(0,03)^2 + (0,1424)^2} = 0,1$$

<b>Mediciones</b>	<b>Diámetro (mm)</b>	<b>Altura (mm)</b>
Primera medición	12,55	19,90
Segunda medición	12,30	19,85
Tercera medición	12,70	20,30
Media (promedio)	<b>12,52</b>	<b>20,02</b>
Desviación Estándar	<b>0,2021</b>	<b>0,2466</b>
Incertidumbre Estándar	<b>0,1167</b>	<b>0,1424</b>
Incertidumbre de lectura	<b>0,03</b>	<b>0,03</b>
Incertidumbre total en la medida	<b>0,1</b>	<b>0,1</b>

$$\text{Diámetro} = 12,5 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$$

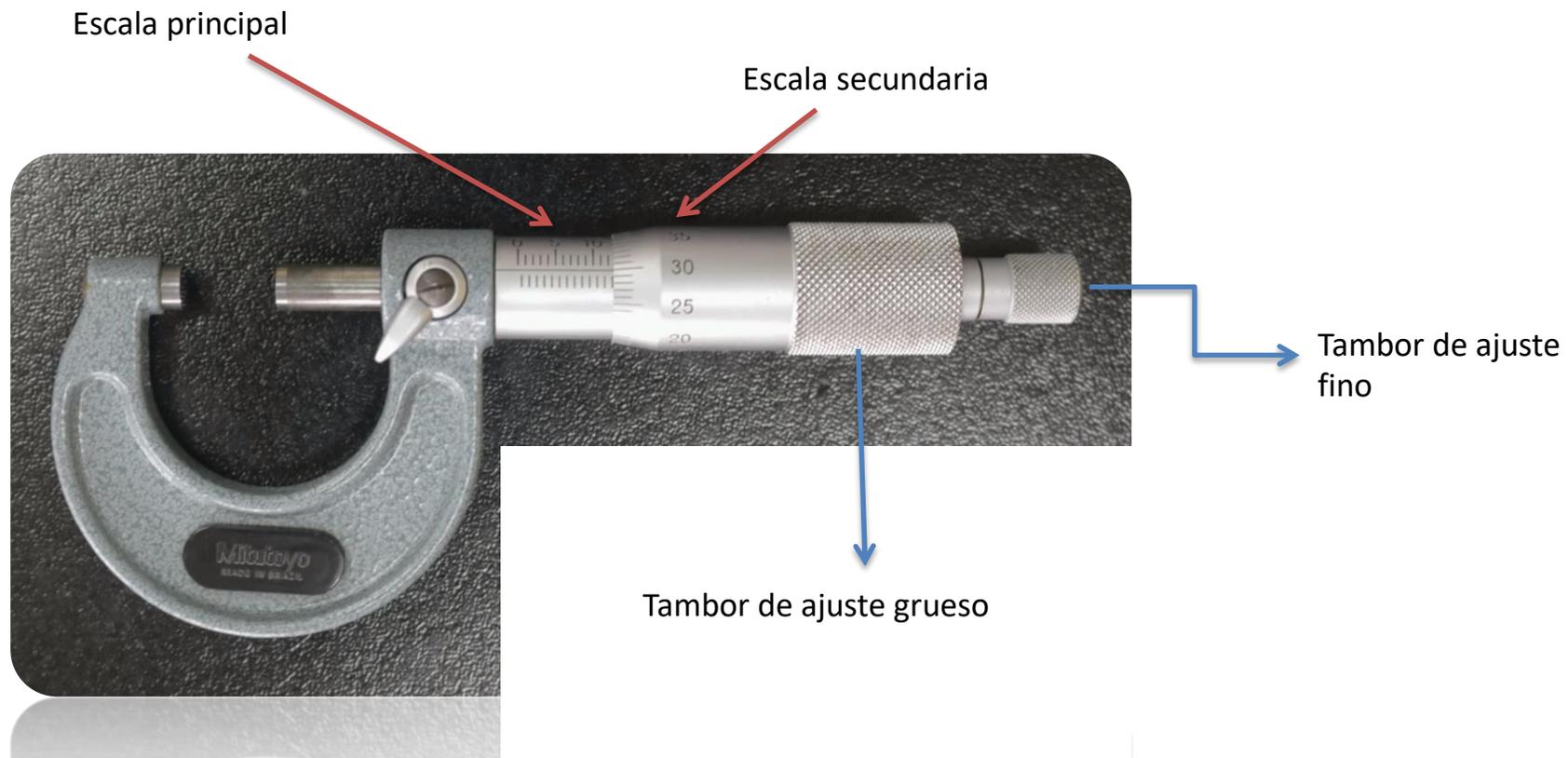
$$\text{Altura} = 20,0 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$$

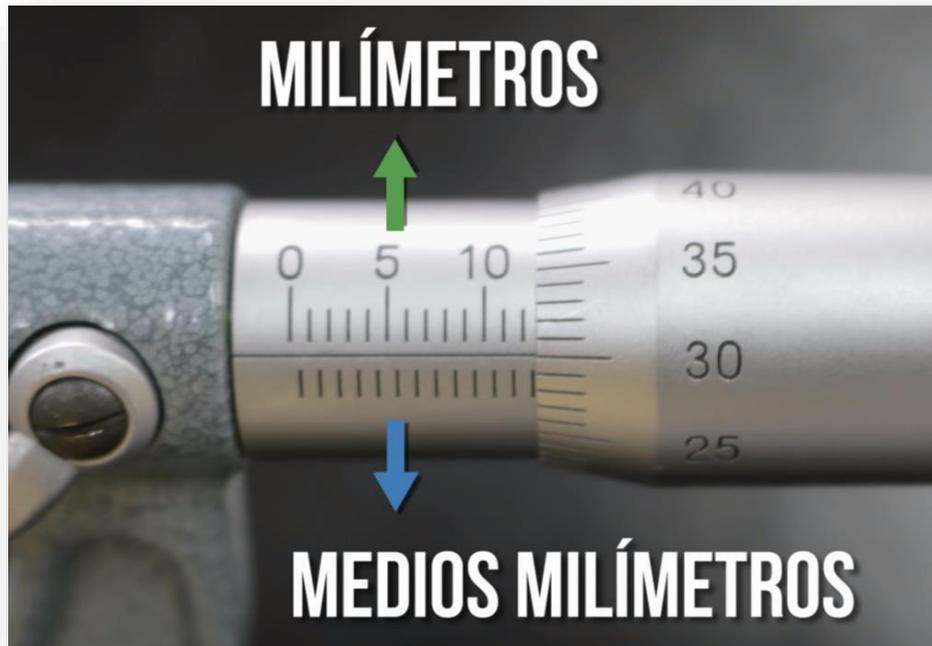
## Medición de dimensiones : El micrómetro

El micrómetro es un instrumento que mide el tamaño de un objeto encerrándolo.

Algunos modelos incluso pueden realizar mediciones en unidades de  $1\ \mu\text{m}$ .

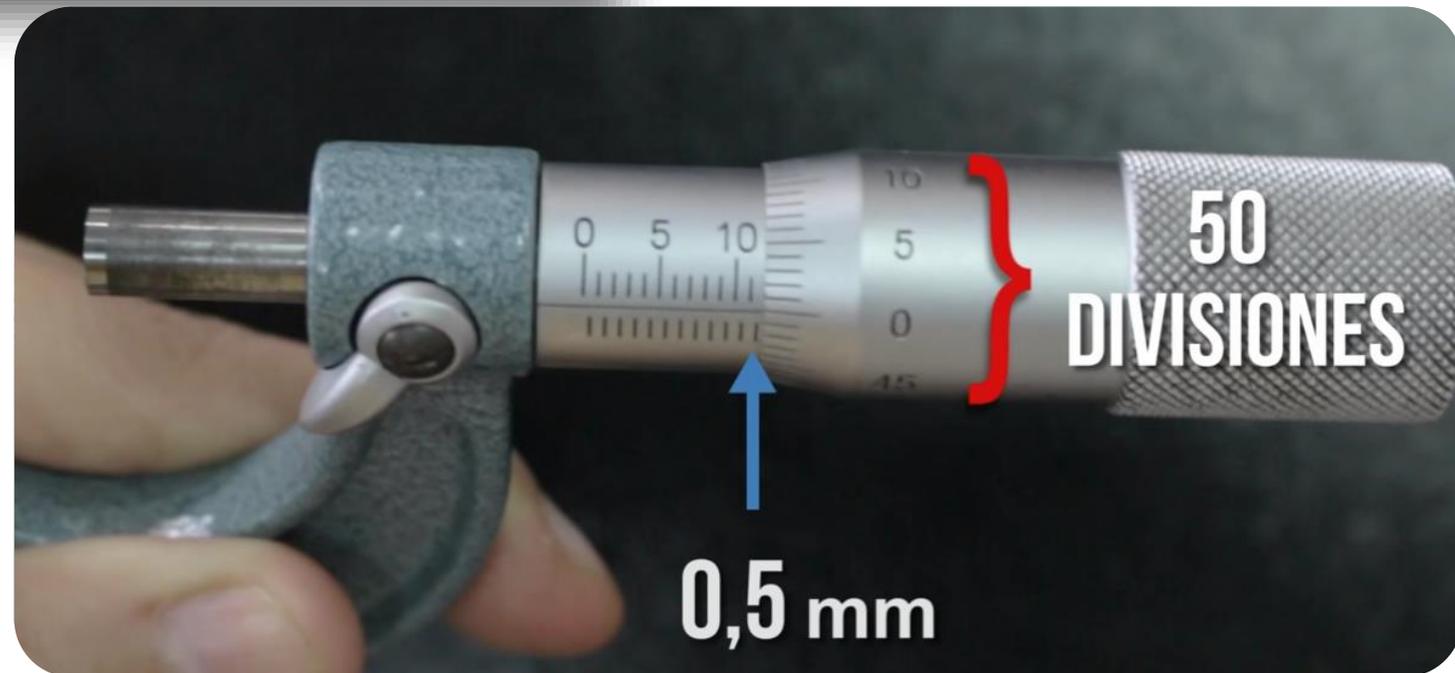
A diferencia de los calibres de mano, los micrómetros se adhieren al principio de Abbe, que les permite realizar mediciones más precisas.





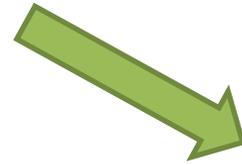
Una vuelta de tambor es 0,5 mm  
Cada división del tambor es de 0,01 mm  
La incertidumbre es de 0,005 mm

$$\text{INCERTIDUMBRE} = \frac{\text{PRECISIÓN}}{2}$$





Supongamos la medición del diámetro de un cilindro de metal



- 
- ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
    - ✓ Calibre
    - ✓ Micrómetro
  - ✓ Mediciones indirectas
  - ✓ Incertidumbre, propagación de errores
  - ✓ Experiencias

## Mediciones indirectas

- ✓ La medida indirecta de una magnitud se alcanza **por aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas**, (variables independientes o datos), que las relacionan con la magnitud problema.
- ✓ Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida.
- ✓ Si en la fórmula hay números irracionales (tales como  $\pi$  o  $e$ ) se deben elegir con un número de cifras significativas que no afecten a la magnitud del error absoluto de la magnitud que queremos determinar.
- ✓ Esta elección determinará el valor del error asignado a dicha constante.
- ✓ Cuando se trabaja con calculadora o computadora lo más conveniente es tomar todos los decimales que aparecen para el número en cuestión (así, su error es muy pequeño y puede despreciarse frente a los del resto de las magnitudes que intervengan).

En la mayor parte de los casos **el valor mensurando  $Y$  no se mide directamente**, sino que se determina a partir de otras  $N$  cantidades  $X_1, X_2, \dots, X_N$  a través de una relación funcional

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Una estimación del mensurando  $Y$ , denotada por  $y$ ,  
se calcula utilizando estimaciones de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Una estimación del mensurando } Y, \text{ denotada por } y, \\ \text{se calcula utilizando estimaciones de entrada } x_1, x_2, \dots, x_N. \end{array} \right\} y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En algunos casos, la estimación puede evaluarse con la ecuación:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}) \longrightarrow \begin{array}{l} \text{media aritmética de n} \\ \text{determinaciones independientes} \\ Y_k \text{ de } Y \end{array}$$

$X_{i,k}$  es la observación k de  $X_i$ , y cada determinación tiene la misma incertidumbre

La otra forma es medir cada variable  $X_i$  n veces, promediarla y calcular con los promedios el valor de la magnitud y

$$\longrightarrow y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) \longrightarrow$$

En ese caso debo estimar la dispersión de y (varianza y luego desviación estándar) considerando las varianzas de cada magnitud  $X_i$

La desviación estándar estimada, es la incertidumbre estándar combinada  $\sigma_c$

Se calcula de la desviación estándar estimada que se asocia a cada estimación  $x_i$ , denominada incertidumbre estándar y designada con  $\sigma(x_i)$

- ✓ La **evaluación tipo A** de la incertidumbre se basa en el primer caso (una distribución de frecuencias)
- ✓ La **evaluación tipo B** de la incertidumbre resulta de una distribución establecida a priori.
- ✓ Ambas reflejan nuestro conocimiento del proceso de medición

## Evaluación tipo A de la incertidumbre estándar

En la mayor parte de los casos, la mejor estimación del valor esperado de una cantidad  $q$ , y para la cual se han hecho  $n$  mediciones independientes  $q_k$  es la media aritmética o promedio  $\bar{q}$  :

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \qquad s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2$$

La mejor estimación de la varianza de la media  $\longrightarrow \sigma_e^2(q) = \sigma^2/n \qquad s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n}$

La evaluación tipo A de la incertidumbre estándar de un conjunto de mediciones  $x_k$ , tal como se definió previamente, se logra con la ecuación:

$$\sigma_e(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

## Evaluación tipo B de la incertidumbre estándar

Cuando se tiene una estimación  $x_i$  de una cantidad  $X_i$  **que no se ha obtenido de observaciones repetidas**, la varianza estimada  $\sigma^2(x_i)$  o la incertidumbre estándar  $\sigma_e(x_i)$  se evalúan por un juicio científico basado en toda la información disponible acerca de la variabilidad de  $X_i$ .

Entre ésta se pueden incluir:

- ✓ datos de mediciones anteriores
- ✓ experiencia o conocimiento general acerca del comportamiento y propiedades de materiales de referencia, patrones o instrumentos
- ✓ especificaciones del fabricante
- ✓ datos provistos en calibraciones u otros certificados
- ✓ incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales .

Cálculo de incertidumbre estándar combinada

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Existen diversos procedimientos para calcular la incertidumbre estándar combinada, dependiendo de si las variables son independientes o no, es decir, si existe alguna correlación entre ellas.



### Variables de entrada no correlacionadas

- La incertidumbre estándar de  $y$ , donde  $y$  es la estimación del mensurando  $Y$ .
- El resultado de una medición, se obtiene al combinar apropiadamente las incertidumbres estándares de las estimaciones de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_N$
- La incertidumbre estándar combinada es

$$\sigma_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)}$$

Coeficiente de sensibilidad

Regla de propagación de incertidumbre

### Variables de entrada correlacionadas

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma(x_i, x_j)$$

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma(x_i, x_j)$$

covarianza

La covarianza entre dos variables  $p$  y  $q$  se calcula

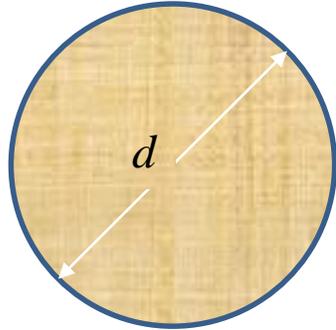
$$s(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (p_k - \bar{p})(q_k - \bar{q})$$

medias

$p_k$  y  $q_k$  son las observaciones individuales de dichas cantidades

## Magnitudes con incertidumbre instrumentales

Supongamos evaluar el área de un disco de diámetro  $d$



$$Area = \pi \frac{d^2}{4}$$

El diámetro  $d$  lo medimos con un calibre y el valor medido es  $d_o$

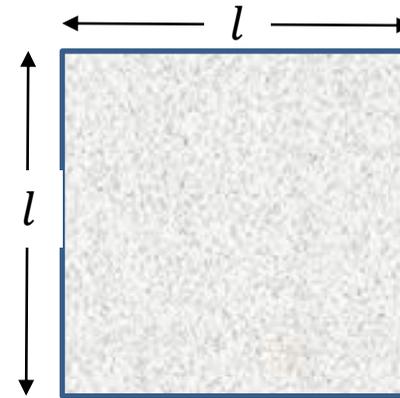
$$d = d_o \pm \Delta d$$

↓  
Incertidumbre del instrumento

En ambos casos el área debería expresarse por

$$A = A_o \pm \Delta A$$

Supongamos evaluar el área una baldosa cuadrada de lado  $l$



$$Area = l^2$$

El lado  $l$  lo medimos con una cinta métrica y el valor medido es  $l_o$

$$l = l_o \pm \Delta l$$

↓  
Incertidumbre del instrumento

$$\left. \begin{aligned} A_{max} &= (l_o + \Delta l)^2 \\ A_{min} &= (l_o - \Delta l)^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_o &= \frac{A_{max} + A_{min}}{2} \\ \Delta A &= \frac{A_{max} - A_{min}}{2} \end{aligned}$$

$$A_o = \frac{2l_o^2 + \cancel{2\Delta l^2}}{2} \approx l_o^2$$

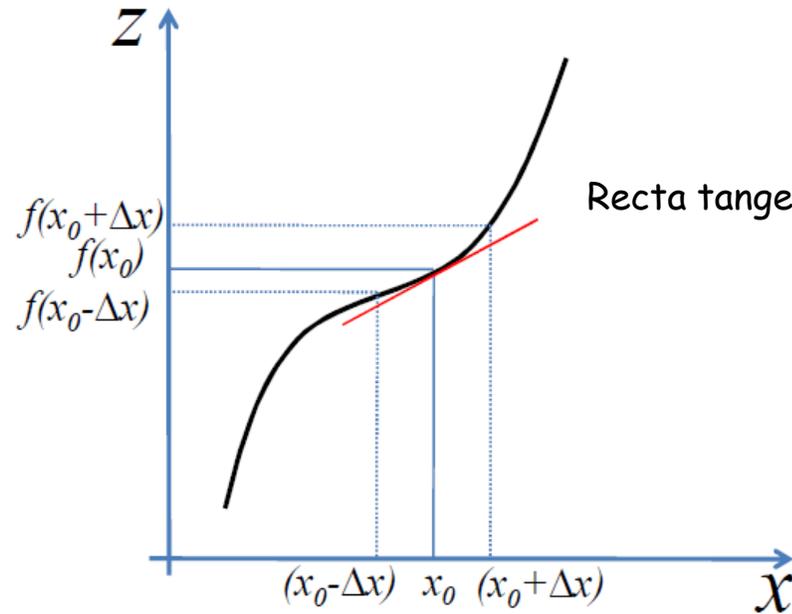
$$\Delta A = \frac{4l_o\Delta l}{2} = 2l_o\Delta l$$

$$A = A_o \pm 2l_o\Delta l$$

Supongamos que deseamos estimar el valor de una magnitud  $z$  a partir de una medición directa de una magnitud  $x$

$$z = f(x)$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)$$



$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$



$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

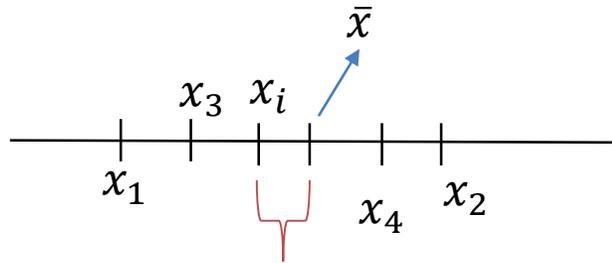
$$z_0 = f(x_0) \quad \Delta z = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} * \Delta x$$

Tenemos una función  $z = f(x)$

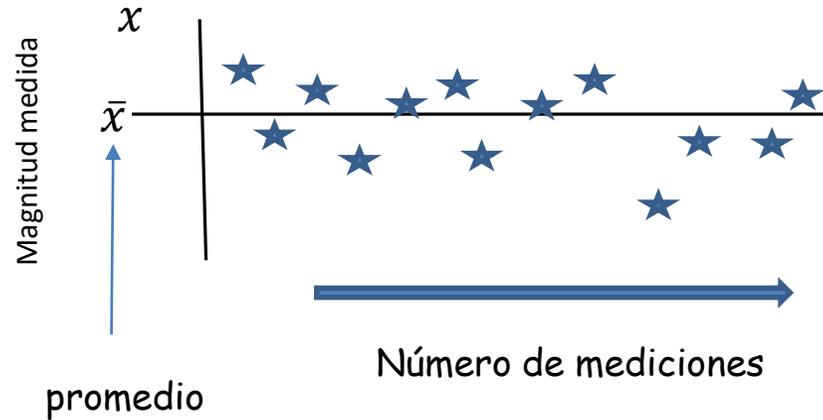
$x$  está sometida a fluctuaciones aleatorias

por ejemplo

Periodo medido del péndulo



$$\delta x_i = (x_i - \bar{x}) \quad i = 1, \dots, N$$



$$var = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{dvar}{d\bar{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \bar{x} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

El promedio minimiza la varianza

Tenemos una función  $z = f(x, y)$   Son variables independientes  $\implies \text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y)$  (1)

Mido  $x_0, y_0$   $\implies$   $z_0 = f(x_0, y_0)$   $\text{se busca}$   $\text{var}(kx) = k^2 \text{var}(x)$  (2)

Se desarrolla en series de Taylor  $z = f(x, y)$

$$\begin{aligned}
 &x \sim x_0 \\
 &y \sim y_0 \\
 z = f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x_0 \\ y_0}}}_{\text{cte}} (x - x_0) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x_0 \\ y_0}}}_{\text{cte}} (y - y_0) + \dots
 \end{aligned}$$

Por (1)  $\text{var}(z) \cong \text{var}(\cancel{f(x_0, y_0)}) + \text{var}(*)$

$$\text{var}(z) \cong \text{var} \left( \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x_0 \\ y_0}}}_{\text{cte}} (x - x_0) + \right) + \text{var} \left( \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x_0 \\ y_0}}}_{\text{cte}} (y - y_0) \right)$$

Si aplico (2)  $\implies$

$$\text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y)$$

$$\text{var}(kx) = k^2 \text{var}(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{var}(z) &\approx \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 \text{var}(x - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 \text{var}(y - y_0) \\ \left\{ \begin{aligned} \text{var}(x - x_0) &= \text{var}(x) - \cancel{\text{var}(x_0)} = \text{var}(x) \\ \text{var}(y - y_0) &= \text{var}(y) - \cancel{\text{var}(y_0)} = \text{var}(y) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{var}(z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 \text{var}(x) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 \text{var}(y)$$

$$\sigma^2 = \text{var}$$

Desviación estandard

$$\sigma_z^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_y^2$$

Sabemos que

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_{e_z}^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_{e_x}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_{e_y}^2$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

Para n variable independientes

## Ejemplos

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

Cada variable independiente tiene su incerteza asociada

$$\begin{cases} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{cases}$$

- $f(x, y, z) = ax + by - cz$

$$\Delta f^2 = a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2 + c^2 \Delta z^2$$

- $g(x, y, z) = Gx^a y^b z^c$

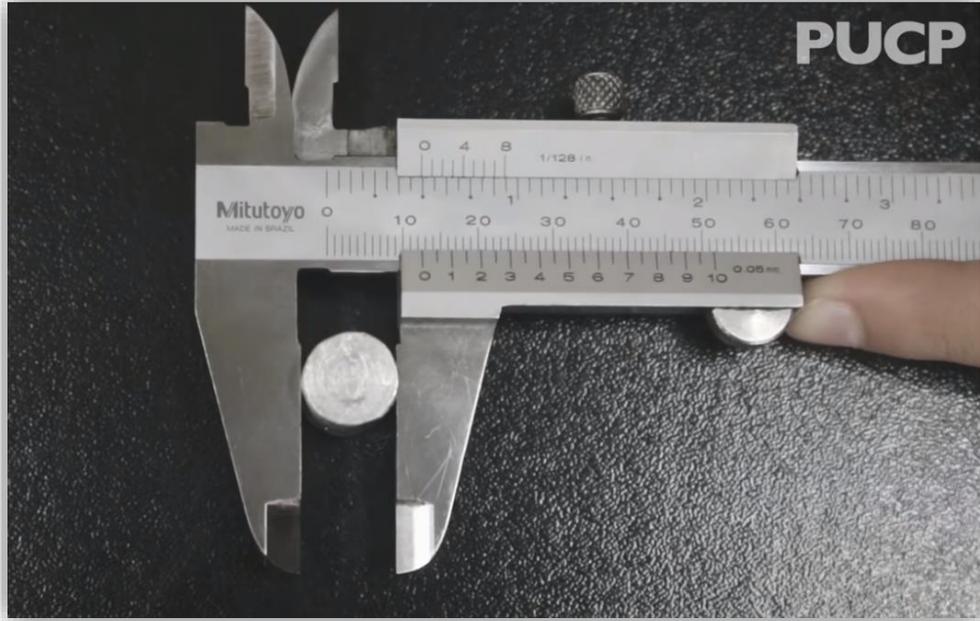
$$\Delta g^2 = \left[ (Ga \Delta x^{a-1} \Delta y^b \Delta z^c)^2 (\Delta x)^2 + (Gb \Delta x^a \Delta y^{b-1} \Delta z^c)^2 (\Delta y)^2 + (Gc \Delta x^a \Delta y^b \Delta z^{c-1})^2 (\Delta z)^2 \right]$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = a^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + b^2 \frac{\Delta y^2}{y^2} + c^2 \frac{\Delta z^2}{z^2}$$

- $h(x, y) = y \ln x$

$$\Delta h^2 = \left( y \frac{1}{x} \right)^2 \Delta x^2 + (\ln x)^2 \Delta y^2$$

→ diverge si  $x \rightarrow 0$



Volvamos entonces a medición del cilindro.  
Queremos ahora estimar su volumen a partir de las mediciones de altura y diámetro.

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)
Primera medición	12,55	19,90
Segunda medición	12,30	19,85
Tercera medición	12,70	20,30
Media (promedio)	<b>12,52</b>	<b>20,02</b>
Desviación Estándar	<b>0,2021</b>	<b>0,2466</b>
Incertidumbre Estándar	<b>0,1167</b>	<b>0,1424</b>
Incertidumbre de lectura	<b>0,03</b>	<b>0,03</b>
Incertidumbre total en la medida	<b>0,1</b>	<b>0,1</b>

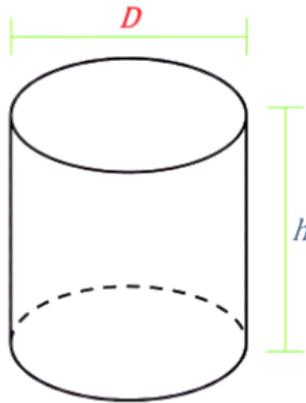
$$\text{Diámetro} = 12,5 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$$

$$\text{Altura} = 20,0 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$$

**Díámetro** = 12,5 mm ± 0,1 mm

→ 3 cifras significativas

**Altura** = 20,0 mm ± 0,1 mm



$$Volumen = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

$$Volumen = \frac{\pi * 12,5^2 * 20,0}{4}$$

$$Volumen = 2454,36926 \text{ mm}^3 \longrightarrow \text{Volumen} = 2,45 * 10^3 \text{ mm}^3$$

3 cifras significativas

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$



Regla de propagación de incertidumbre  
(para variables no correlacionadas)

$$\sigma_V^2 = \left( \frac{\partial V}{\partial D} \right)^2 \sigma_D^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial h} \right)^2 \sigma_h^2$$

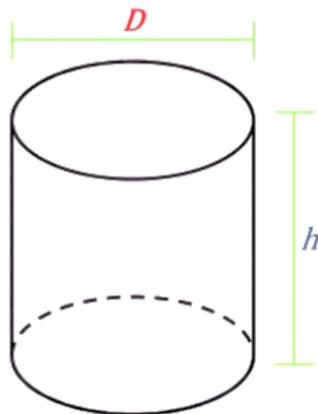
$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi h D}{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\sigma_V^2 = \left( \frac{\pi h D}{2} \right)^2 \sigma_D^2 + \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \sigma_h^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

$$\text{Volumen} = 2,45 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$



$$\begin{aligned} \text{Altura} &= h \pm \sigma_h \\ \text{Altura} &= 20,0 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diámetro} &= D \pm \sigma_D \\ \text{Diámetro} &= 12,5 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dividiendo por el volumen V

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\pi h D}{2}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \sigma_h^2 \longrightarrow \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{2\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2$$

$$\sigma_V = 2,45 \cdot 10^3 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0,1}{12,5}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{20,0}\right)^2}$$

$$\sigma_V = 41,07 \text{ mm}^3$$

¿Cuántas cifras significativas se usan?

El resultado se debe expresar con solo una cifra significativa

$$\sigma_V = 4 \cdot 10 \text{ mm}^3$$

$$\text{Volumen} = (2,45 \pm 0,04) 10^3 \text{ mm}^3$$

- 
- ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
    - ✓ Calibre
    - ✓ Micrómetro
  - ✓ Mediciones indirectas
  - ✓ Incertidumbre, propagación de errores
  - ✓ Experiencias

## Experiencias

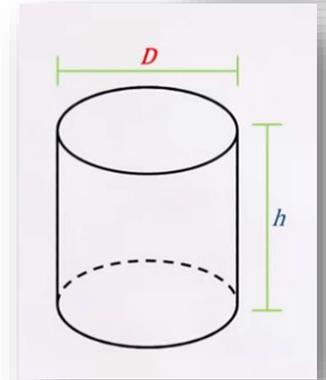
Determinación de volumen (y su error) distintos objetos a través de mediciones indirectas.

Determinación del diámetro de un alambre (y su error) en forma indirecta.

Utilización de balanza, calibre, micrómetro y probeta graduada.

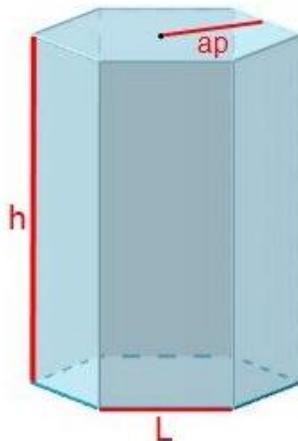
- Experiencia 1 : Cálculo del volumen de un cilindro midiendo altura y diámetro.
- Experiencia 2 : Cálculo del volumen de un prisma hexagonal con hueco cilíndrico central.
  - Utilizando la geometría midiendo con el calibre
  - Mediante el peso (uso de balanza)
  - Utilizando probeta graduada.

$$Volumen = \frac{\pi D^2 h}{4}$$



### ✓ Medición indirecta del volumen a través la geometría

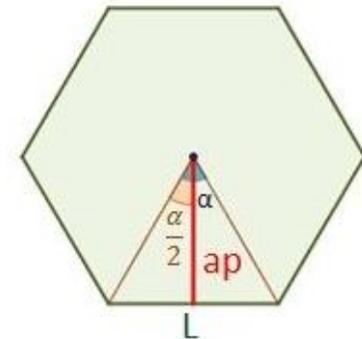
El **prisma hexagonal regular** es un **prisma recto** que tiene como bases dos **hexágonos regulares**.



El **volumen del prisma hexagonal** es el producto del **área del hexágono regular** de una de sus bases por la altura ( $h$ ).

$$Volumen = 3 \cdot L \cdot ap \cdot h$$

$L$  es la longitud de los lados del hexágono,  $ap$ , su apotema y  $h$  la altura del prisma



✓ Medición indirecta del volumen a través del peso

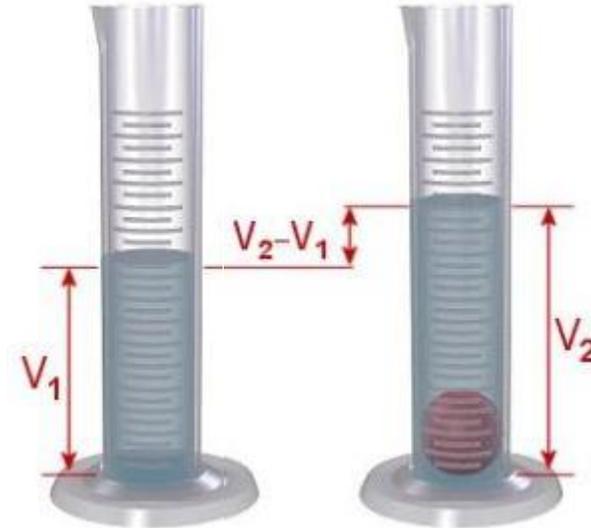
La densidad de un material es

$$\rho = \frac{m}{V}$$

↑ masa  
↓ volumen

- Se mide la masa con una balanza
- La densidad del Al (20°C) = 2,7 g/cm<sup>3</sup>
- Calcular el volumen

✓ Medición del volumen con probeta graduada



- Se agrega una cierta cantidad de agua en la probeta y se registra su volumen  $V_1$
- Se coloca el prisma en la probeta y se registra el nuevo volumen  $V_2$
- $(V_2 - V_1)$  es el volumen del prisma.

## Experiencias

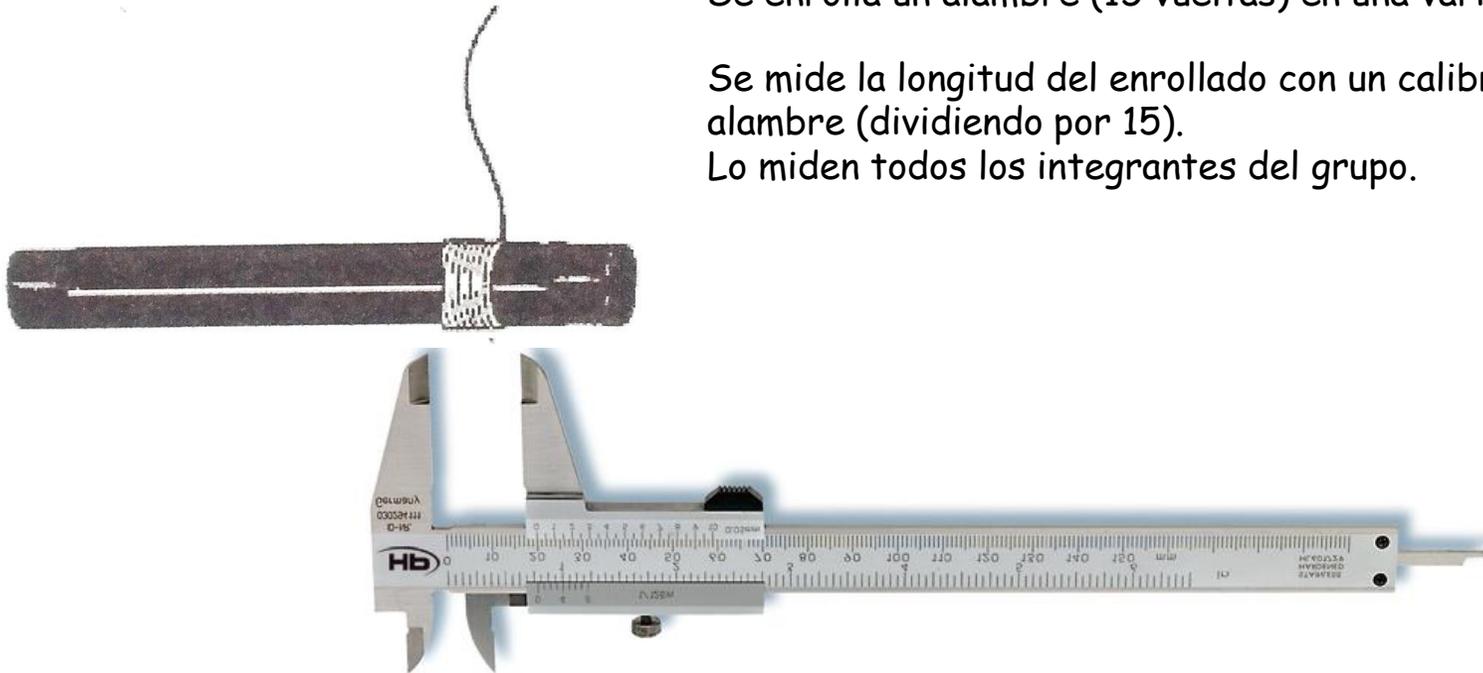
- Experiencia 3: Cálculo del diámetro y su error de un alambre con uso del micrómetro (medición directa).

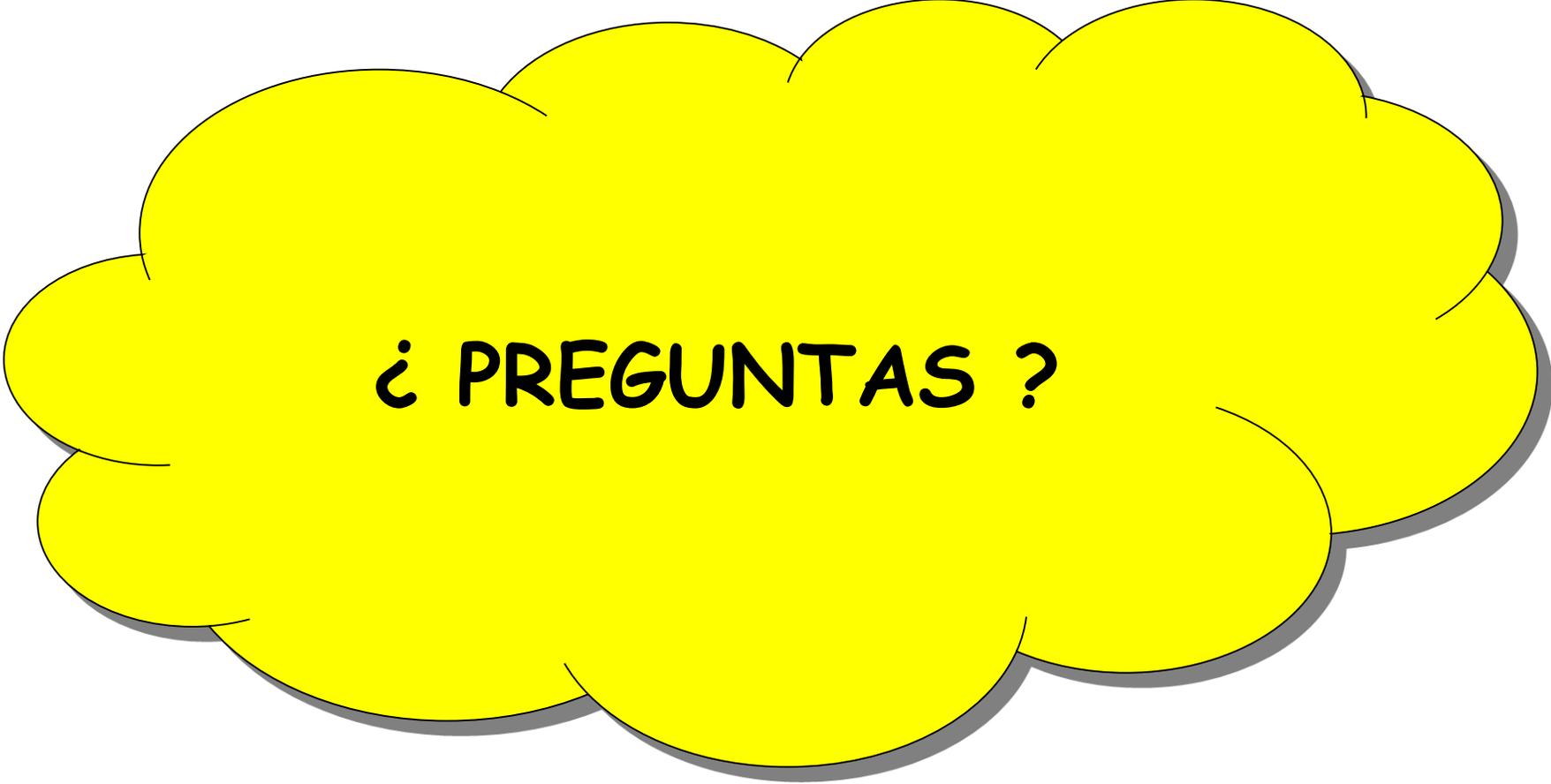
Se mide el diámetro de un alambre con el micrómetro 10 veces en diferentes posiciones.  
Lo hace todos los integrantes del grupo

- Experiencia 4: Cálculo del diámetro y su error de un alambre con un calibre (medición indirecta).

Se enrolla un alambre (15 vueltas) en una varilla de metal

Se mide la longitud del enrollado con un calibre y se estima el diámetro del alambre (dividiendo por 15).  
Lo miden todos los integrantes del grupo.





**¿ PREGUNTAS ?**