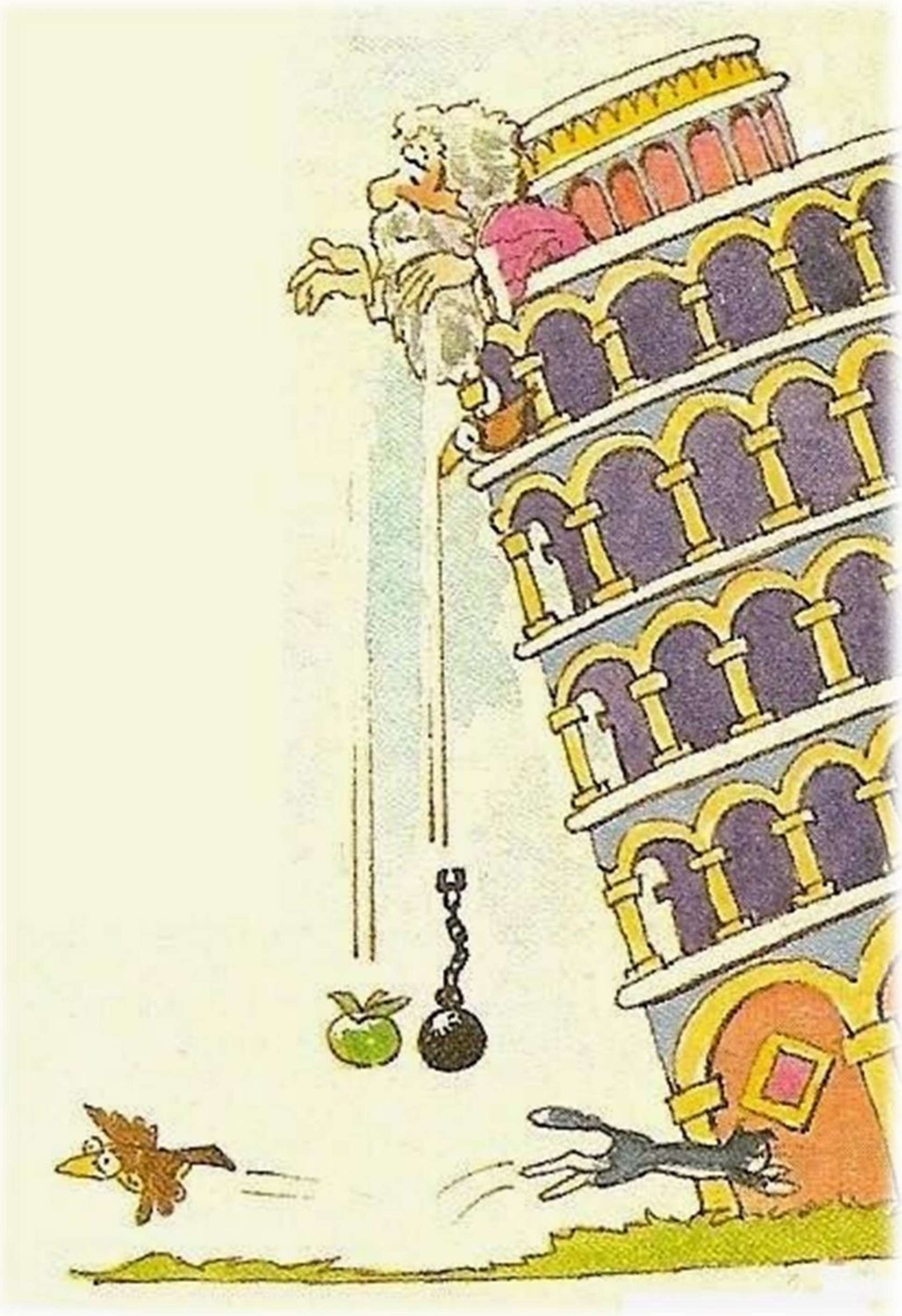
Laboratorio 1
Turno C

Clase 6a

Caída libre – Tiro vertical - Tiro oblicuo y horizontal

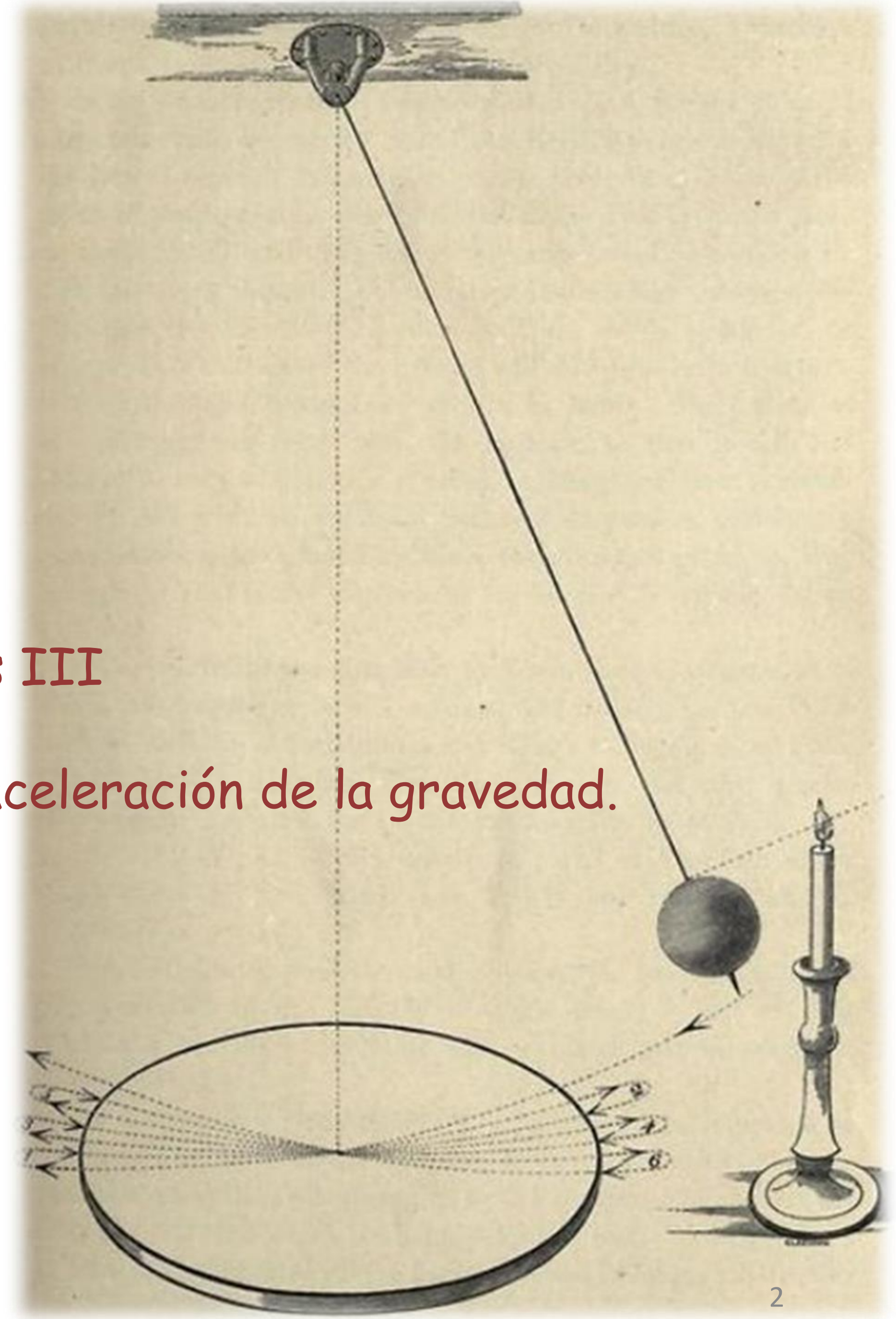
(14/05/2022)



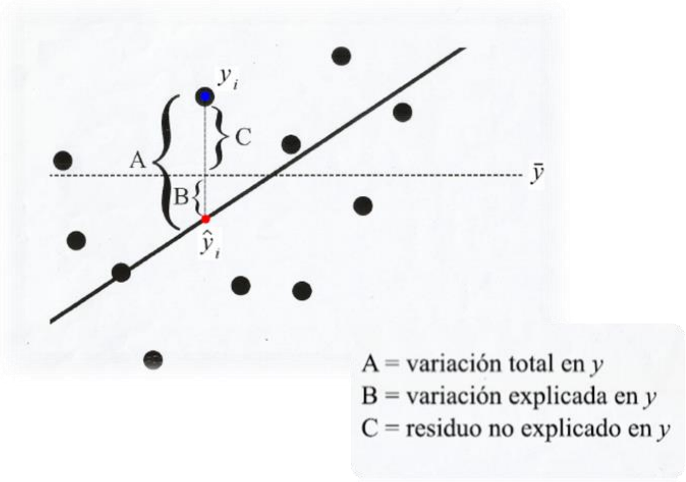
Regresiones (repaso)

Mediciones indirectas III

- Caída libre.
- Estimación de la aceleración de la gravedad.
- Tiro vertical



Ajuste por cuadrados mínimos



Suma residual de los cuadrados.

Suma explicada de los cuadrados.

Suma total de los cuadrados

$$TSS = ESS + RSS$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{(n-1)}{(n-m)}$$

n = cantidad de datos

m = cantidad de parámetros del modelo

$$F = \frac{ESS/(m-1)}{RSS/(n-m)}$$

$$t_b = \frac{b}{s_b}$$

Valor t del parámetro b con desviación standard s_b

$$\chi^2 = \sum_{i}^{N}\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2}$$

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu}$$

$$\nu = n - m$$

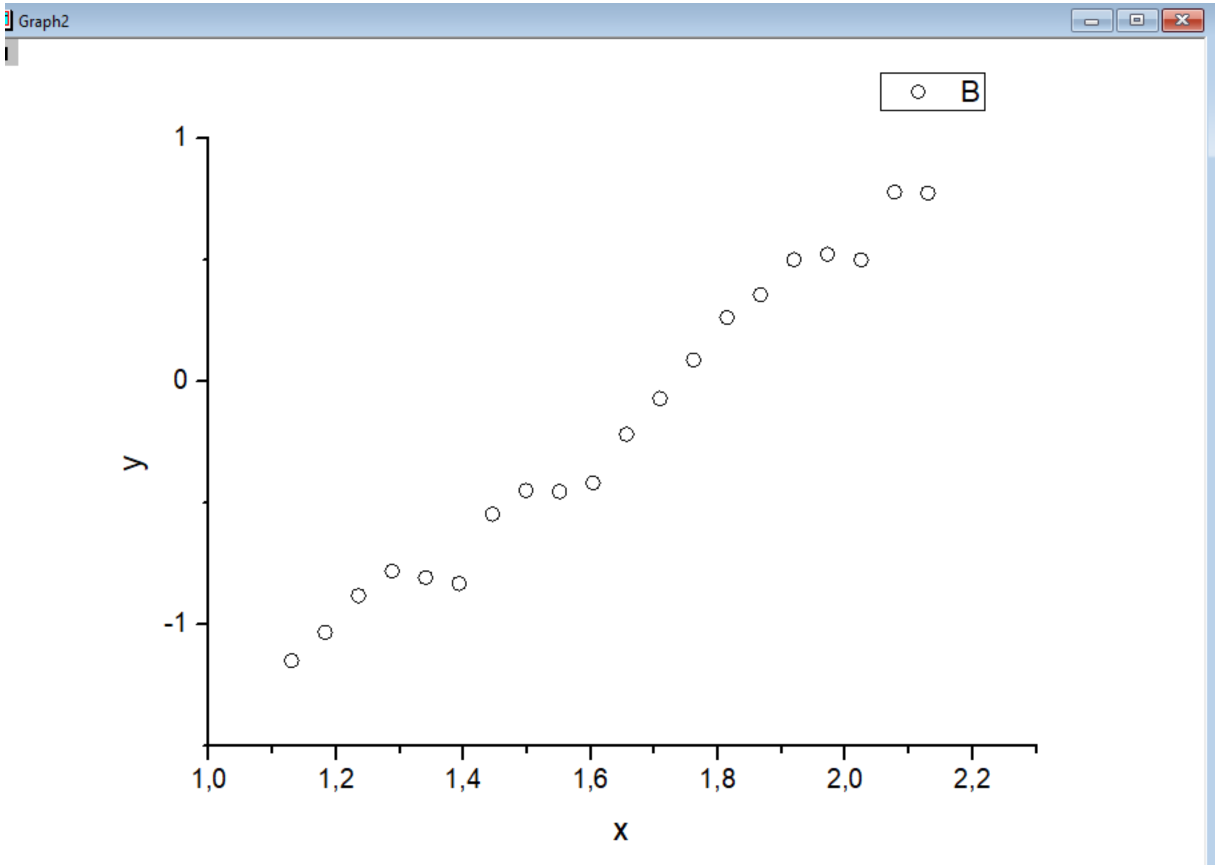
Ejemplo de ajuste lineal por cuadrados mínimos

Book1

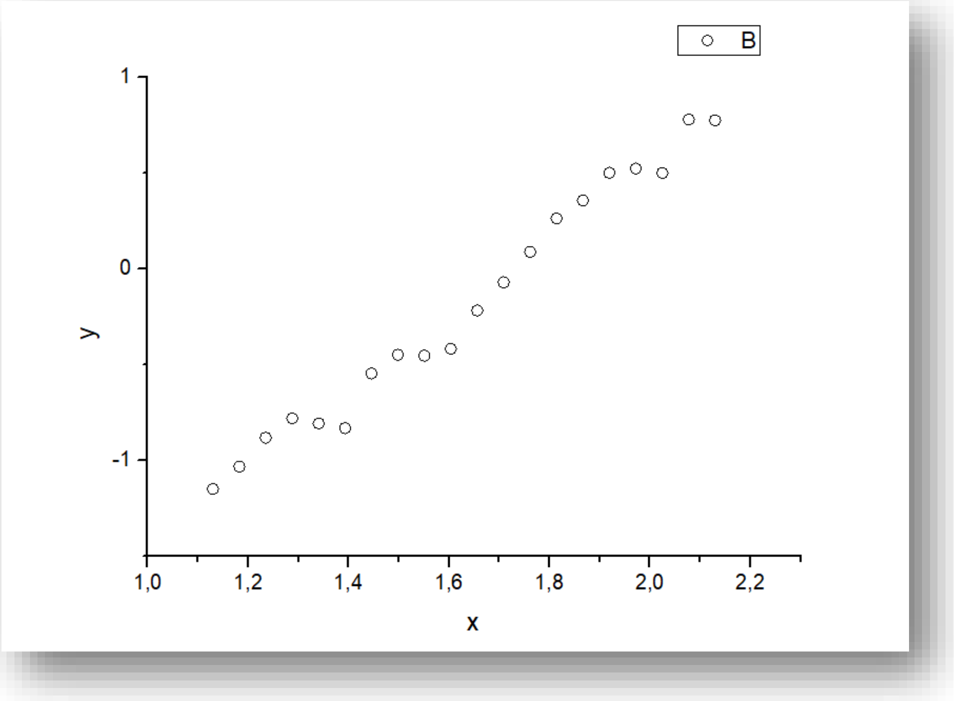
	A(X)	B(Y)
Long Name		
Units		
Comments		
1	1,13	-1,148
2	1,18263	-1,03054
3	1,23526	-0,88078
4	1,28789	-0,77979
5	1,34053	-0,80622
6	1,39316	-0,83135
7	1,44579	-0,54592
8	1,49842	-0,44856
9	1,55105	-0,45243
10	1,60368	-0,41726
11	1,65632	-0,21782
12	1,70895	-0,07036
13	1,76158	0,08841
14	1,81421	0,26244
15	1,86684	0,35591
16	1,91947	0,4991
17	1,97211	0,52174
18	2,02474	0,49921
19	2,07737	0,77743
20	2,13	0,774
21		
22		

Consideramos un conjunto de datos (x_i, y_i) productos de una medición donde se obtuvo la variable *y* en función de la variable *x*

Utilizo Origin 9.0 para el análisis y quiero ver si estos datos se pueden representar por un función *y = f(X)*

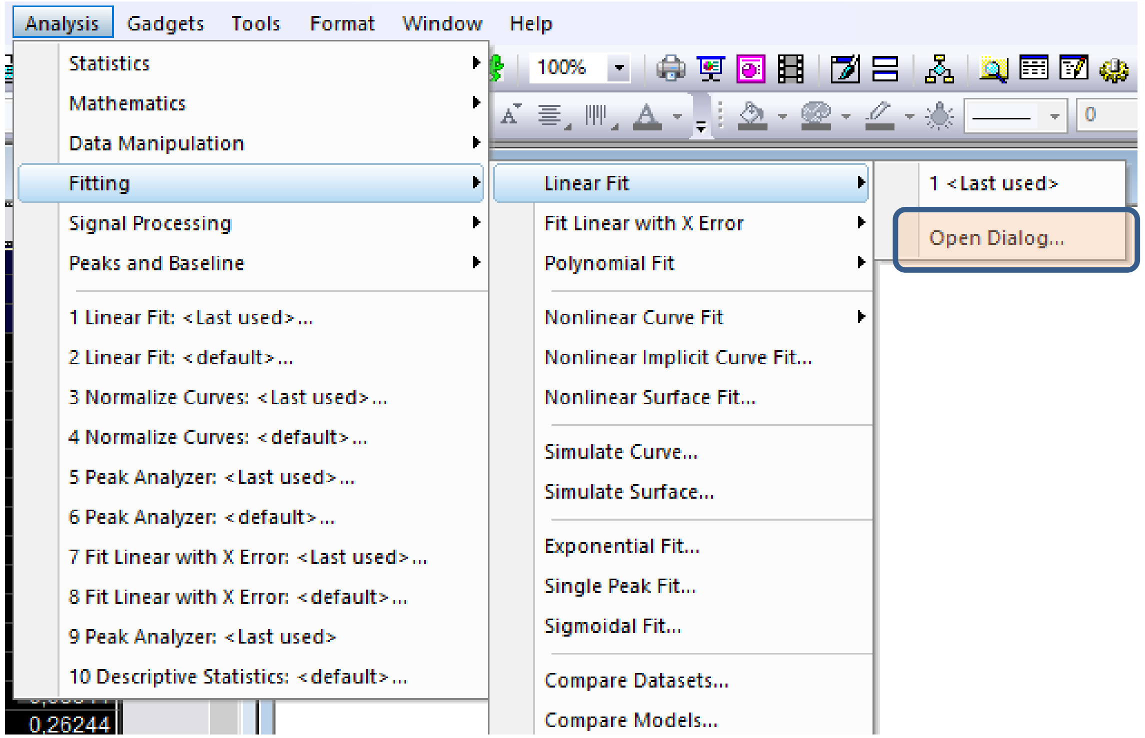


En este ejemplo no estoy considerando los errores en las variables.



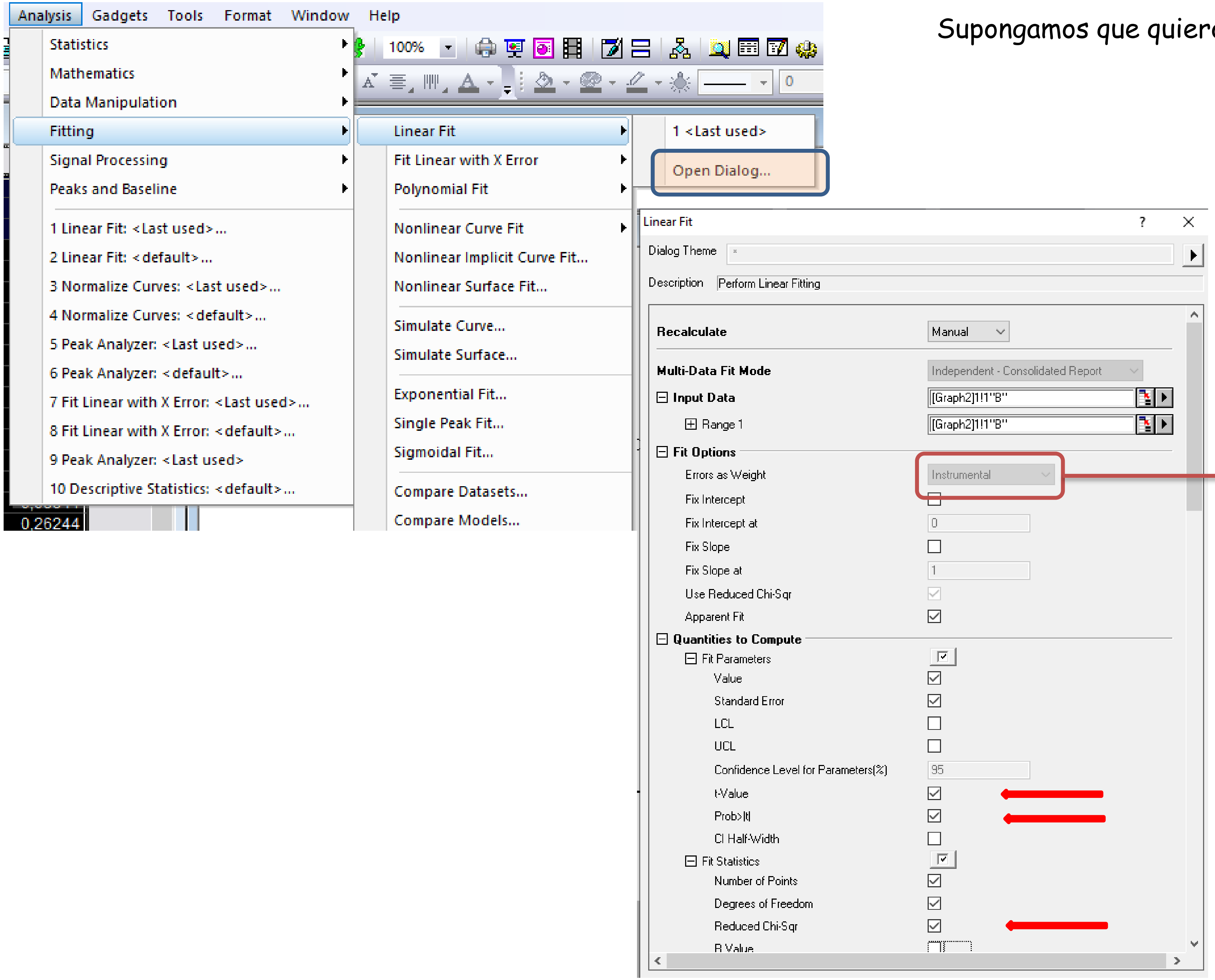
Supongamos que quiero ajustar a un modelo lineal

$$\boxed{y = a + b\,x}$$



Entonces, en Origin 9.0 , debo recorrer la siguiente secuencia hasta llegar a Open Dialog

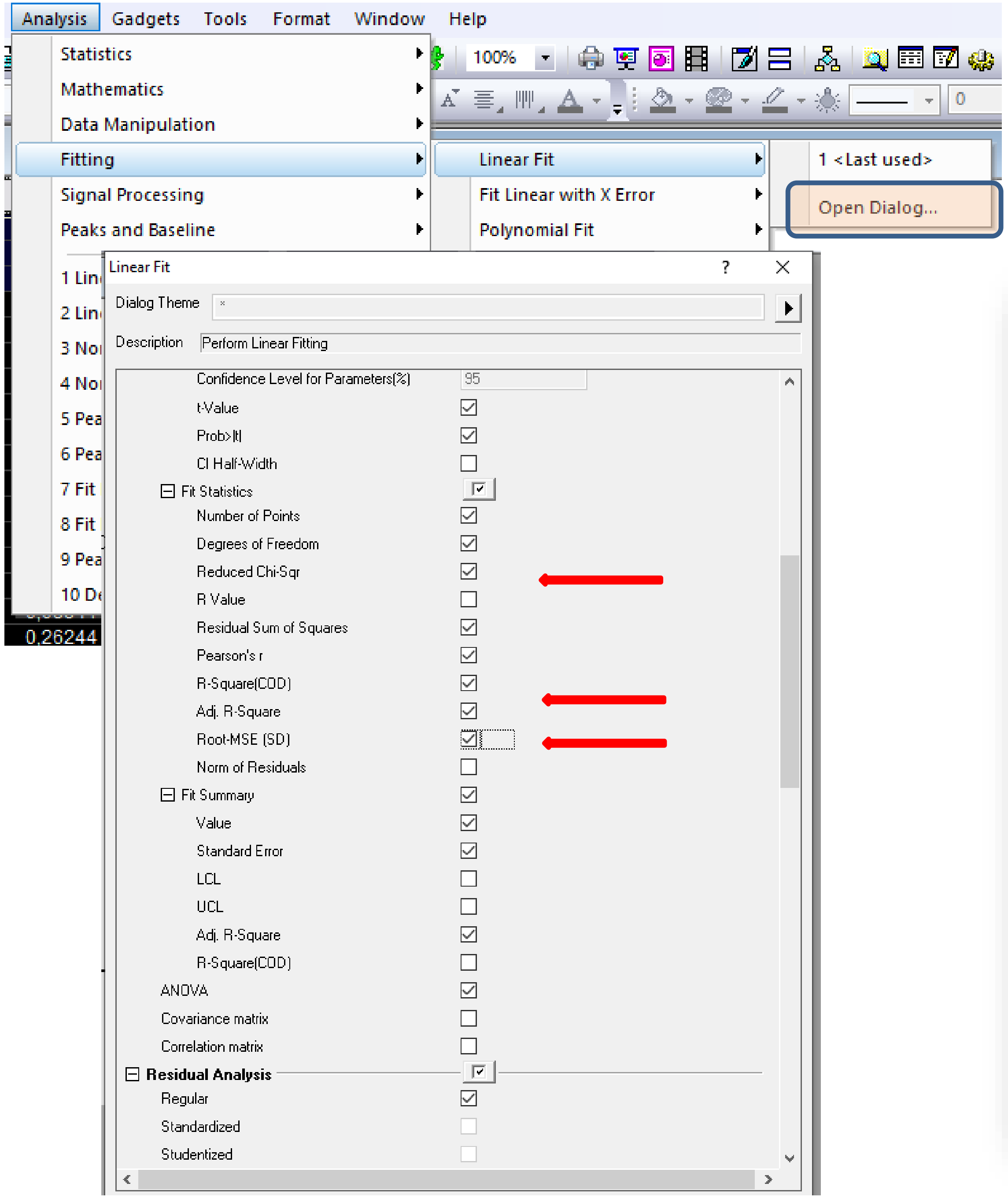
Supongamos que quiero ajustar a un modelo lineal $y = a + b\,x$



Se despliega esta planilla y se debe tildar aquello que queremos calcular

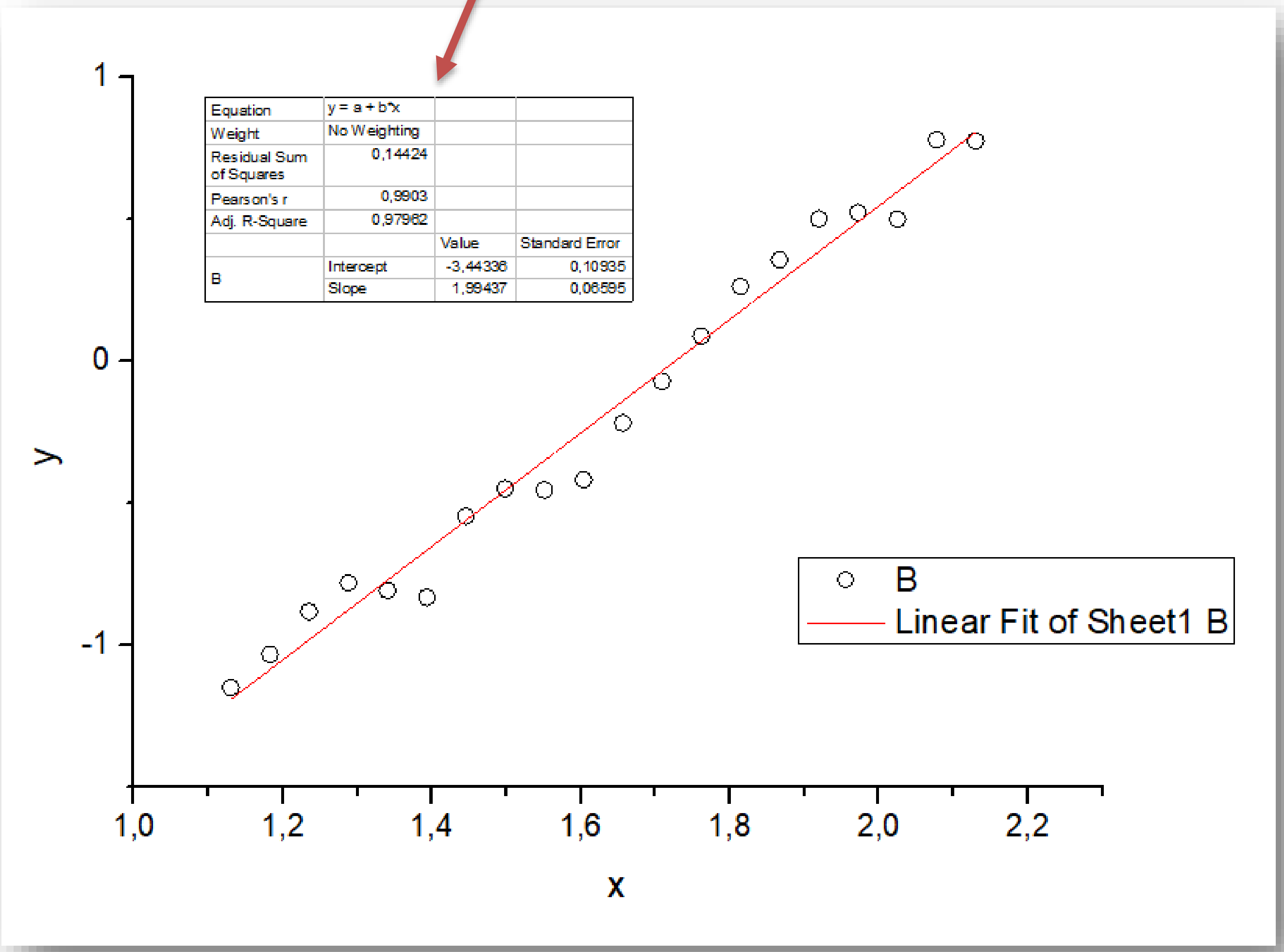
Como no se asignaron errores esta casilla esta inhabilitada

Si hubiera errores en los datos se coloca Instrumental



Supongamos que quiero ajustar a un modelo lineal $y = a + b\,x$

En el gráfico aparece una parte de la información solicitada



La información está en una planilla del Book (donde están los datos) de Origin

¿ Qué es importante analizar ?

1. ANOVA
   Ver que se dice del modelo. Es analizar la función de probabilidad F. Si $p < 0.05$ la probabilidad que la función ajuste bien es mayor del 95 %.

2. Parámetros
   Se mira la función de probabilidad *t*. Si $p < 0.05$ la probabilidad que el parámetro sea significativo es mayor del 95 %.

3. Coeficiente de regresión R^2
   Cuanto más próximo a 1 mucho mejor el ajuste

4. χ^2_ν Chi-cuadrado reducido. Se usa para analizar la bondad del ajuste.

   $\chi^2_\nu \gg 1$ Modelo pobre para representar los datos

   $\chi^2_\nu > 1$ El ajuste al modelo no logró capturar los datos, que subestimo la varianza del error

   $\chi^2_\nu \sim 1$ La coincidencia entre observaciones y estimaciones está de acuerdo con la varianza del error

   $\chi^2_\nu < 1$ El modelo está sobre-ajustando los datos.
   El modelo se ajusta incorrectamente al ruido o la varianza del error se ha sobreestimado.

5. Distribución de los residuos

1 Linear Fit (7/5/2021 11:14:31)

Notes

Input Data

Masked Data - Values Excluded from Computations

Bad Data (missing values) -- Values that are invalid and thus not used in computations

Parameters

		Value	Standard Error	t-Value	Prob>|t|
B	Intercept	-3,44336	0,10935	-31,48831	0
	Slope	1,99437	0,06595	30,23849	0

$$t_b = \frac{b}{s_b}$$

Statistics

	B
Number of Points	20
Degrees of Freedom	18
Reduced Chi-Sqr	0,00801
Residual Sum of Squares	0,14424
Pearson's r	0,9903
R-Square(COD)	0,98069
Adj. R-Square	0,97962
Root-MSE (SD)	0,08952

Summary

	Intercept		Slope		Statistics
	Value	Standard Error	Value	Standard Error	Adj. R-Square
B	-3,44336	0,10935	1,99437	0,06595	0,97962

ANOVA

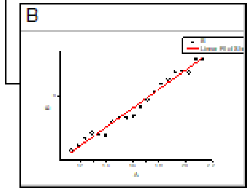
		DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
B	Model	1	7,327	7,327	914,36602	1,11022E-16
	Error	18	0,14424	0,00801		
	Total	19	7,47124			

At the 0.05 level, the slope is significantly different from zero.

$$F = \frac{ESS/(m-1)}{RSS/(n-m)}$$

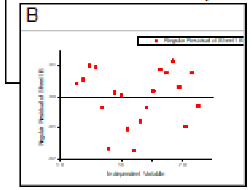
Fitted Curves Plot

B

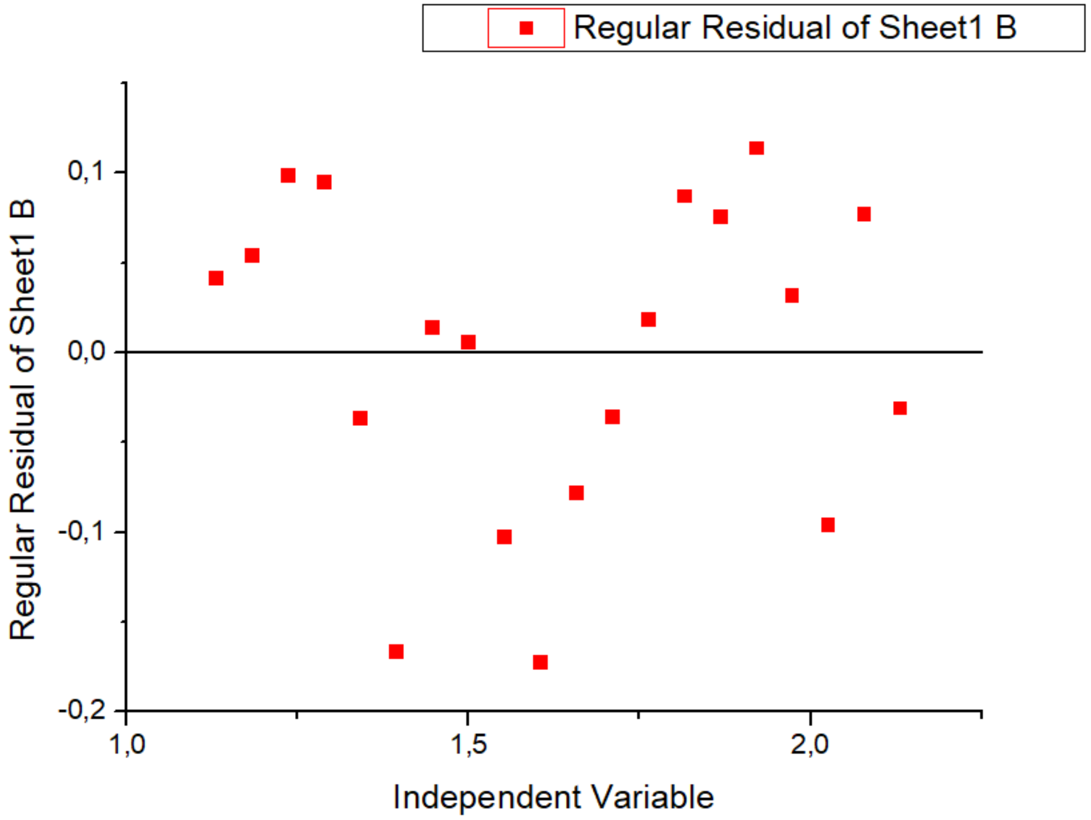


Residual vs. Independent Plot

B

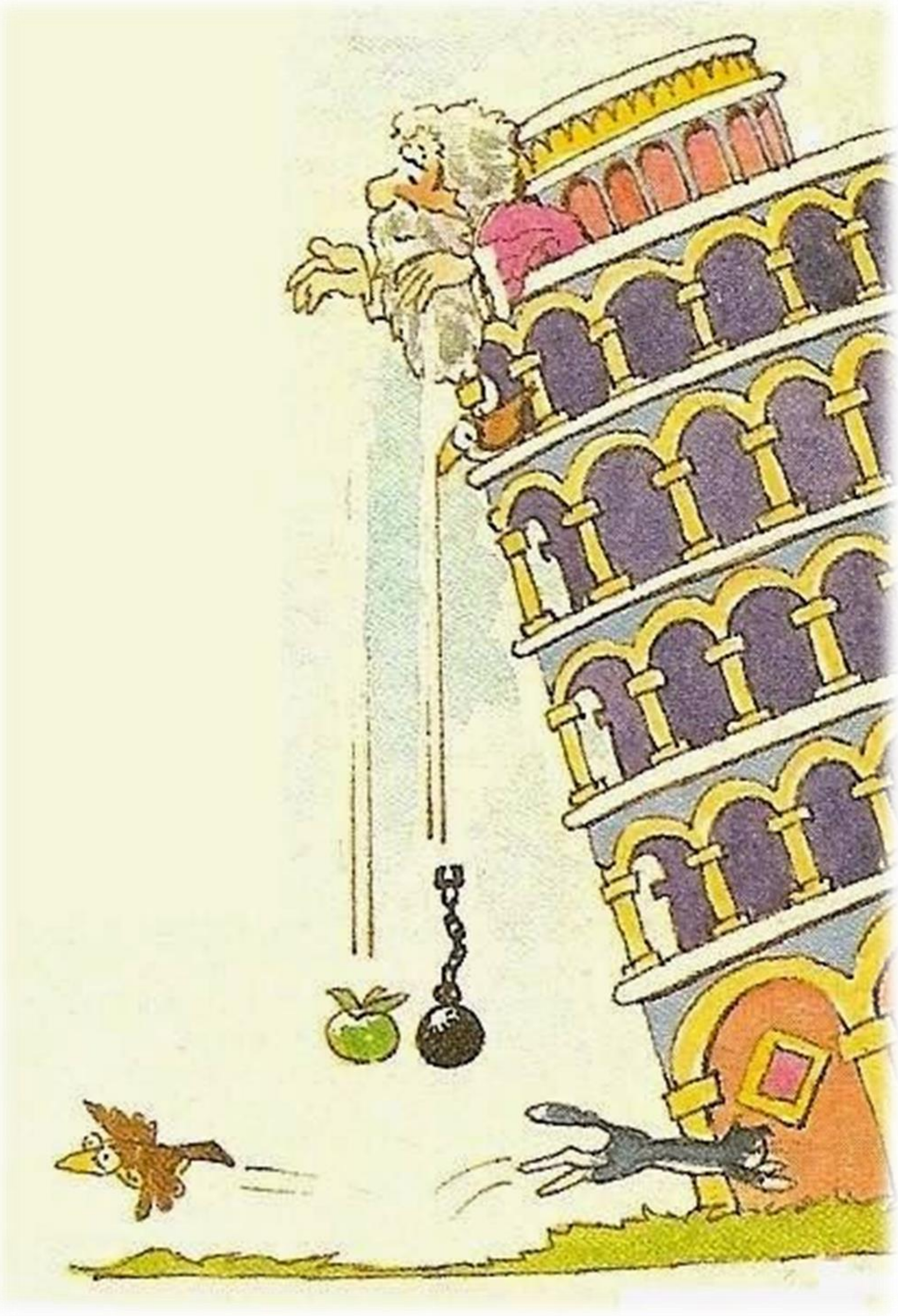


5. Distribución de los residuos



Observar que la distribución de los residuos sea normal alrededor del cero (mas o menos los puntos por encima y debajo sin tendencia)

¿ Se puede aplicar todo lo visto a una función que no sea la ecuación de la recta (por ejemplo polinómica) ?



Regresiones (repaso)

Mediciones indirectas III

Caída libre.

Estimación de la aceleración de la gravedad.

Tiro vertical

Caída libre → Movimiento de un cuerpo bajo la acción exclusiva de un campo gravitatorio

Caída real → Incluye las caídas reales influenciadas en mayor o menor medida por la resistencia aerodinámica del aire u otra que tenga lugar en el seno de un fluido

También se aplica a objetos en movimiento vertical ascendente sometidos a la acción de la gravedad (desaceleración). →

Disparo o tiro vertical

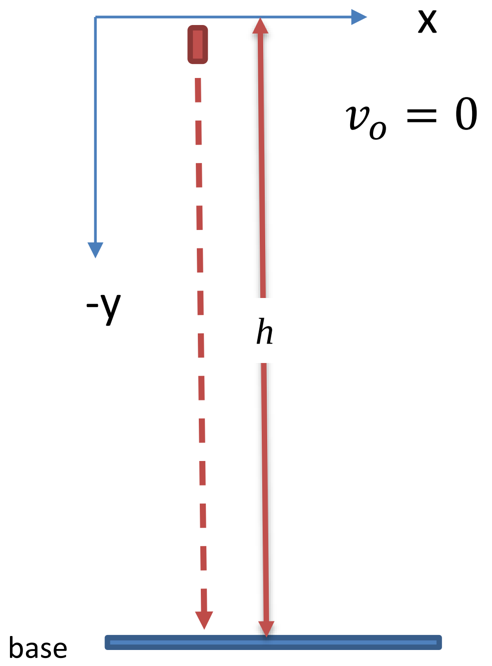
Tanto en tiro vertical como en caída libre la aceleración es la de la gravedad


BBC TWO
CAP MAZZELLA 16TON

En la caída libre ideal

Se desprecia la resistencia aerodinámica que presenta el aire al movimiento del cuerpo, analizando lo que pasaría en el vacío.

La aceleración que adquiriría el cuerpo sería debida exclusivamente de la gravedad, siendo independiente de su masa



Si asumimos que no hay resistencia del aire podemos usar la ecuaciones conocidas del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

La diferencia es que vamos a considerar la coordenada *y* en vez de *x*.

aceleración

aceleración de la gravedad

$$v = v_o + at \Rightarrow v = v_o + gt \Rightarrow v = gt$$

caída libre

Velocidad inicial

$$y = y_o + v_o t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2}gt_h^2}$$

$$v^2 = v_o^2 + 2ay$$

Sale de la conservación de la energía

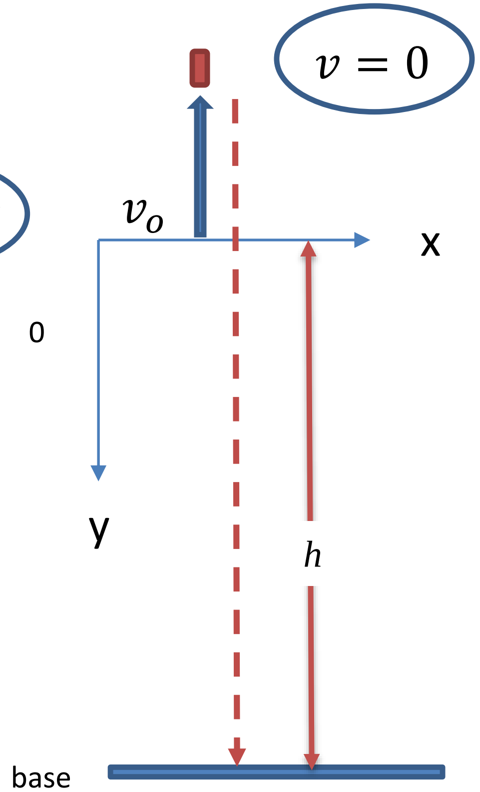
$$W = Fy$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_o^2 = \cancel{m}ay$$

Que pasa si se aplica una fuerza para elevar el cuerpo y luego cae

$$v^2 = v_o^2 + 2ay \quad \Rightarrow \quad 0 = v_o^2 - 2gy$$

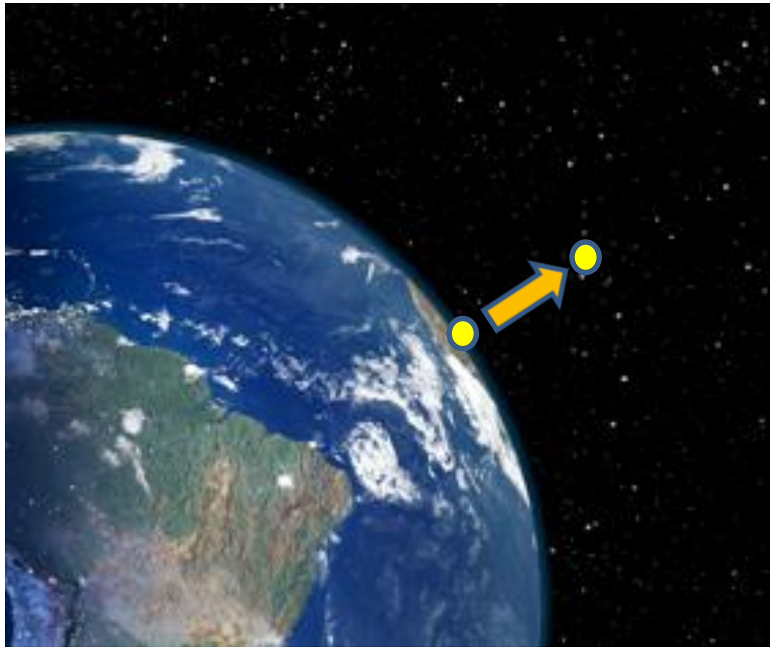
$$a = -g$$



$$y = \frac{v_o^2}{2g}$$ Distancia recorrida

Si aumento la velocidad aumenta la distancia recorrida

La velocidad a la cual se escapa de la atracción gravitacional de la Tierra es la velocidad de escape v_{esc}



$$\left.\begin{aligned} EC &= \frac{1}{2}mv^2 \\ EP &= -\frac{GMm}{R} \end{aligned}\right\} \quad ET = E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

A una distancia infinita de la Tierra

$$\left.\begin{aligned} EC &= 0 \\ EP &= -\frac{GMm}{\infty} = 0 \end{aligned}\right\} \quad ET = E_2 = 0$$

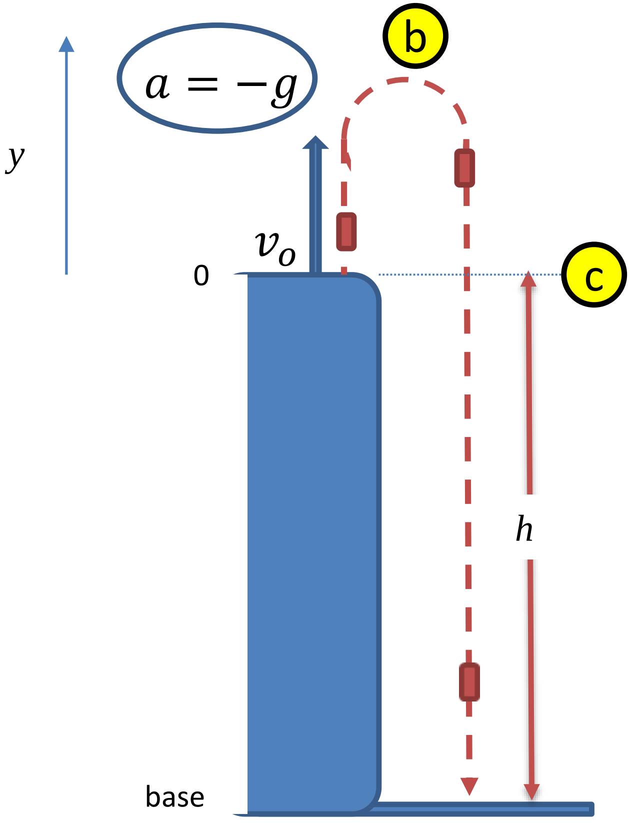
Por Conservación de Energía $\quad E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{R}$

$$\Rightarrow \quad v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R} \qquad v_{esp} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{esp} = \sqrt{2gR}} \quad \rightarrow \quad v_{esp} = 11.2\ km/s$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$R \approx 6400\ km$$

Que pasa si se aplica una fuerza para elevar el cuerpo y luego cae



b $v = 0$

c $v = -v_o$

$$v = -v_o + gt$$

$$y = y_o + v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$-h = -v_o t_b + \frac{1}{2} g t_b^2$$

Preguntas

¿ Cuál es la altura máxima ?

¿ Cual es la velocidad en puntos extremos ?

¿ Cual es la aceleración ?

¿ Cuanto tiempo se tarde en alcanzar la altura máxima y el fondo ?

Trabajo Práctico N° 4. Parte A

A

- Estudiar el fenómeno de caída libre.
- Se filmará la caída de un objeto desde una cierta altura y se analizará el video usando Tracker.

https://www.youtube.com/watch?v=3iABAnaeQ3M

- Pensar que objeto conviene usar.
- Con la información obtenida, se debe graficar la trayectoria en función del tiempo, verificar si se cumplen las ecuaciones de trayectoria en caída libre.

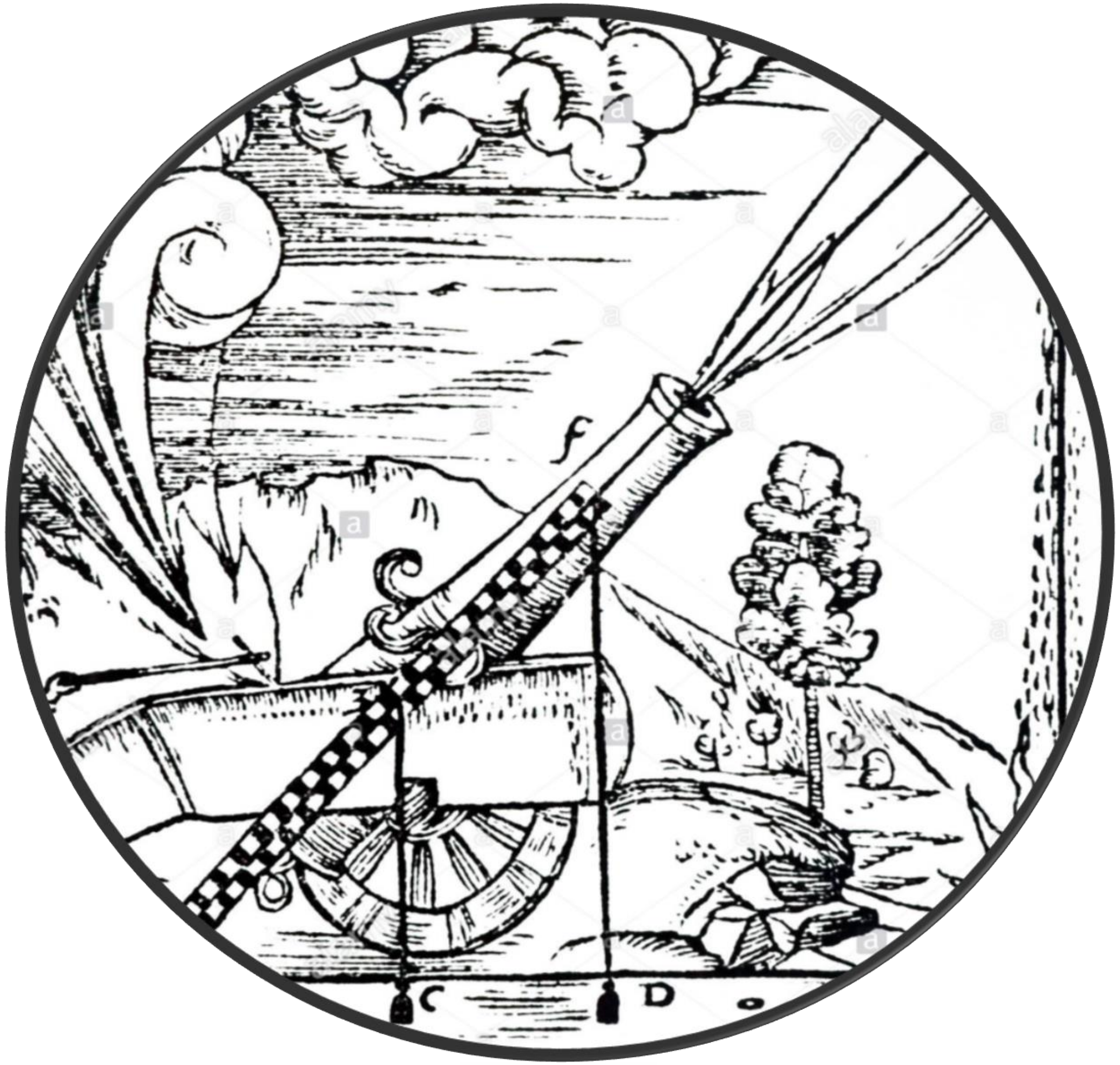
  Estimar la aceleración de la gravedad g.

$$\boxed{y = y_o + v_o t + \frac{1}{2} g t^2}$$

- Realizar la experiencia por lo menos 4 veces desde la misma altura. Considerar la propagación de errores.
- Utilizando regresión por cuadrados mínimos calcular g (considerando alturas diferente)

$$\boxed{h = \frac{1}{2} g t_h^2}$$

- Hacer la experiencia lanzando el objeto hacia arriba (tratar de mantener la vertical) y analizar los resultados. Solo la ecuación de movimiento. Estimar la velocidad inicial.



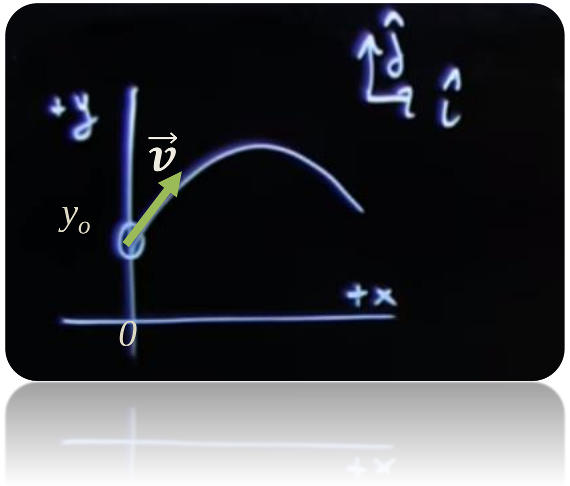
Mediciones indirectas III

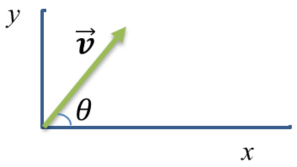
Tiro oblicuo

Tiro horizontal

Tiro oblicuo

Uno de los movimientos más comunes que podemos ver a diariamente es el de un objeto que se mueve hacia arriba con un cierto ángulo (con una velocidad) y luego cae por efecto de la gravedad.





Para entender la cinemática de este movimiento aplicamos la 2da ley de Newton

Objeto afectado por la fuerza gravitacional

$m\vec{g}$

Las ecuaciones de movimiento involucradas son :

$$\hat{j} \longrightarrow -mg = -ma_y$$

$$\hat{\imath} \longrightarrow 0 = -ma_x$$

Consideramos que no hay fuerzas aplicadas y despreciamos rozamiento del aire

$$v_y(t) = v_{y,o} - gt$$

$$y(t) = \boxed{y_o} + v_{y,o}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = y_o + v_{y,o}\frac{x}{v_{o,x}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{x,o}^2}}$$

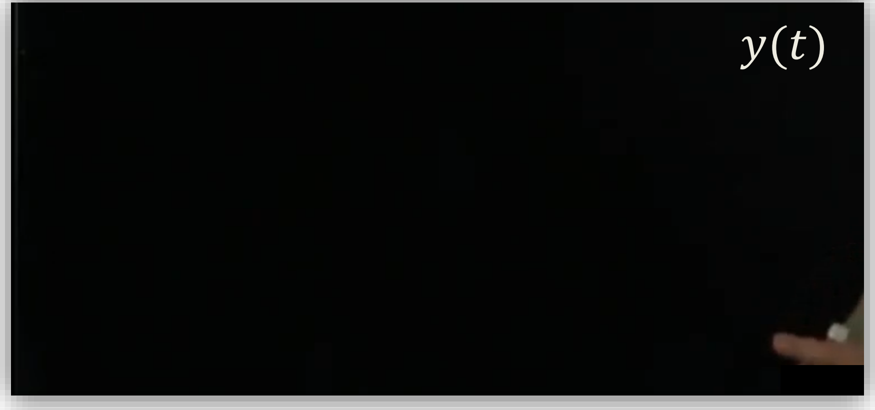
Ecuación parabólica

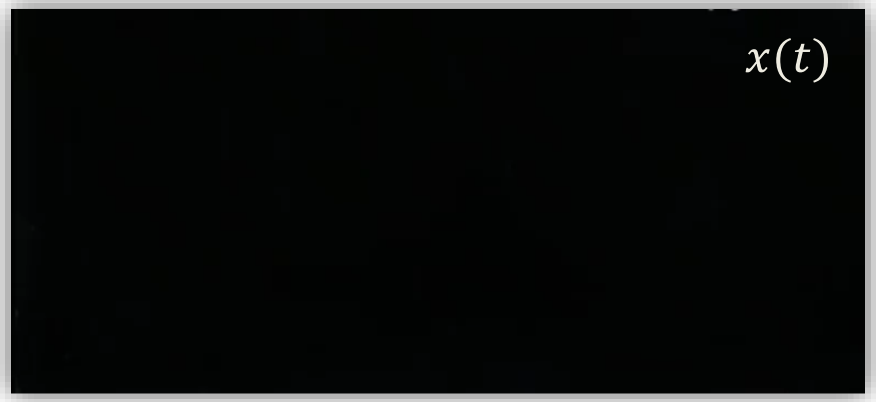
Parametrizando en el tiempo

$$v_x(t) = v_{x,o}$$

$$x(t) = x_o + v_{x,o}t = v_{x,o}t \qquad t = \frac{x}{v_{x,o}}$$

$$x_o = 0$$





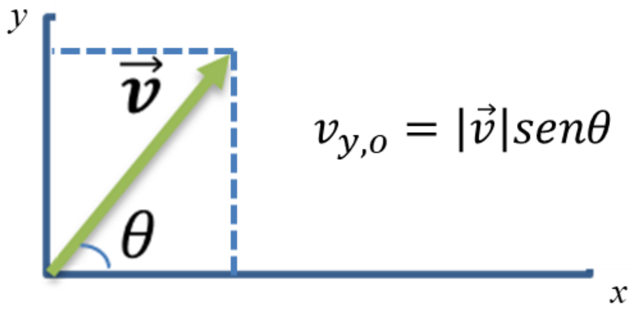
$$\boxed{y = y_o + v_{y,o}\frac{x}{v_{o,x}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{x,o}^2}}$$ 1

$$y(t) = y_o + v_{y,o}t - \frac{1}{2}gt^2$$ 2

$$x(t) = v_{x,o}t$$ 3

Tenemos tres representaciones de la ecuación de movimiento

$$y = y_o + v_{y,o}\frac{x}{v_{x,o}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{x,o}^2}$$ Ecuación parabólica



$$v_{y,o} = |\vec{v}|sen\theta$$

$$v_{x,o} = |\vec{v}|cos\theta$$

$$y = y_o + \cancel{|\vec{v}|}sen\theta\,\frac{x}{\cancel{|\vec{v}|}cos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{|\vec{v}|^2 cos\theta^{\,2}}$$

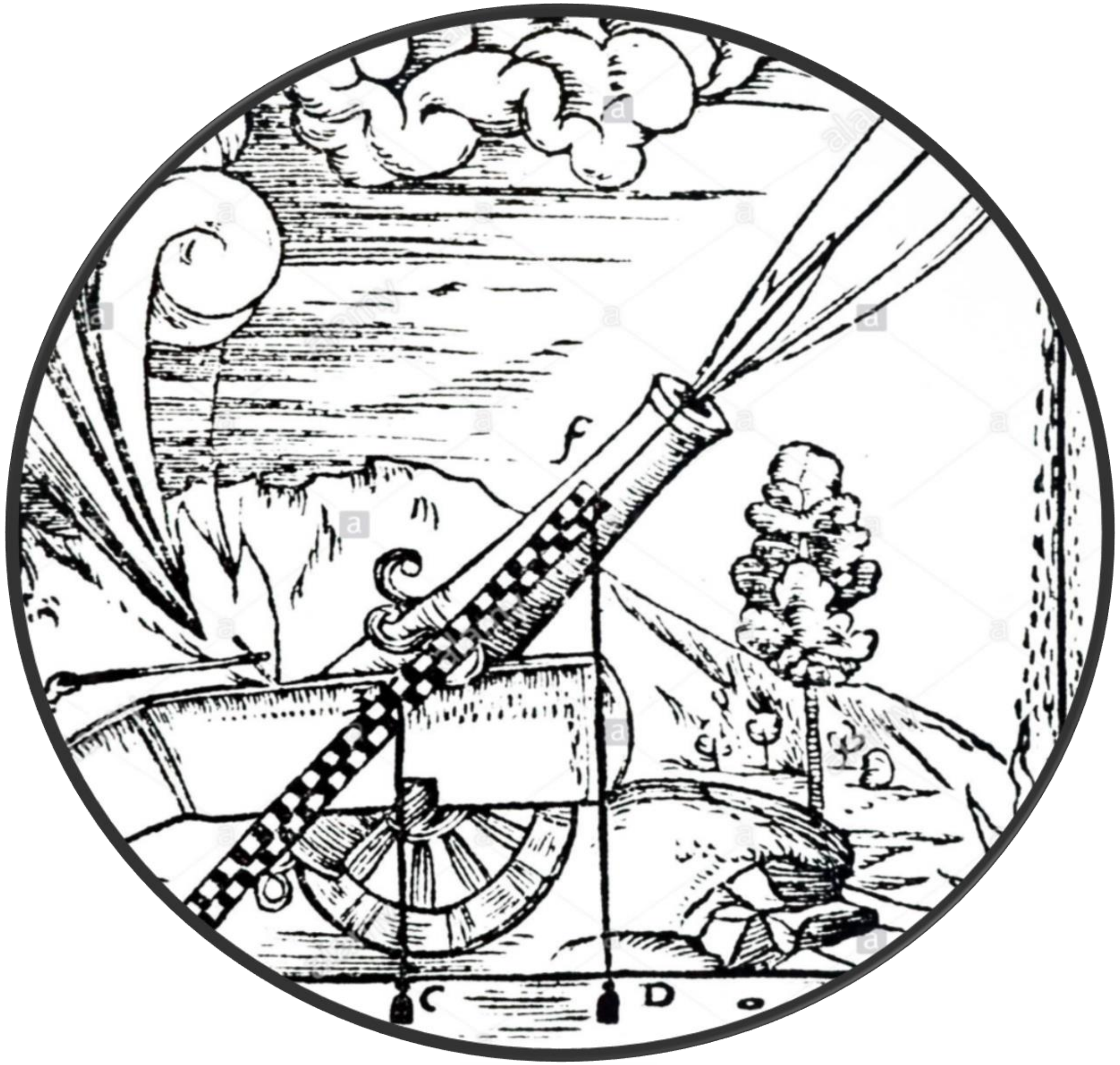
$$y = y_o + x\,tan\theta - \frac{gx^2}{2|\vec{v}|^2}\boxed{\sec^2\theta}$$

$$y = y_o + x\,tan\theta - \frac{gx^2}{2|\vec{v}|^2}\boxed{(1 + tan^2\theta)}$$

4

De la ecuación paramétrica puedo estimar g

Con Tracker puedo sacar de $x(t)$ e $y(t)$ $\left\{\begin{array}{l} v_{x,o} \\ v_{y,o} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Se estima θ



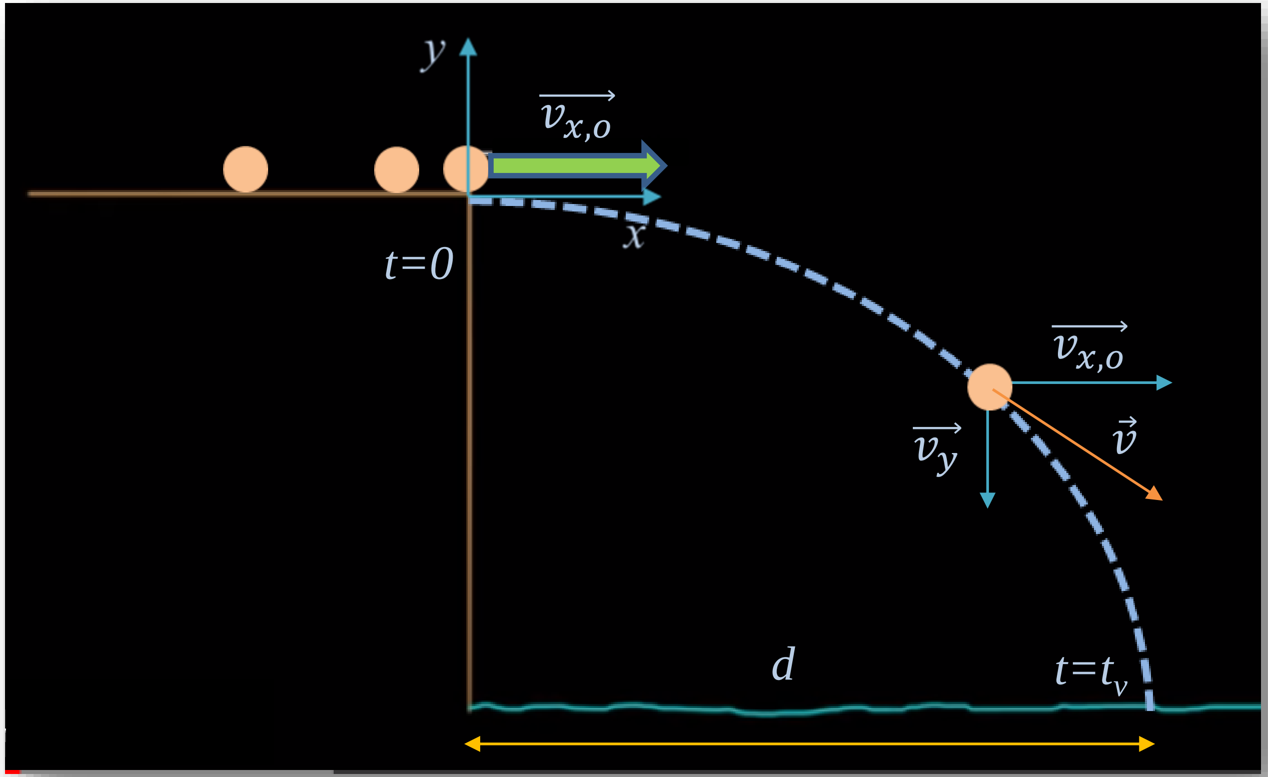
Mediciones indirectas III

Tiro oblicuo

Tiro horizontal

Tiro horizontal

Se define el movimiento como tiro horizontal si la velocidad constante del móvil es la dirección x



- ✓ Definimos un sistema de referencia cartesiano.
- ✓ Definimos el origen de coordenadas en el lugar donde le móvil se separa de la base.
- ✓ Ese instante será el *t = 0*
- ✓ Se desprecia el rozamiento con el aire
- ✓ El movimiento horizontal un MRU.
- ✓ El movimiento vertical es MRUA.

$$v_x(t) = v_{x,o} \quad 1$$

$$x(t) = \cancel{x_o} + v_{x,o}t$$

$$v_y(t) = \cancel{v_{y,o}} - gt \quad 2$$

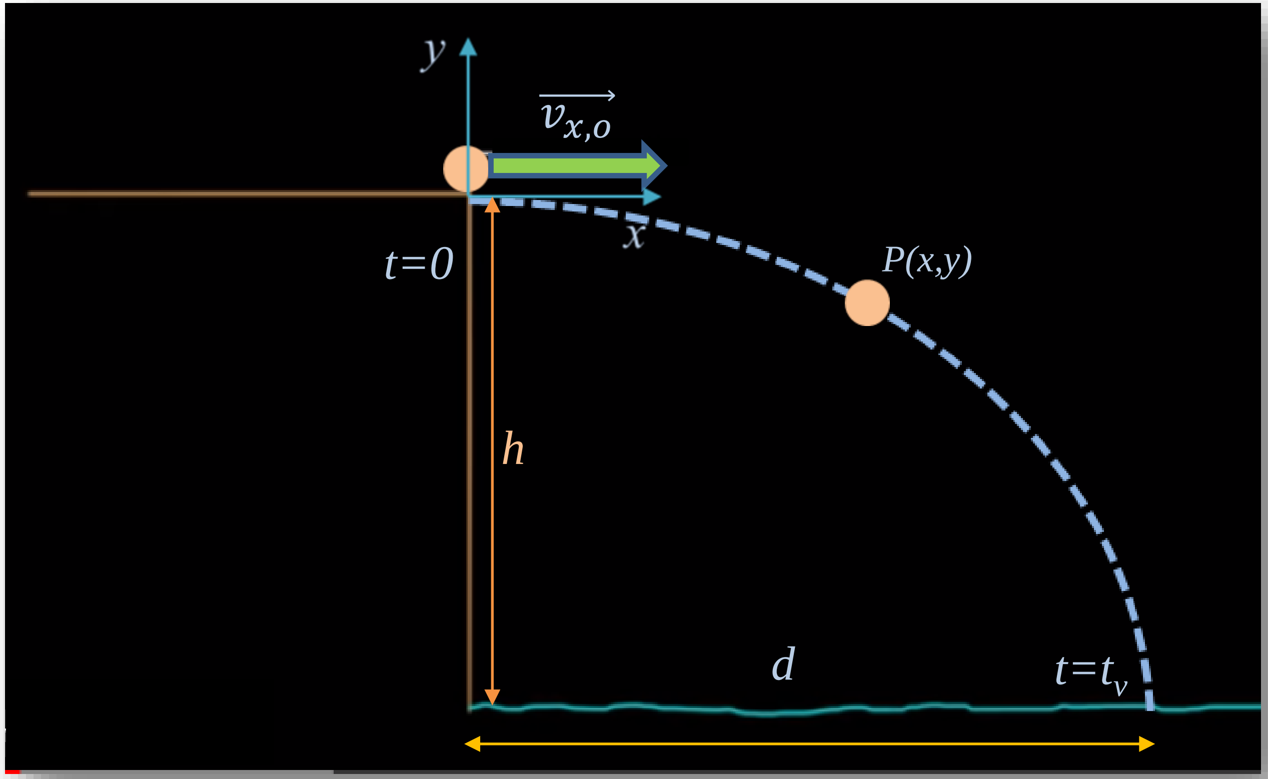
$$y(t) = y_o + \cancel{v_{y,o}}t - \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[y_o = 0]{} y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

1
2
Velocidad en un dado instante

$$v = \sqrt{v_{x,o}{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{v_{x,o}{}^2 + (-gt)^2} = \boxed{\sqrt{v_{x,o}{}^2 + g^2t^2}}$$

Tiro horizontal

Supongamos que se quiere encontrar la trayectoria en *P(x,y)*



$$x(t) = v_{x,o}t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

Se parametriza en el tiempo

$$\boxed{y(t) = -\frac{g}{2v_{x,o}^2}x^2}$$

Si se conoce la altura *h* y la distancia *d* → Se puede estimar $v_{x,o}$

Trabajo Práctico N° 4. Parte B - C

B

- Estudiar el fenómeno de Tiro Oblicuo.
- Se filmará el lanzamiento de una pelota (tipo tenis) con un cierto ángulo hacia arriba y se analizará el video usando el programa Tracker.
- Con la información obtenida :
  - ✓ Estimar el ángulo inicial,
  - ✓ Graficar la trayectorias en x e y en función del tiempo,
  - ✓ Verificar si se cumplen las ecuaciones de trayectoria de tiro oblicuo.
  - ✓ Estimar la aceleración de la gravedad $\boldsymbol{g}$
- Repetir la experiencia con distintos ángulos iniciales (por lo menos 2 más).

Trabajo Práctico N° 4. Partes B - C

C

- Estudiar el fenómeno de Tiro Horizontal.
- Hacer deslizar una pelota por una mesa con una cierta velocidad y filmar su trayectoria mientras cae de la mesa.
- Analizar el video con el programa Tracker.
- Obtener la trayectoria de la coordenada *y* en el tiempo. Obtener la aceleración de la gravedad *g* por regresión por cuadrados mínimos

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

- Obtener la trayectoria de la coordenada *x* en el tiempo y obtener la velocidad inicial por regresión por cuadrados mínimos

$$x(t) = x_o + v_{x,o}t$$

- Realizar la experiencia para 4 velocidades diferentes. Estimar la velocidad $v_{x,o}$ y *g* en cada caso.
- Analizar la dispersión de *g*.
- Comprobar mediante una regresión por cuadrados mínimos que se cumple (por lo menos 7 puntos)

$$h = -\frac{g}{2v_{x,o}^2}d^2$$

¿ PREGUNTAS ?