

# Laboratorio 1

## Turno C

Clase 7

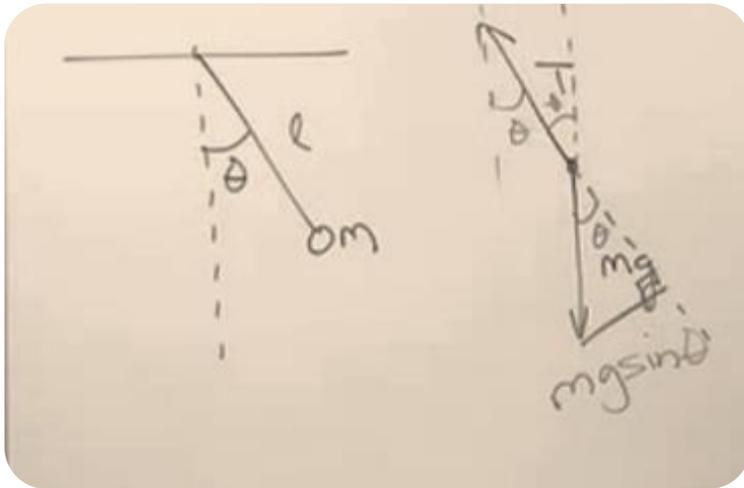
Péndulo con ángulo inicial grande  
(21/05/2022)

# Ecuación de movimiento del péndulo simple (balance de fuerzas)

¿Qué fuerzas actúan ?

La trayectoria de la masa describe un arco de círculo de radio  $l$ .

La dirección de la velocidad instantánea de la masa es tangente al arco de la trayectoria.



$$s = l\theta$$
$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$$
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

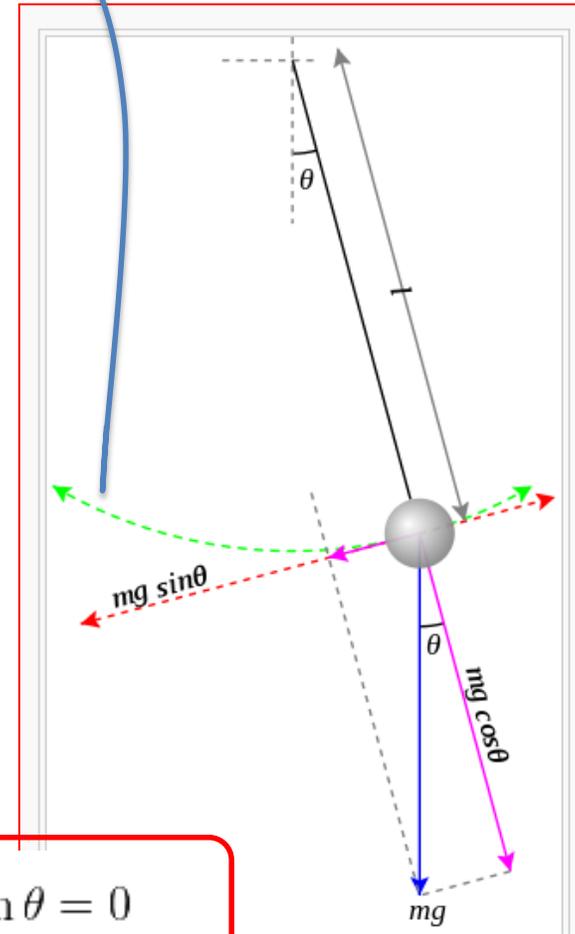
Si consideramos la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

$$F = -mg \sin \theta = ma$$
$$a = -g \sin \theta \quad \longrightarrow$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta \quad \longrightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$



## Ecuación de movimiento del péndulo simple (consideración energética)

$$\Delta U = mgh \quad \text{Energía potencial}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{Energía cinética}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U = mgh \\ \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2}mv^2 = mgh \\ v = \sqrt{2gh} \end{array} \quad (1)$$

La longitud del arco recorrido  $\rightarrow$

$$s = \ell\theta$$

Velocidad a la que se recorre el arco  $\rightarrow$

$$v = \frac{ds}{dt} = \ell \frac{d\theta}{dt}$$

Reemplazando en la ec.(1)

$$v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ell} \sqrt{2gh} \quad (2)$$

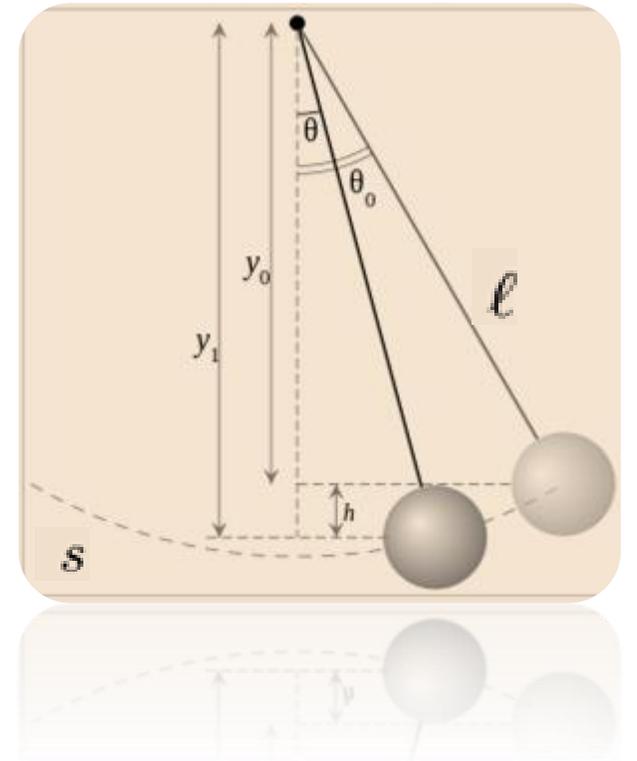
Si la amplitud inicial es  $\theta_0 \rightarrow y_0 = \ell \cos \theta_0$

Análogamente  $y_1 = \ell \cos \theta$

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = \ell \cos \theta_0 \\ y_1 = \ell \cos \theta \end{array} \right\} h = \ell (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (3)$$

Reemplazando la ec. (3) en la ec.(2)  $\rightarrow$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (4)$$



$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (3)$$

Si derivamos la ec. (3) respecto del tiempo



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{-(2g/\ell) \sin \theta}{\sqrt{(2g/\ell) (\cos \theta - \cos \theta_0)}} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-(2g/\ell) \sin \theta}{\sqrt{(2g/\ell) (\cos \theta - \cos \theta_0)}} \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Ecuación diferencial del movimiento del péndulo

$$\theta \ll 1. \quad \longrightarrow \quad \sin \theta \approx \theta.$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0.$$

Ecuación del oscilador armónico



$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right) \quad \theta_0 \ll 1.$$

El período  $T_0$  es el tiempo para realizar una oscilación

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \theta_0 \ll 1$$

# ¿Qué sucede cuando tenemos una amplitud inicial arbitraria ?

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$



$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$$T = \int_0^{4\theta_0} dt = \int_0^{4\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta.$$

Podemos integrar sobre un ciclo completo  $T = t(\theta_0 \rightarrow 0 \rightarrow -\theta_0 \rightarrow 0 \rightarrow \theta_0)$ ,

o 2 veces sobre medio ciclo  $T = 2t(\theta_0 \rightarrow 0 \rightarrow -\theta_0)$

o 4 veces sobre  $\frac{1}{4}$  de ciclo  $T = 4t(\theta_0 \rightarrow 0)$

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

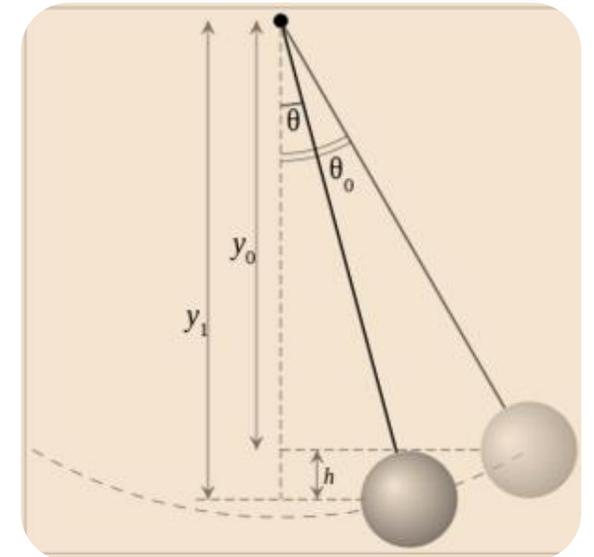
Si  $\theta_0$  se acerca al vertical la integral diverge

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} T = \infty,$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} F \left( \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du.$$

$$\sin u = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}}$$

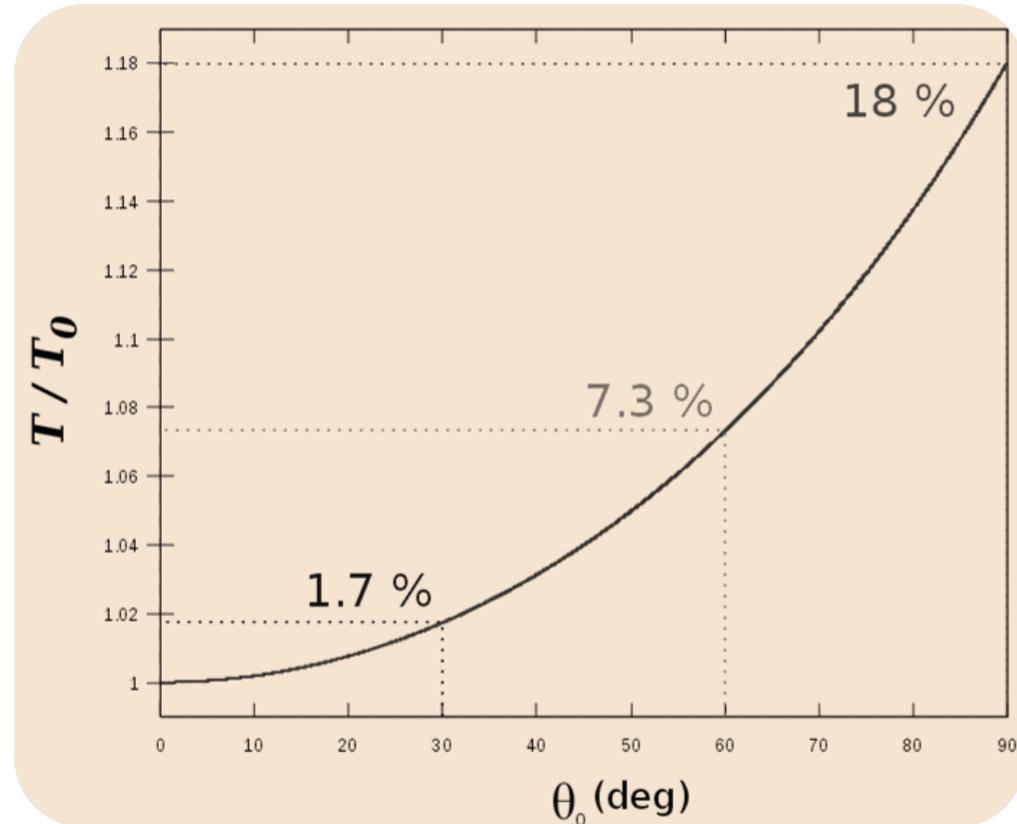


Función integral elíptica  
incompleta

El desarrollo en series lleva a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots \right)$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \right)^2 \cdot \sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right].$$

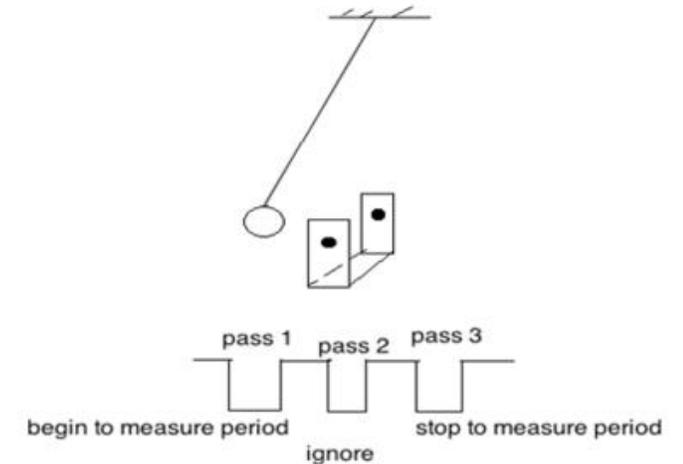
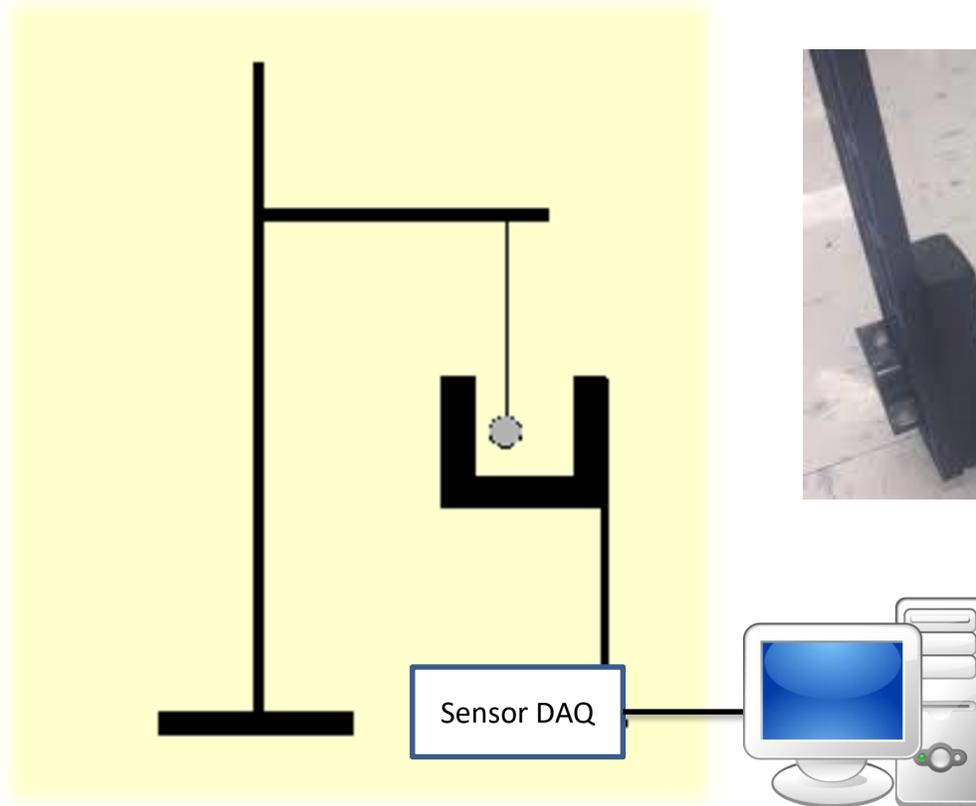
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



# Realización del Trabajo Práctico N° 5

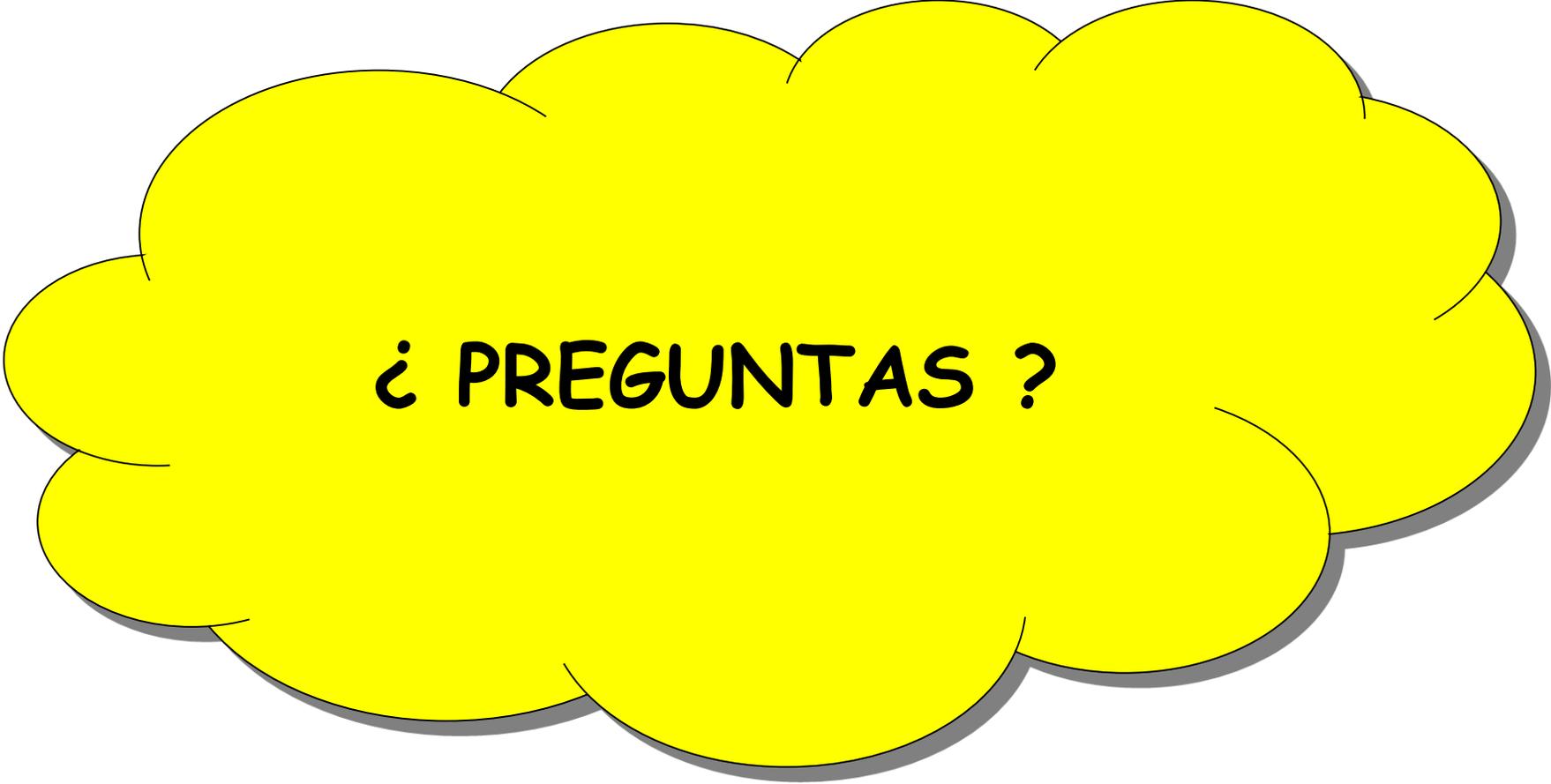
1

- Motar el péndulo con photogate como en el TP N°1
- Elegir una velocidad de muestreo adecuada



## Realización del Trabajo Práctico N° 5

- 2
- Estudiar la dependencia del período del péndulo simple con la amplitud inicial
  - Hacer la experiencia con 6 ángulos iniciales)
  - Realizar 20 mediciones del período (elegir de acuerdo a la experiencia 2)
  - Ajustar al modelo
- 3
- Analizar la dependencia del período con la longitud del hilo (6 longitudes diferentes).  
¿Qué magnitud podemos calcular?
  - ¿En qué amplitudes iniciales trabajamos?
  - Realizar 20 mediciones del periodo (método de regresión lineal).
  - Ajustar al modelo



**¿ PREGUNTAS ?**