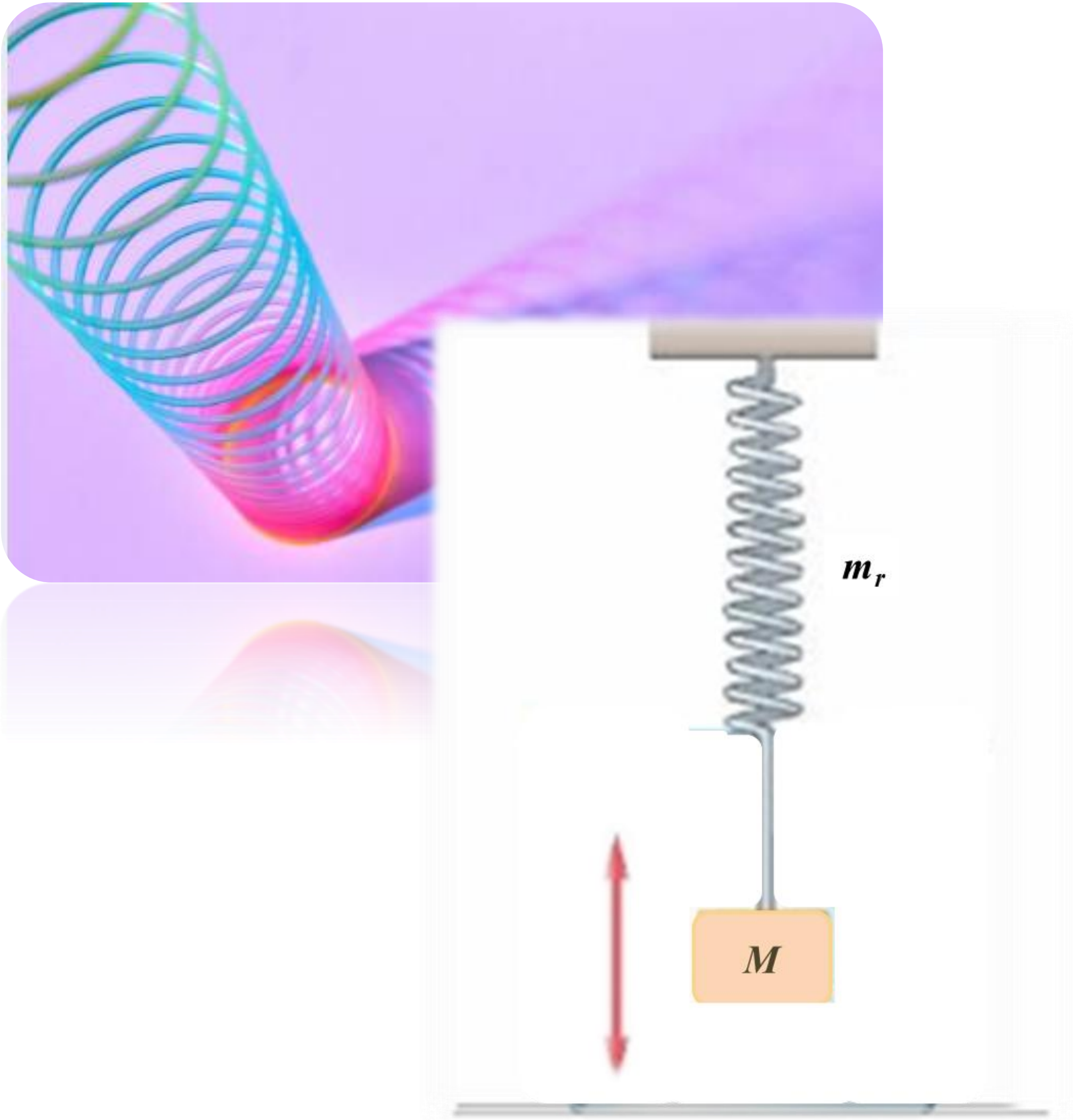
Laboratorio 1
Turno C

Clase 9

Movimiento oscilatorio amortiguado

(11/06/2022)

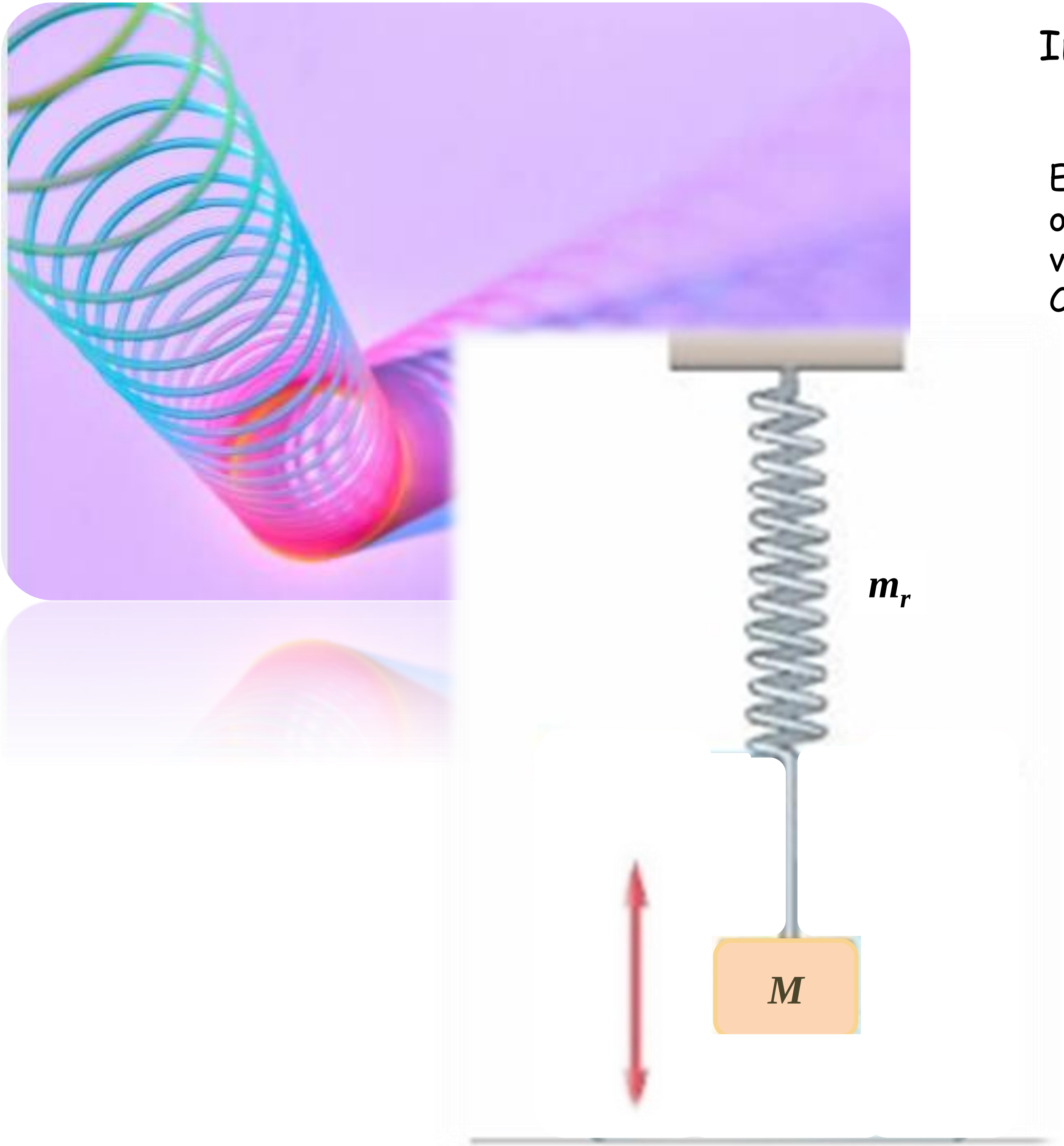


- Hemos estudiado la dinámica de un sistema masa-resorte oscilando, sin considerar amortiguamiento ni la influencia de la masa del resorte.

- ¿ Influye la masa del resorte m_r en la evaluación de la frecuencia ω_o del sistema ?

- Complementando la última clase, vamos a estudiar el movimiento oscilatorio amortiguado de un sistema simple, compuesto por un resorte y una masa oscilando en un fluido (agua).

- Poniendo el sistema en oscilación estudiaremos la dependencia del sistema si existe una fuerza de fricción o rozamiento que se opone al movimiento.



Influencia de la masa del resorte

El efecto de la masa del resorte $\boldsymbol{m_r}$ en la frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte, ha sido estudiado por varios autores.
Consideran una masa efectiva

$$m_{ef} = M + \alpha\, m_r \qquad \alpha \begin{cases} 1/3 & m_r << M \\ 4/\pi^2 \approx 0{,}41 & m_r >> M \end{cases}$$

La aceleración externa no afecta el período de movimiento alrededor del punto de equilibrio.

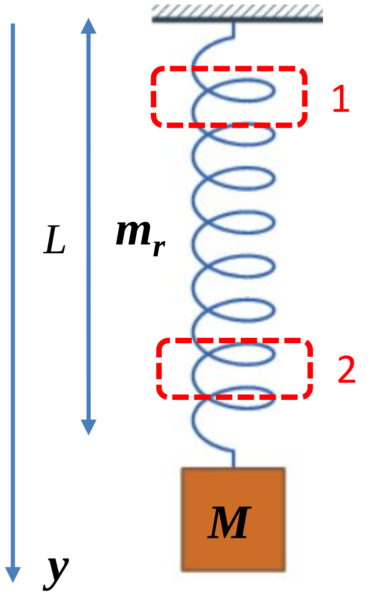
La masa efectiva del sistema con un resorte de longitud L y constante k se puede determinar encontrando su energía cinética T.

Esto requiere agregar la energía cinética de todos los elementos de masa del resorte $m = m_r$

$$T = \int_m \tfrac{1}{2} u^2 \, dm$$

El diferencial de masa *dm* → $dm = \left(\frac{dy}{L}\right) m,$

$$T = \int_0^L \tfrac{1}{2} u^2 \left(\frac{dy}{L}\right) m \quad = \tfrac{1}{2} \frac{m}{L} \int_0^L u^2 \, dy \quad (*)$$



La velocidad de cada elemento de masa *dm* del resorte *es directamente proporcional a la longitud desde el lugar donde esta sujeto.*

Hay menor velocidad cerca del soporte (1) y mas velocidad a medida que ese aleja de esa posición (2)

$$u = \frac{vy}{L},$$

Velocidad en el extremo inferior del resorte

Reemplazando en (*)

$$T = \tfrac{1}{2} \frac{m}{L} \int_0^L \left(\frac{vy}{L}\right)^2 dy \quad = \tfrac{1}{2} \frac{m}{L^3} v^2 \int_0^L y^2 \, dy$$

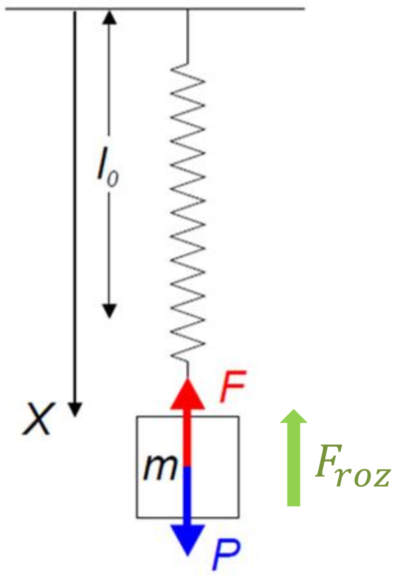
$$= \tfrac{1}{2} \frac{m}{L^3} v^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L \Rightarrow \boxed{T = \tfrac{1}{2} \frac{m}{3} v^2} \Rightarrow \boxed{\omega_o^2 = \frac{k}{M + (m_r/3)}}$$

Oscilaciones amortiguadas

Consideremos que sobre el sistema masa- resorte actúa una fuerza que intenta frenar el movimiento.

Supongamos esa fuerza de la forma

$$F_{roz} = -b\dot{x}$$



Aplicando la 2da Ley de Newton

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_o) - b\dot{x}$$

reagrupando

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{kl_o}{m}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

La solución particular planteada en la clase anterior sigue valiendo

$$x_P(t) = l_o + \frac{mg}{k}$$

La ecuación homogénea tomo la forma $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ⟹ Se propone la solución $x_H(t) = A\, exp(-\gamma t)$

$$\gamma^2 - \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t) \qquad \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\Delta = b^2 - 4mk \quad \longrightarrow \quad \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$$

Δ

$\neq 0$

Hay dos soluciones diferentes $\quad x_H(t) = B\,exp(-\gamma_1 t) + C\,exp(-\gamma_2 t)$

$\Delta > 0$ $\Rightarrow$ Exponenciales reales $\Rightarrow$ Caso sobre-amortiguado

$\Delta < 0$ $\Rightarrow$ Exponenciales complejas $\Rightarrow$ Caso sub-amortiguado

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t)\,sen(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \qquad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow$$

$= 0$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\Delta = b^2 - 4mk = 0 \quad \Rightarrow \quad 4mk = b^2$$

$$\omega_o^2 = \gamma^2$$

Hay dos soluciones diferentes $x_H(t) = B\ exp(-\gamma_1 t) + C\ exp(-\gamma_2 t)$ Dos constantes ajustables B y C

Si $\Delta = 0$ $\longrightarrow$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

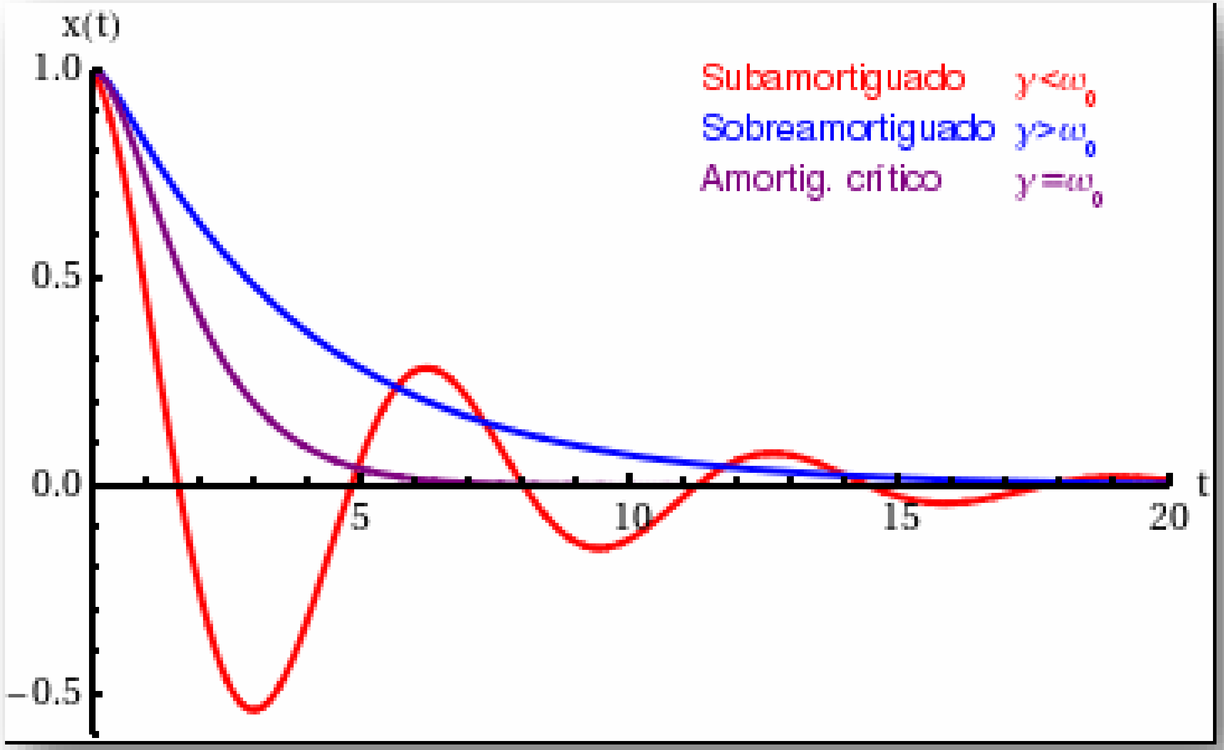
Planteando condiciones iniciales
$$\begin{cases} x_H(0) = 0 \\ dx_H/dt\,(0) = 0 \end{cases}$$

Se puede demostrar que en ese caso es solución

$$x_H = A\,exp\,(-\gamma t)\ +\ B\,t\,exp\,(-\gamma t)$$

Amortiguamiento crítico

En sistemas mecánicos reales esta condición se busca ex-profeso.
Si se aplica a un sistema en reposo bruscamente una fuerza constante, esta será seguida de una suave aproximación a la nueva posición de equilibrio
(desplazada de la anterior **sin oscilaciones**).



Determinación de parámetros mediante un ajuste no lineal

Supongamos que medimos x(t) (también podría ser F(t)).

Queremos ajustar los *N* datos experimentales $(t_i \, , x_i)$ a la función :

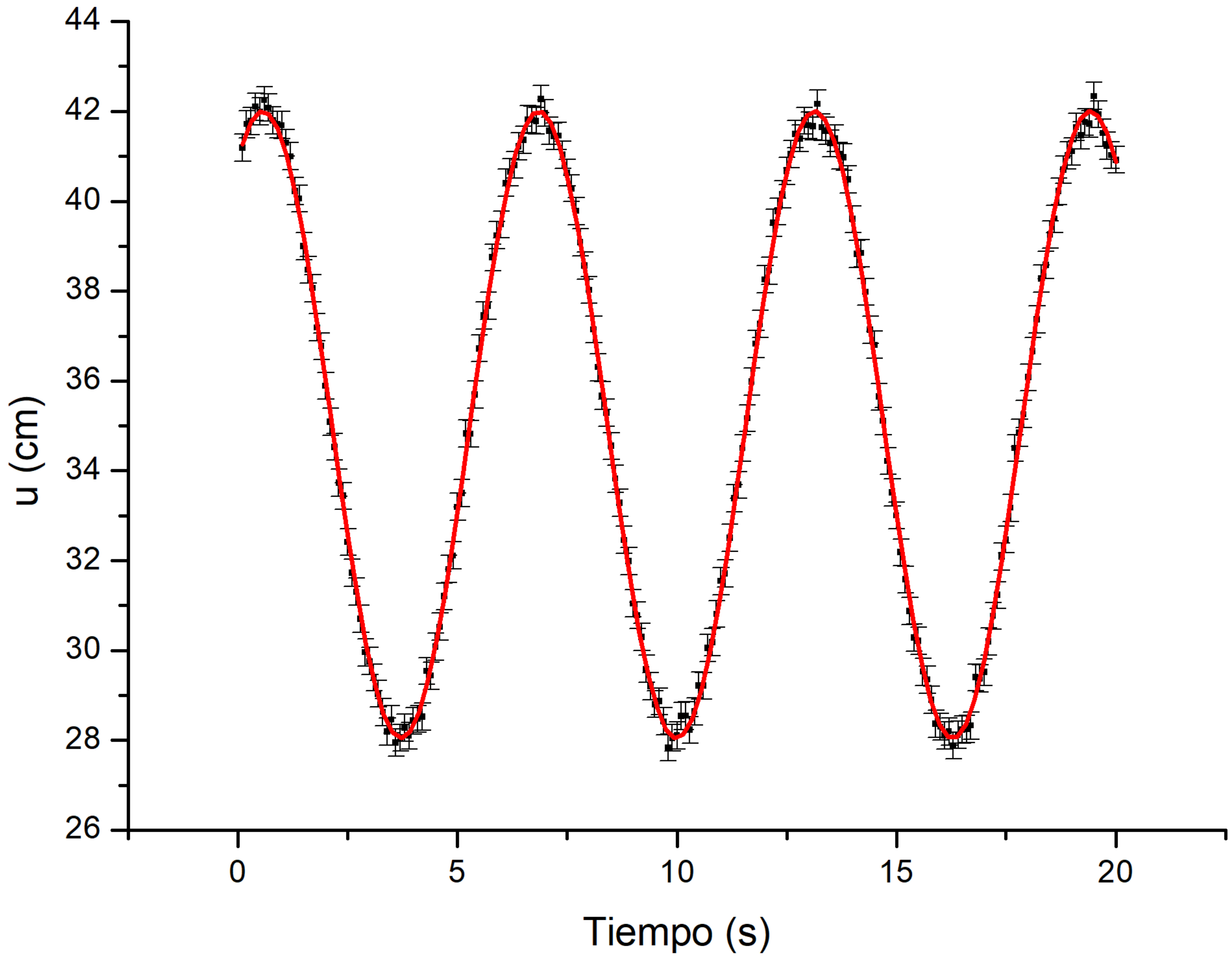
$$x(t) = C + A\, sen(\omega\, t + \varphi)$$

y obtener los parámetros C,A, ω y φ. Se debe minimizar la función

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i - \left(C + Asen(\omega t_i + \varphi)\right)}{\sigma_i} \right]^2$$

En este caso hay una dependencia no lineal de los parámetros ω y φ.

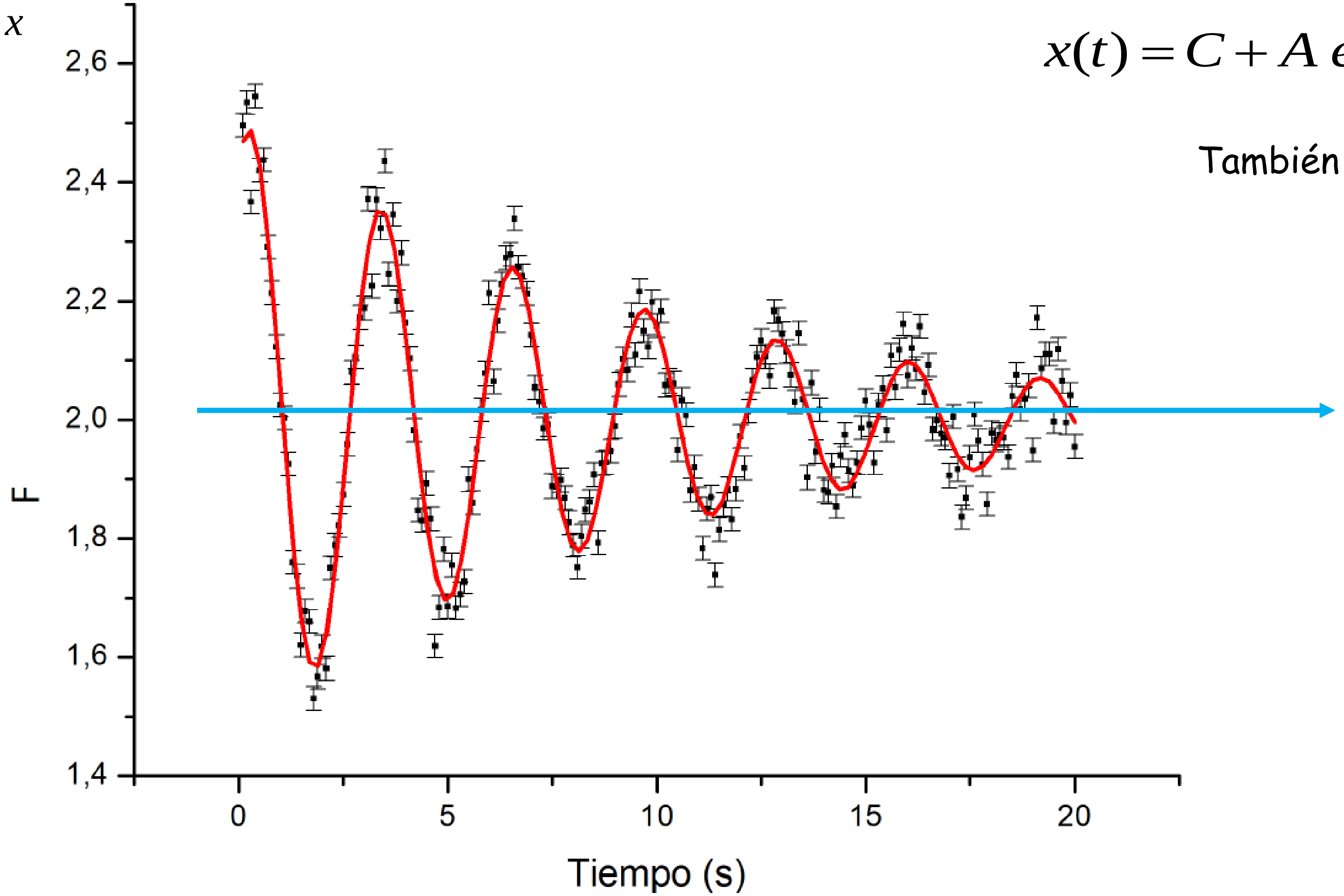
Se resuelve con métodos computacionales. Son iterativos, no tiene solución única y depende de los parámetros iniciales que se fijen.



$$x(t) = C + A\, sen(\omega\, t + \varphi)$$

Utilizando Origin se pueden ajustar estos datos a la función

Ajuste no lineal de la señal completa para determinar ω y γ



$$x(t) = C + A\,exp(-\gamma t)\;sen(\omega\, t + \varphi)$$

También se puede resolver en Origin

Este es el valor de C

También podemos previamente encontrar γ

Alternativa: un ajuste lineal, después de linealizar en forma conveniente.

$$F(t) = C + A\exp(-\gamma\, t)\,\underbrace{\mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi)}$$

Los picos de *F(t)* ocurren cuando el seno es 1.

$$F_{pico}(t) = C + A\exp(-\gamma\, t_{pico})$$

Se puede programar en Origin

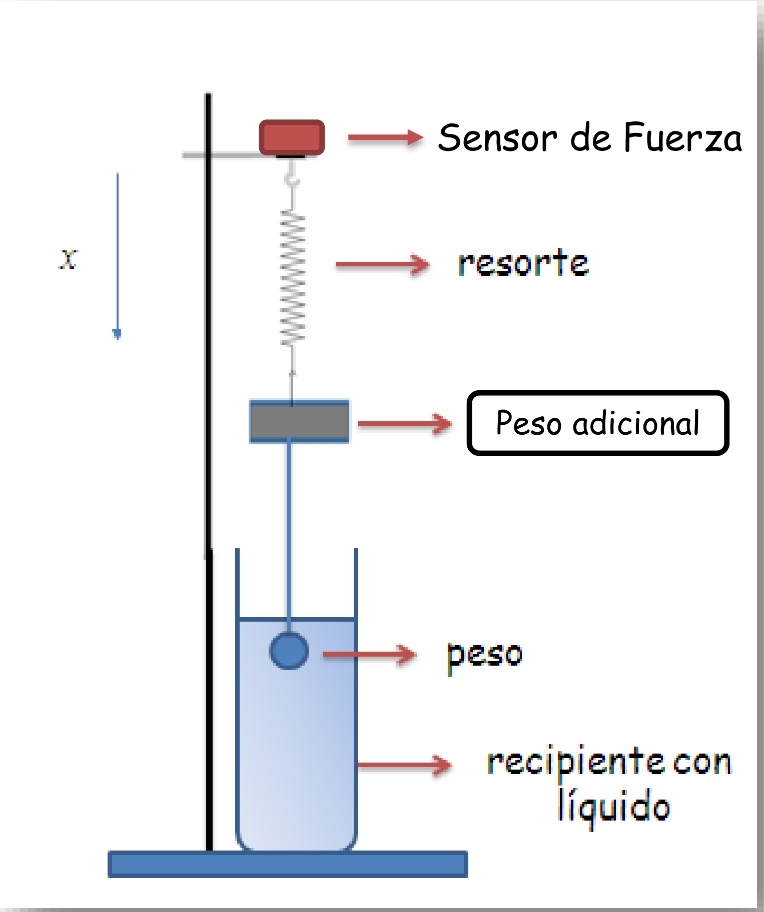
$$\Longrightarrow \quad F_{pico} - C = A\exp(-\gamma\, t_{pico})$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(F_{pico} - C) = \ln(A) - \gamma\, t_{pico}$$

Restando y tomando logaritmo, se obtiene una expresión lineal en el coeficiente de amortiguamiento. Este se puede determinar entonces aplicando un ajuste lineal por una recta.

Trabajo Práctico N° 6 - Parte E

- Se utilizara una configuración parecida a la del TP N°6 - Parte C
- Se debe conocer el peso de los elementos que componen el sistema.
- Se quiere registrar el movimiento oscilatorio del sistema a partir de la variación de la fuerza del sistema oscilante (en la dirección de la coordenada x en la figura) en función del tiempo.
- Primero se debe registrar la variación de la fuerza a medida que se produce el movimiento oscilatorio el movimiento sin el recipiente de la figura. Luego se repite la experiencia con el recipiente con agua.
- Se be realizar esta experiencia para 5 pesos diferentes.



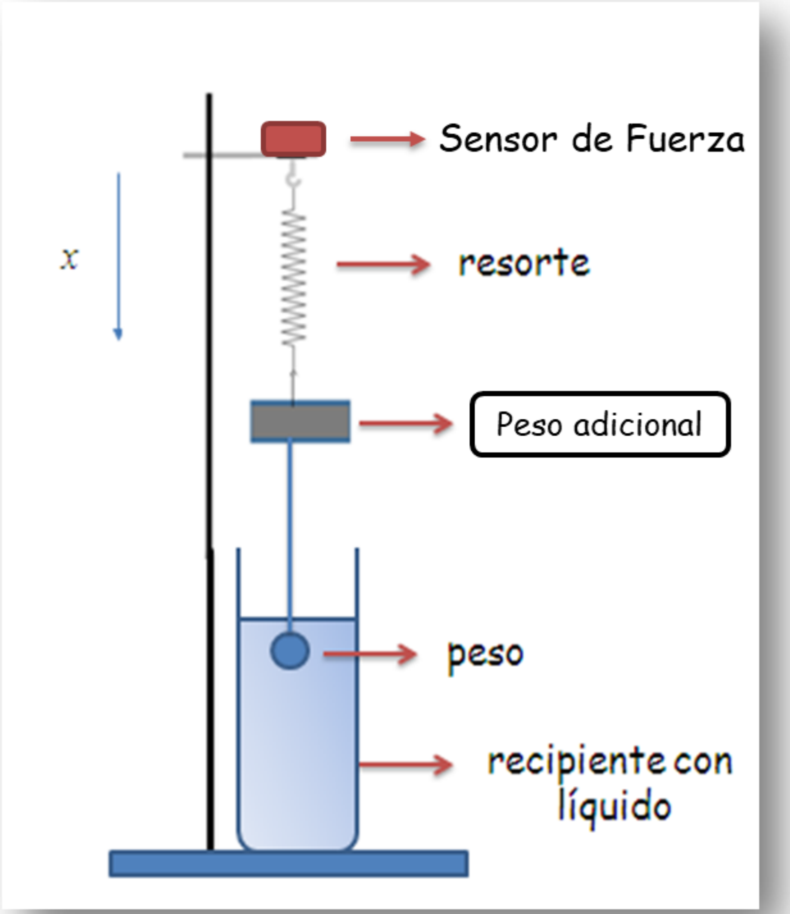
- A partir de los datos se debe verificar que el sistema no trabaje en condición sobre-amortiguado ni crítico.
- De ser así, busque una condición donde el sistema oscile en forma sub-amortiguada.
- En ese caso se cumple :

fase

$$F(t) = A\, exp(-\gamma t)\, sen(\omega t + \varphi)$$

Coeficiente de amortiguación

Frecuencia angular de oscilación



- ¿Se le debe agregar algún término a esta ecuación ?
- ¿Cómo calcular γ sin ajustar los datos experimentales a la ecuación en forma completa?
- A partir del ajuste (no lineal) de los datos a la ecuación obtenga A, ω y φ, para cada caso usando Origin o Phyton.

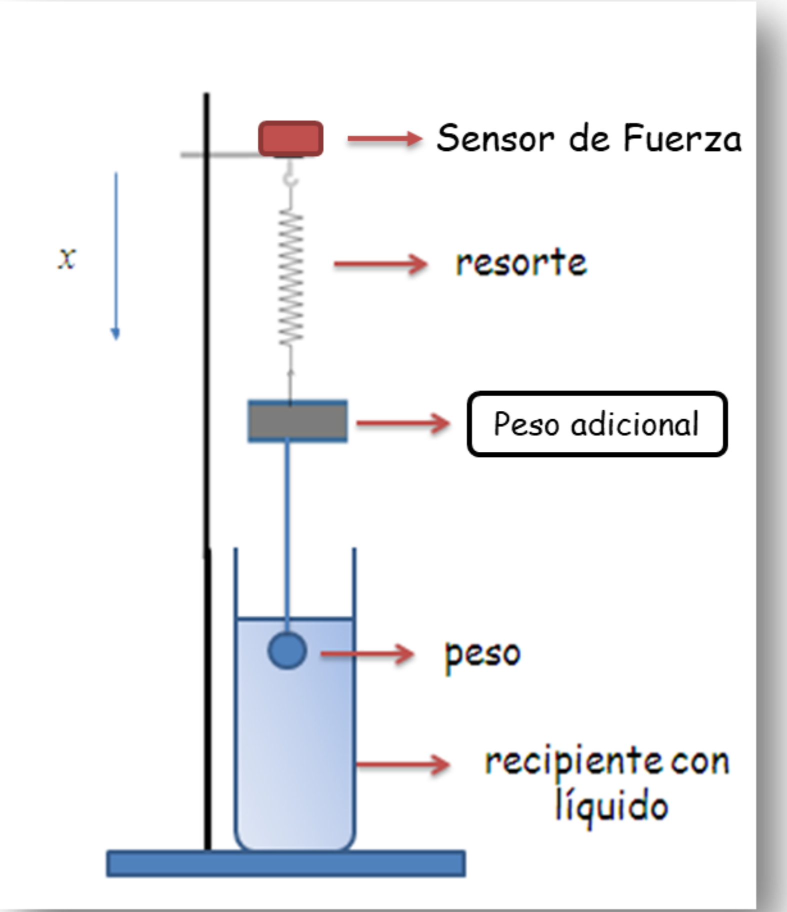
Importante :

- En la clase pasada se calculó la constante del resorte k. Si no usa el mismo resorte en esta experiencia, debe calcular la constante k nuevamente.
- Estime ω_o y verifique si se cumple:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

- A partir de ω_o y de la constante $\boldsymbol{k}$, calcule la masa efectiva del sistema. Verificar si se cumple la relación :

$$\omega_o^2 = \frac{k}{M + (m_r/3)}$$



¿ PREGUNTAS ?

Caso sub-amortiguado