Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2022

Mediciones Directas II
Incertidumbres Estadística

Lucía Famá, Patricio Grinberg,
Marcos Wappner, Carolina Iacovone,
Justo González Litardo

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2022

Mediciones Directas II
Incertidumbres Estadística

La actitud científica es la actitud crítica, que no busca verificaciones, sino contrastaciones cruciales; contrastaciones que puedan refutar la teoría contrastada, aunque nunca puedan establecerla (Popper, K.).

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

REPASO DE LA CLASE PASADA …

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del **resultado de una MF**

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\; Ud.}$$

$\bar{x}$**:** Valor más representativo (x_0)

Δx: Incerteza o error Absoluto

Clase de Medición

Fuentes de incertezas

Mediciones Directas (MD)

1 = Pesa como fuente de incerteza el error INSTRUMENTAL

1A - Si 1 vez ⇨ $\boldsymbol{\Delta x = \sigma_{ap}}$ ⇨ $x = (\bar{x} \pm \sigma_{ap})\, Ud.$

Peeeeero …. ***JAMÁS MEDIR UNA SOLA VEZ UNA MF !!!!***

1B - Si mido más de 1 vez y los datos se encuentran **DENTRO del intervalo de confianza** $[\boldsymbol{\bar{x} - \sigma_{ap}}, \boldsymbol{\bar{x} + \sigma_{ap}}]$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\boldsymbol{\Delta x = \sigma_{ap}}$$

Expresión del Resultado

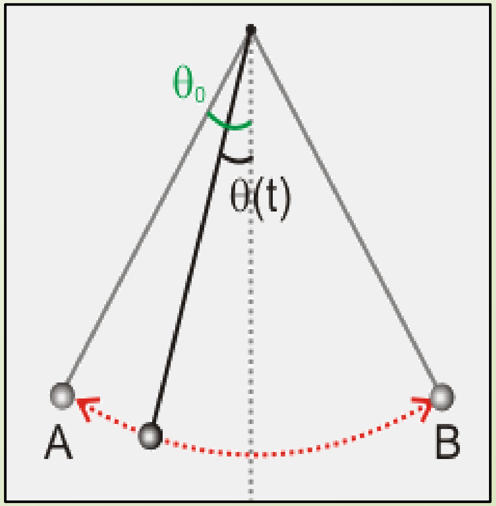
$$x = (\bar{x} \pm \sigma_{ap})\, Ud.$$

Mediciones Directas (MD)

2 = Pesa como fuente de incerteza el error ACCIDENTAL

2 - **Si mido más de 1 vez** y los datos se encuentran **FUERA del intervalo de confianza** $\left[\overline{x} - \sigma_{ap}, \overline{x} + \sigma_{ap}\right]$

¿Cómo determinamos T?



1,25 s	1,23 s	1,23 s
1,22 s	1,25 s	1,26 s
1,24 s	1,26 s	1,23 s

Precisión
0,01 s

¿Cómo calculamos Δx si existe una fuente de error accidental?

Mediciones Directas (MD)

2 = Pesa como fuente de incerteza el error ACCIDENTAL

2 - Si mido más de 1 vez y los datos se encuentran **FUERA del intervalo de confianza** $\left[\overline{x} - \boldsymbol{\sigma}_{ap}, \overline{x} + \boldsymbol{\sigma}_{ap}\right]$

¿Cómo procedemos?

- ✓ Repetir varias veces la determinación del valor de MF
- ✓ Los resultados de las medidas individuales pueden estar poco o muy dispersas
- ✓ En función de esta dispersión será conveniente aumentar o no el número de mediciones de la magnitud
- ✓ ***¿Cuántas*** veces repetimos la medición***?***

2 - Si mido más de 1 vez y los datos se encuentran **FUERA del intervalo de confianza** $\left[\overline{x} - \sigma_{ap}\ , \overline{x} + \sigma_{ap}\right]$

¿Cómo procedemos?

✓ Para decidir el número de determinaciones …

- Mido 3 veces (x_1, x_2, x_3)

- Calculo el **valor medio** $\overline{x}$ y la diferencia entre el valor máximo y el mínimo (Rango: $R = x_{Max} - x_{min}$)

- Calculo "**cuánto pesa (P) porcentualmente**" R **para** $\overline{x}$: $P = \frac{R}{\overline{x}}100$

Si P …	N° de medidas necesarias
Con 3 medidas: Si $P \leq 2\%$	**Suficiente** hacer 3 medidas
Con 3 medidas: Si $2\% < P \leq 8\%$	**Hacer 3** medidas **más**
Con 6 medidas: Si $8\% < P \leq 15\%$	**Seguir midiendo hasta tener 15** medidas
Con 15 medidas: Si $P > 15\%$	**Tomar un mínimo de 50** medidas

2 - Si mido más de 1 vez y los datos se encuentran **FUERA del intervalo de confianza** $\left[\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\sigma_{ap}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\sigma_{ap}}\right]$

¿Cómo obtenemos la incerteza absoluta (Δx) en cada caso?

Si P ...	**N° de medidas necesarias**
Si 3 medidas son suficiente	$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\sigma_{ap}}$
Si debo tomar 6 medidas	$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{m}\acute{a}\boldsymbol{x}(\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{4}}, \boldsymbol{\sigma_{ap}})$
Si debo tomar más de 15 medidas	**Ya veremos ....**

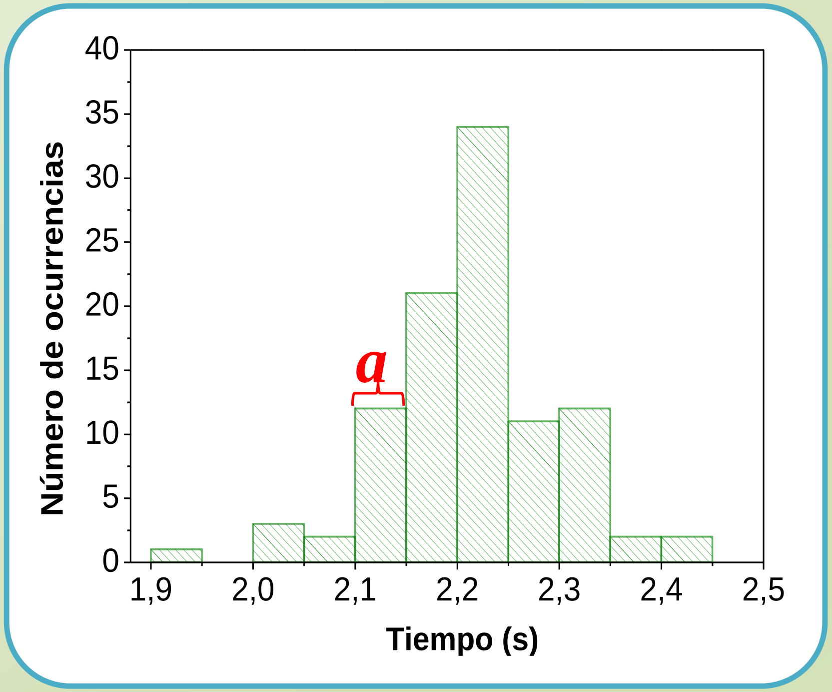
$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{m}\acute{a}\boldsymbol{x}(\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{4}}, \boldsymbol{\sigma_{ap}})$$

⇨ Se calcula R y se lo divide por 4. Se compara R/4 con σ_{ap}, $\Delta \boldsymbol{x}$ será el mayor de ambos

Distribución de datos - Histogramas

Histograma → Representación gráfica en coordenadas cartesianas de la distribución de datos

- Número total de medidas: N
- Rango: $[x_{min}, x_{max}]$
- Intervalo de clase (bin): a
- 1er intervalo: $[x_{min}, x_{min+a})$
- Último intervalo: $[x_{max-a}, x_{max}]$



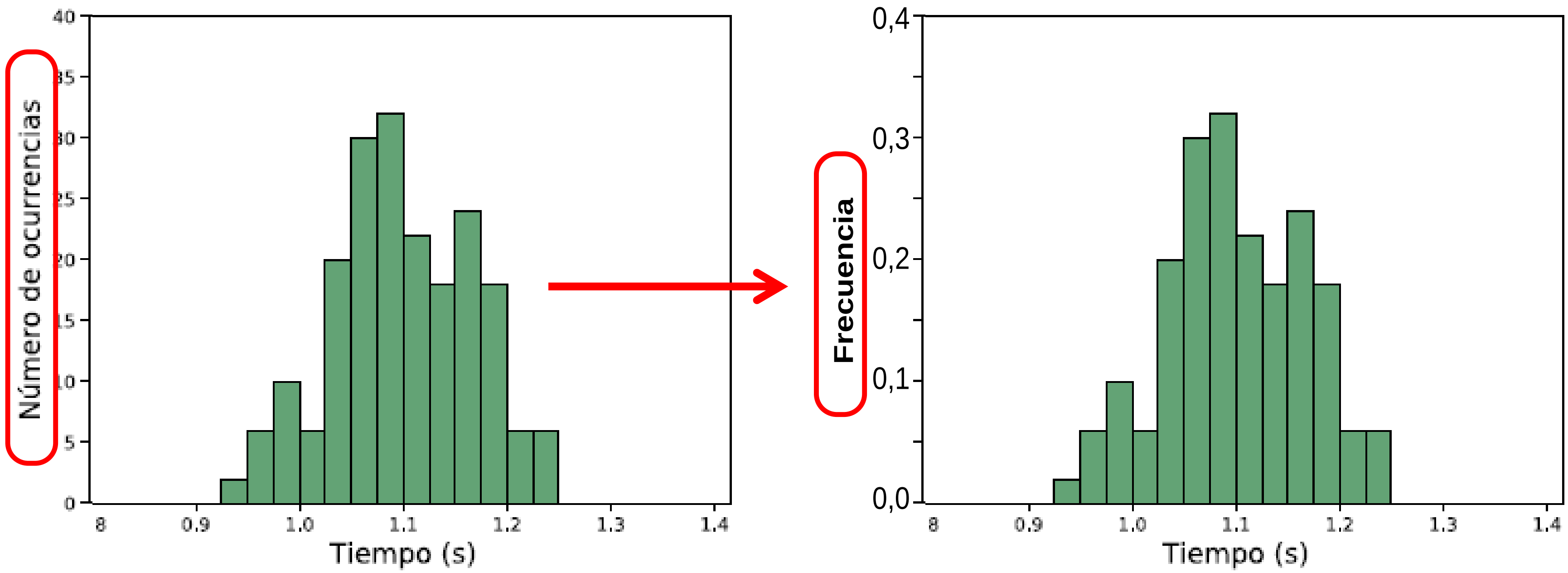
Regla de Sturges

Estima la cantidad (C) de intervalos de clase:

$$\boxed{C = 1 + log_2(N) = 1 + 3{,}322\ \ln(N)}$$

Para poder comparar Histogramas

$$\frac{Nº\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$



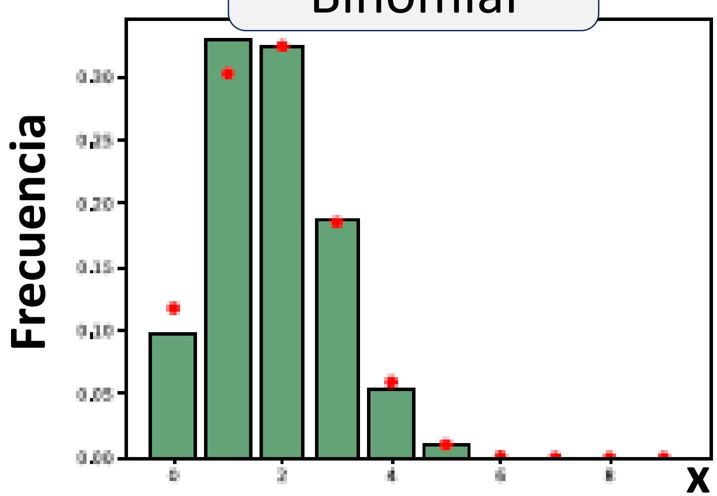
Condición de Normalización

$$\sum_j Número\ de\ ocurrencias_j = N$$

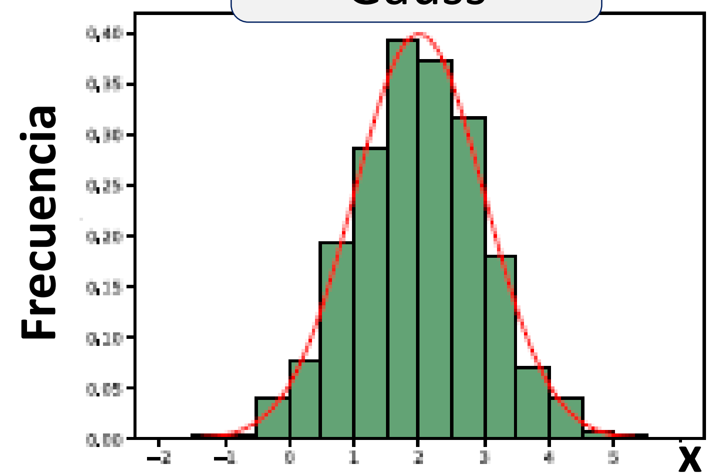
$$\sum_j F_j = 1$$

Ejemplos de distribuciones

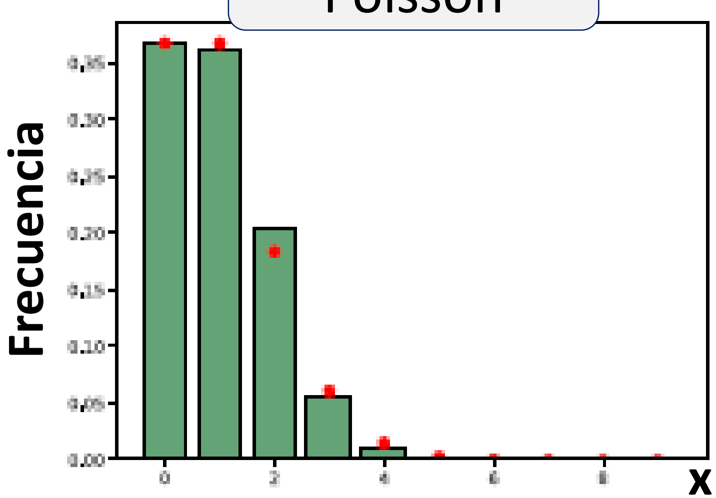
Binomial



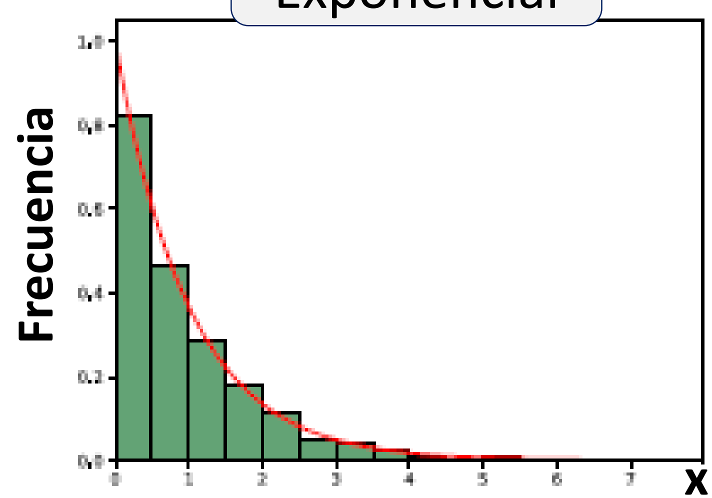
Gauss



Poisson



Exponencial



Distribución de Probabilidades

Supongamos que tomamos
***N* mediciones** de una MF $\longrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$

¿Cómo se distribuyen los datos?

Tirar un **dado N = 100 veces**

Medición #	Cara del dado
1	2
2	6
3	1
…	…
99	4
100	1

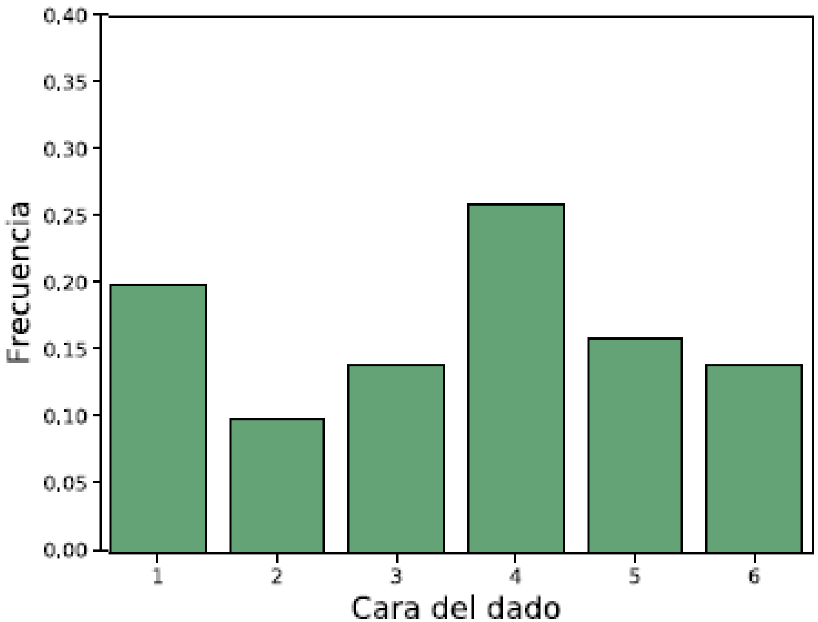
Medir el **período de un faro N = 100 veces**

Medición #	Tiempo (s)
1	1,02
2	0,98
3	1,07
…	…
99	1,22
100	1,10

Distribución de Probabilidades

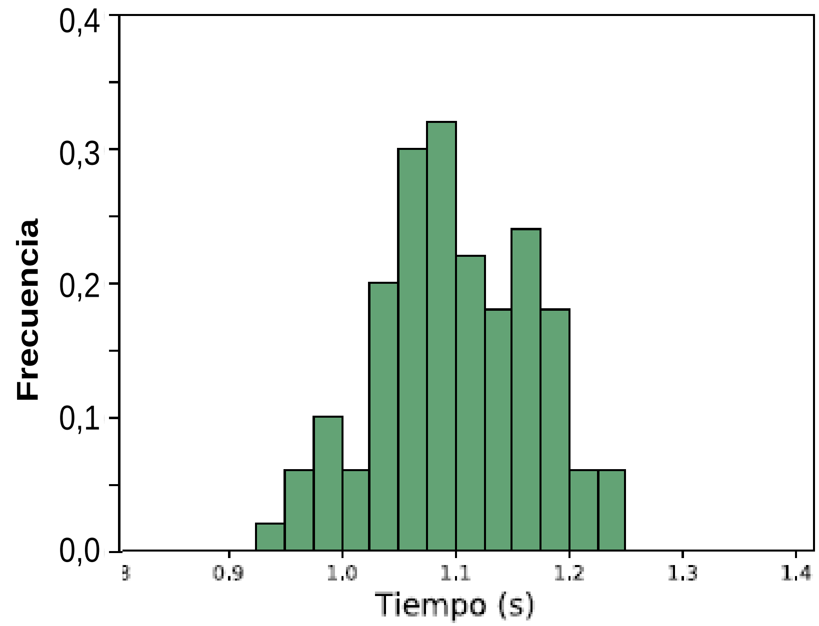
¿Cómo se distribuyen los datos?

Tirar un **dado N = 100 veces**



Medir el **período de un faro N = 100 veces**

N = 100



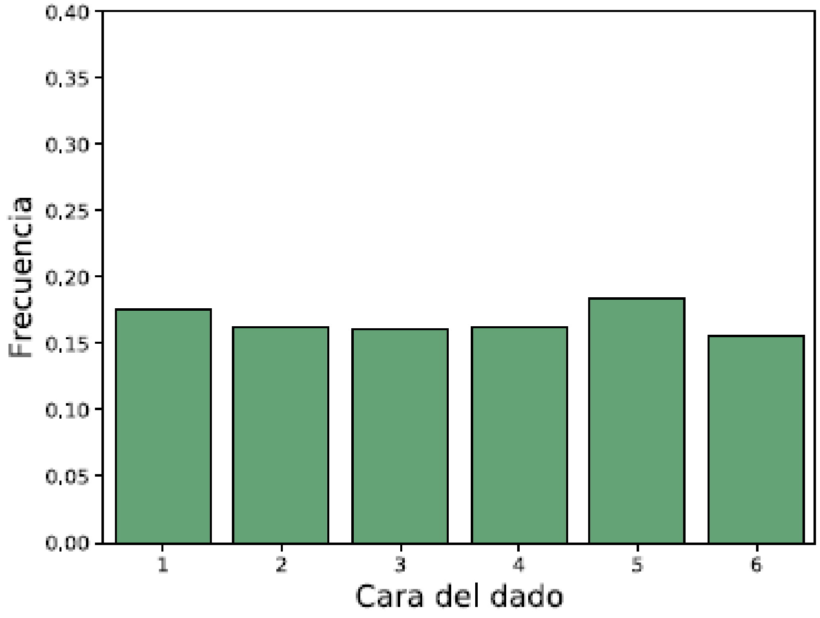
Distribución de Probabilidades

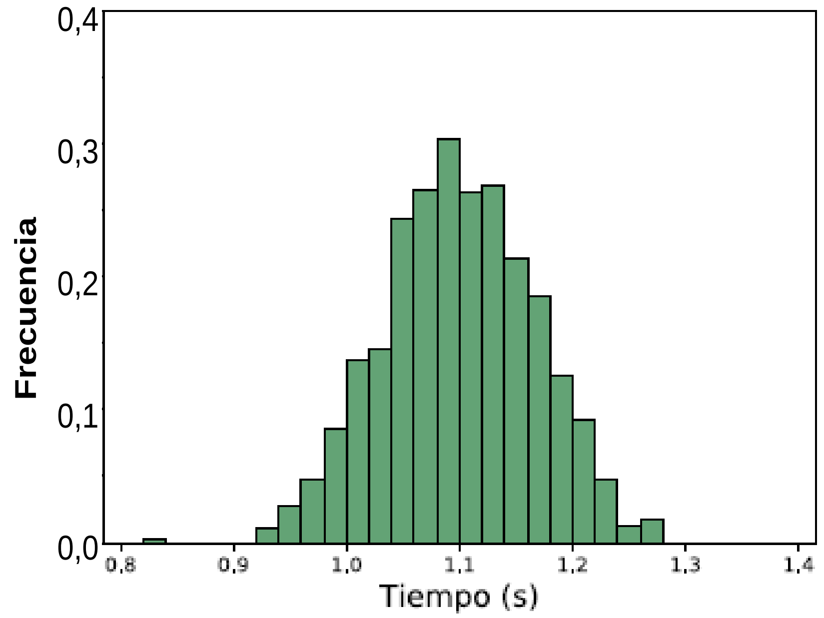
¿Cómo se distribuyen los datos?

Tirar un **dado N = 1000 veces**

Medir el **período de un faro N = 1000 veces**

N = 1000





Distribución de Probabilidades

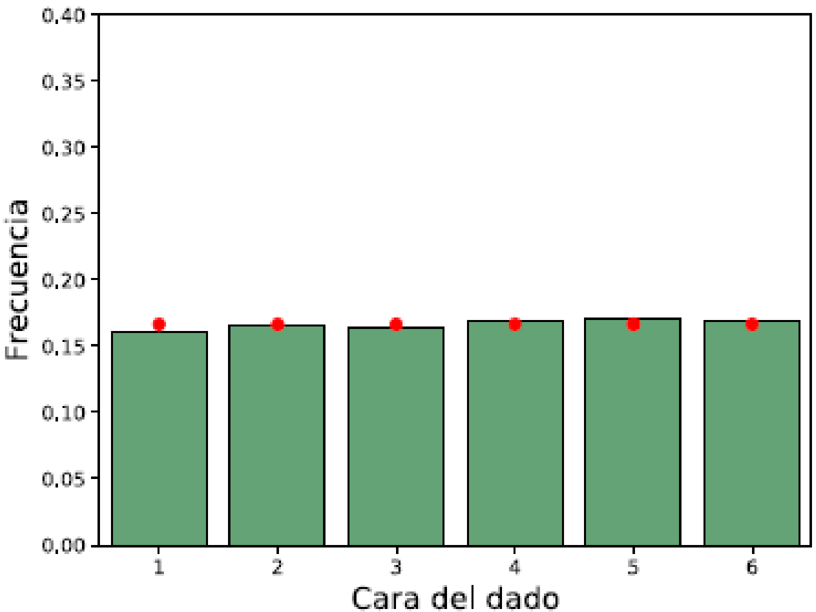
¿Cómo se distribuyen los datos?

Tirar un **dado N = 10000 veces**

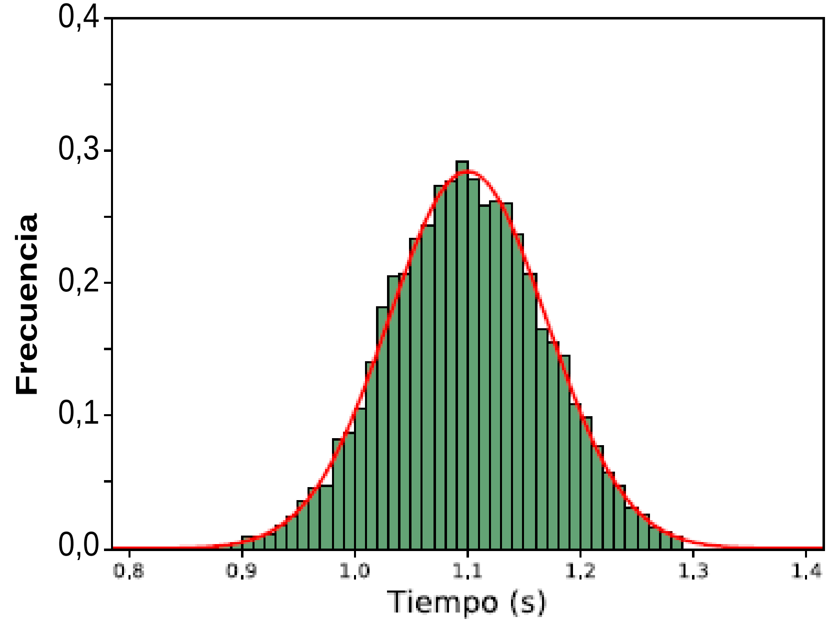
Medir el **período de un faro N = 10000 veces**

Distribución de probabilidades

N = 10000



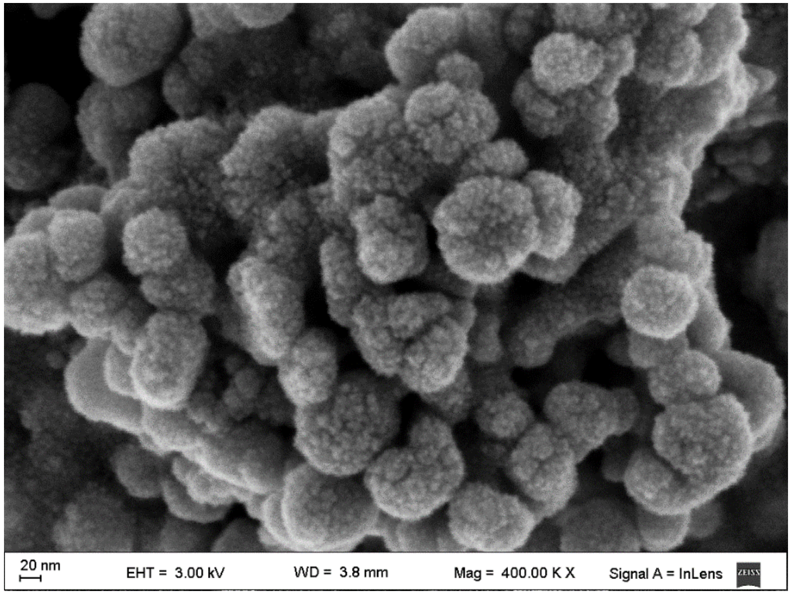
Discreto



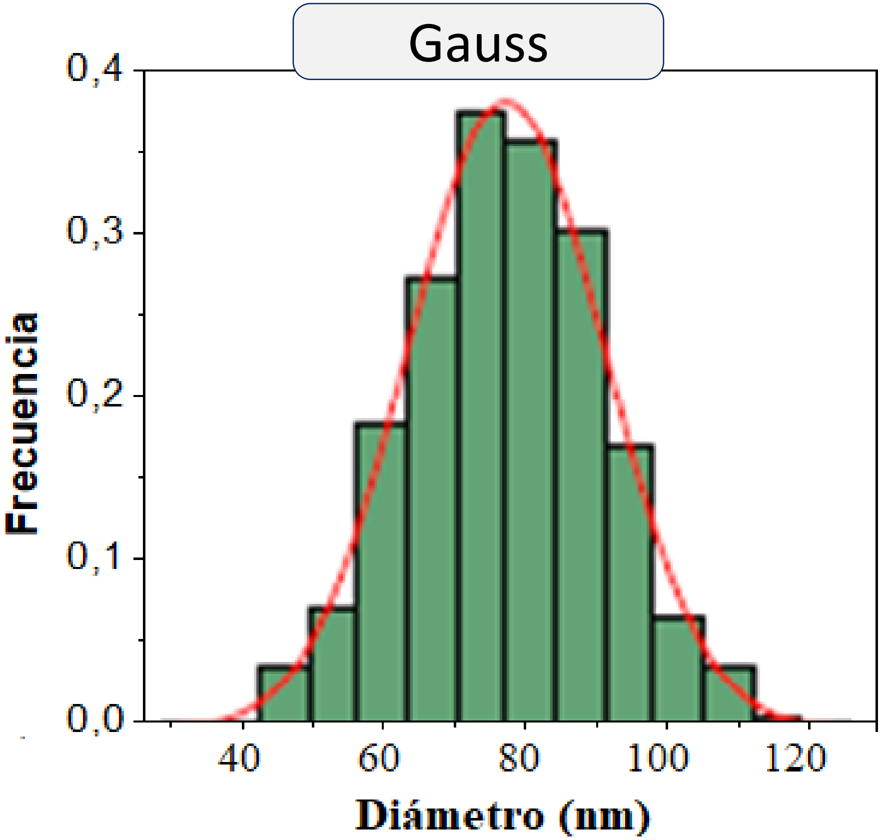
Continuo

Distribución Gaussiana

Microscopía electrónica de barrido (SEM)

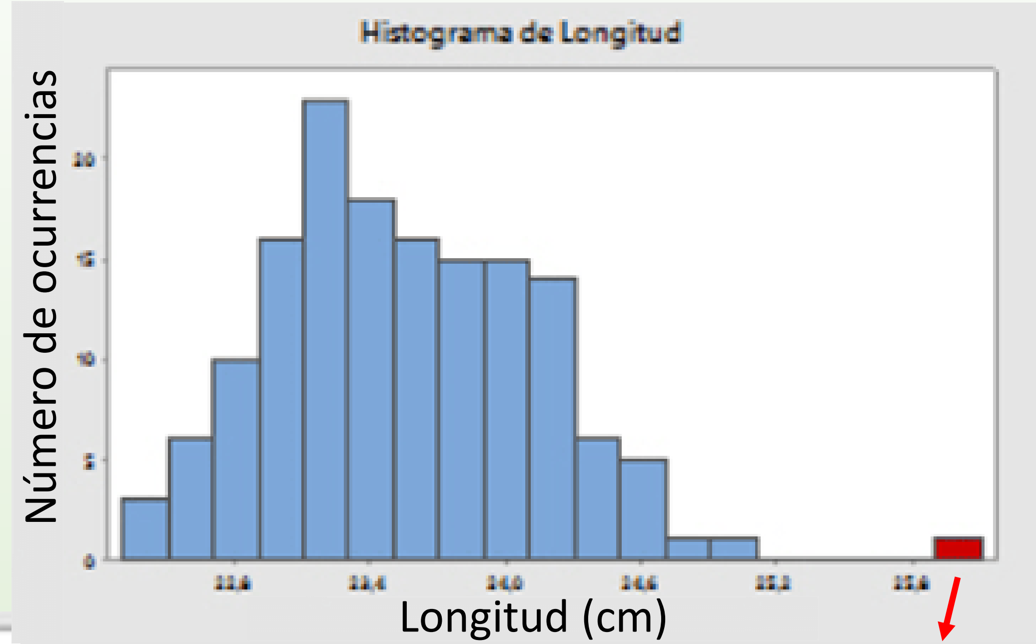


Nanopartículas de Plata sintetizadas con almidón (AgNP). *Trabajo del LP&MC*

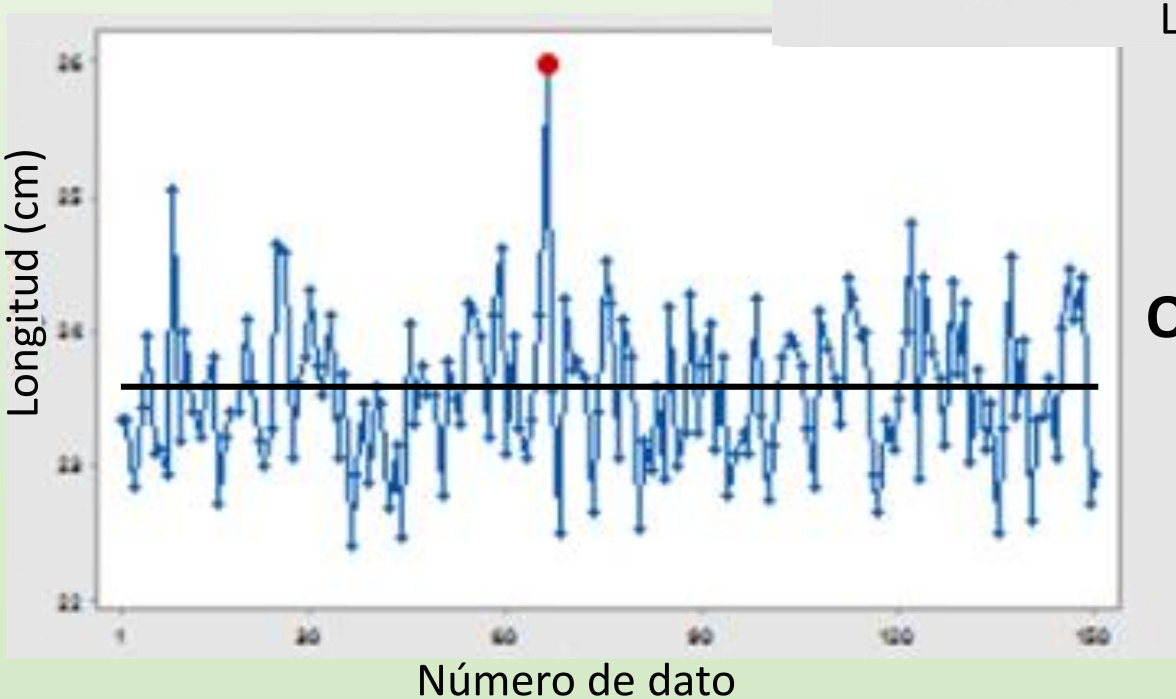


Cuánta info me da un Histograma!

Un Ejemplo con los datos ordenados de menor a mayor

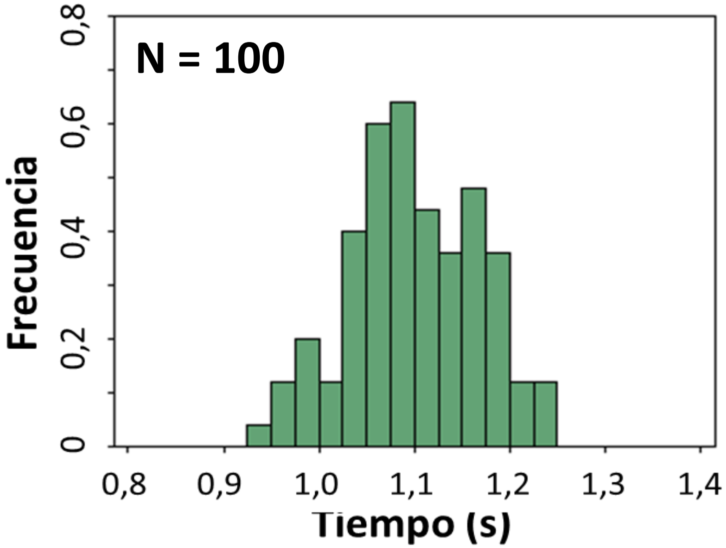


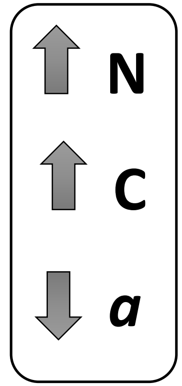
Medida “raras”

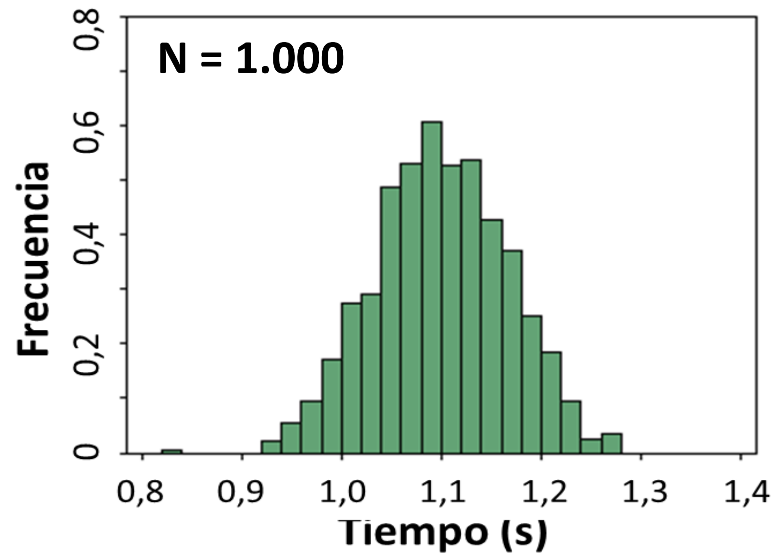


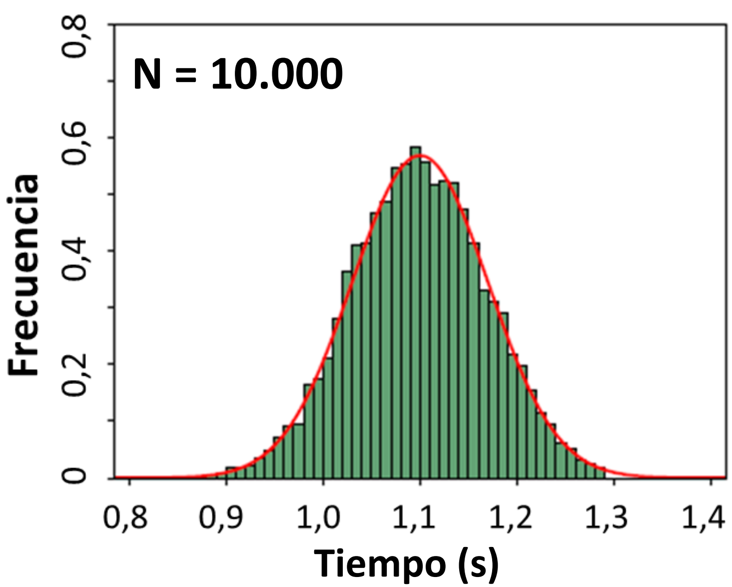
Oscila alrededor de la Media

¿Si aumenta N?

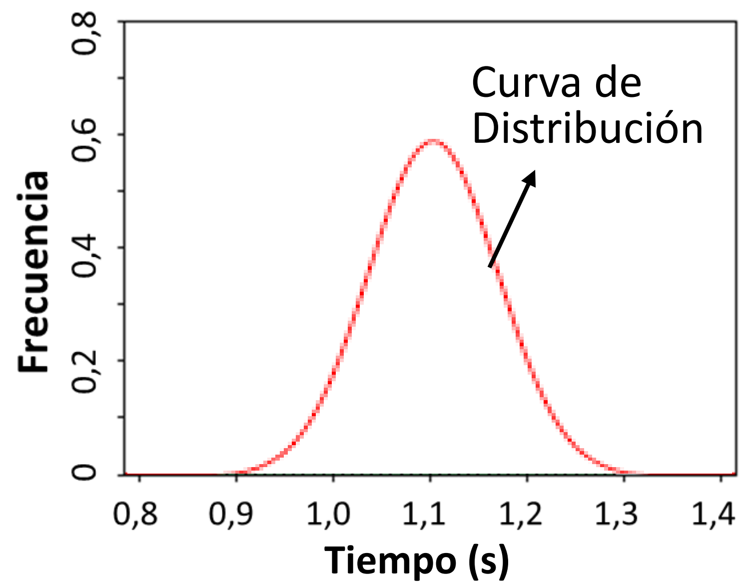




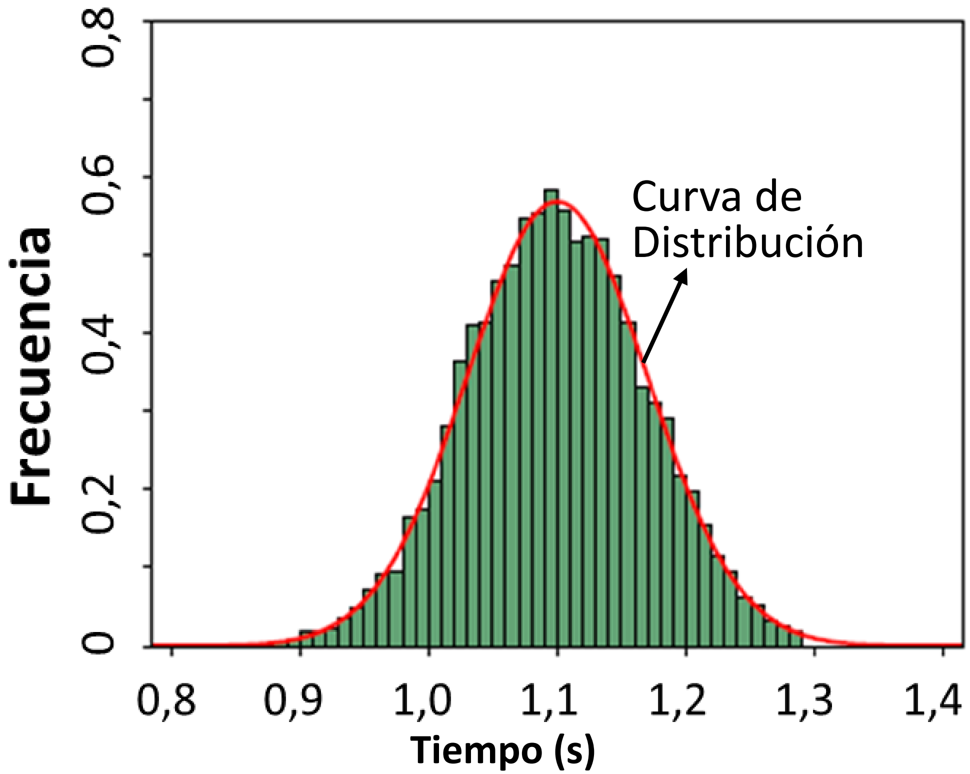




$$N \to \infty$$
$$a \to dt$$



¿Si aumenta N?



$$N \to \infty$$

$$a \to dt$$

$$F_i \to f(t)dt$$

$f(t)$: *Función de distribución de probabilidades*

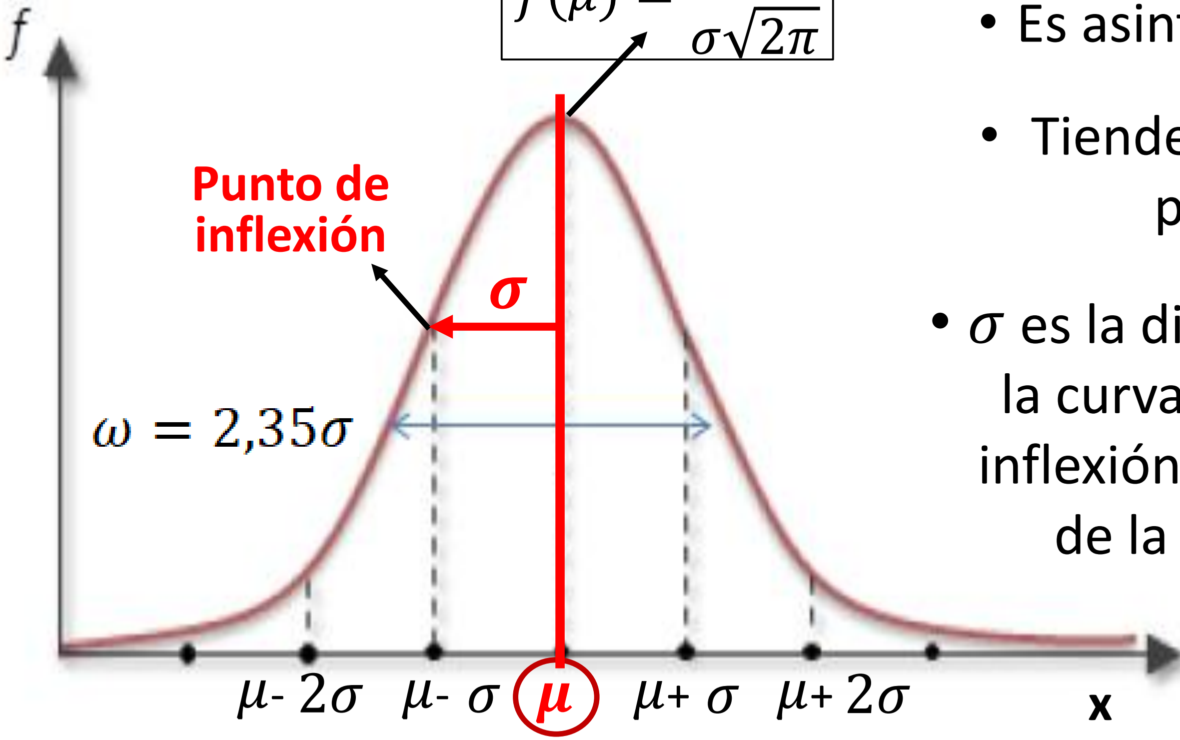
Condición de Normalización

$$\sum_i F_i = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dx = 1$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



Algunas Propiedades

- Está centrada en $x = \mu$.
- Es simétrica respecto de su media
- Es asintótica al eje de abscisas
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$.
- σ es la distancia de la media hasta la curva a la altura del punto de inflexión, y da una idea del ancho de la curva de distribución.

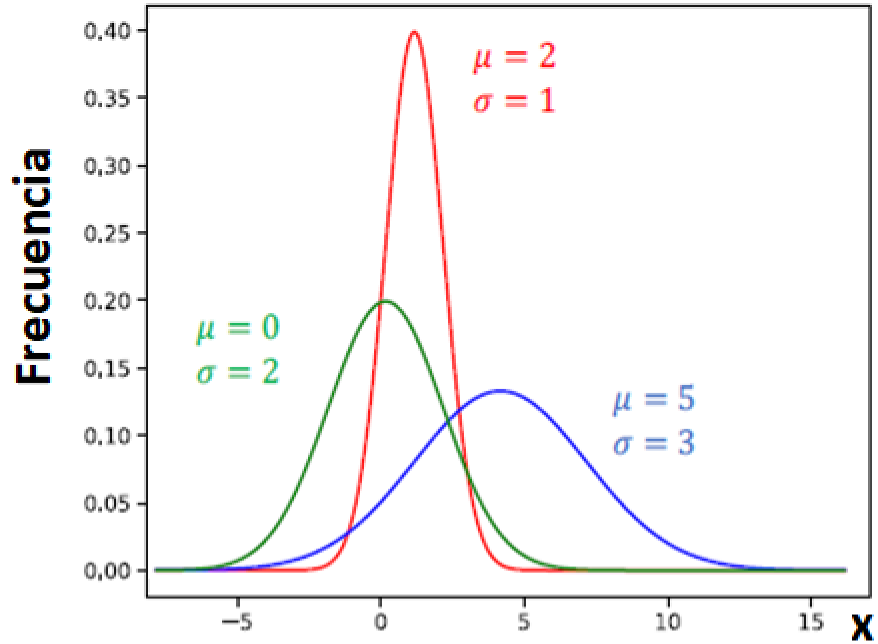
Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

Función de distribución de 3 Muestras

$\boldsymbol{\mu}$ Corrimiento en x hacia la derecha

$\boldsymbol{\sigma}$ Aumento del ancho de la distribución



1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución

$N \rightarrow \infty$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \longrightarrow \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR\ (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = Desviación\ Estándar \longrightarrow \sigma = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Si realizamos una nueva medición, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

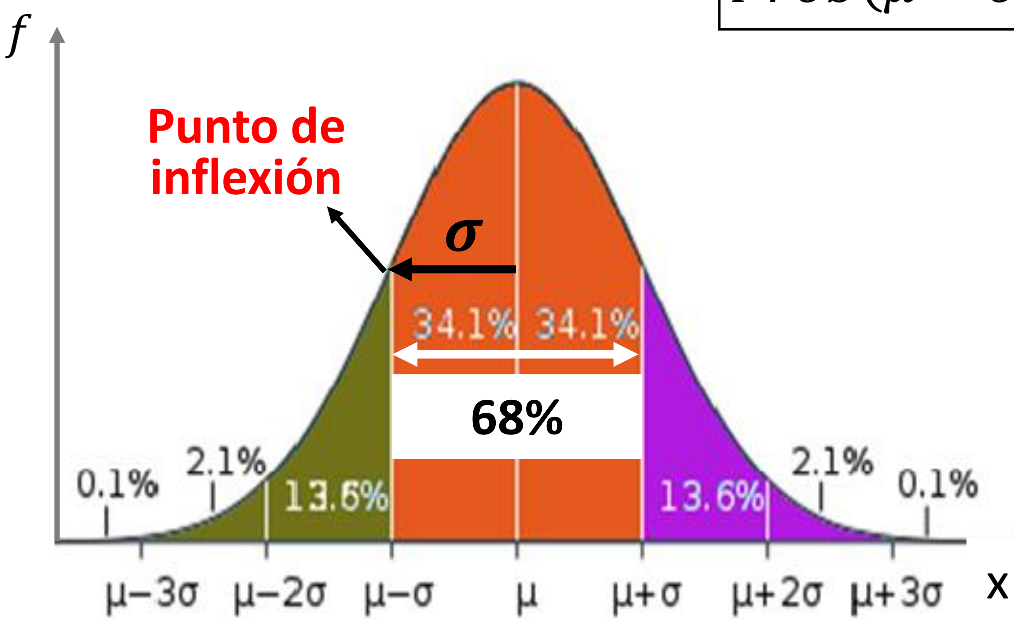
$$[\bar{x} - S\ , \bar{x} + S] \longrightarrow [\mu - \sigma\ , \mu + \sigma]$$

Si realizamos una nueva medición x_i, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo $\boldsymbol{\mu - \sigma \leq x_i \leq \mu + \sigma}$?

$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx}$$

$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}}$$

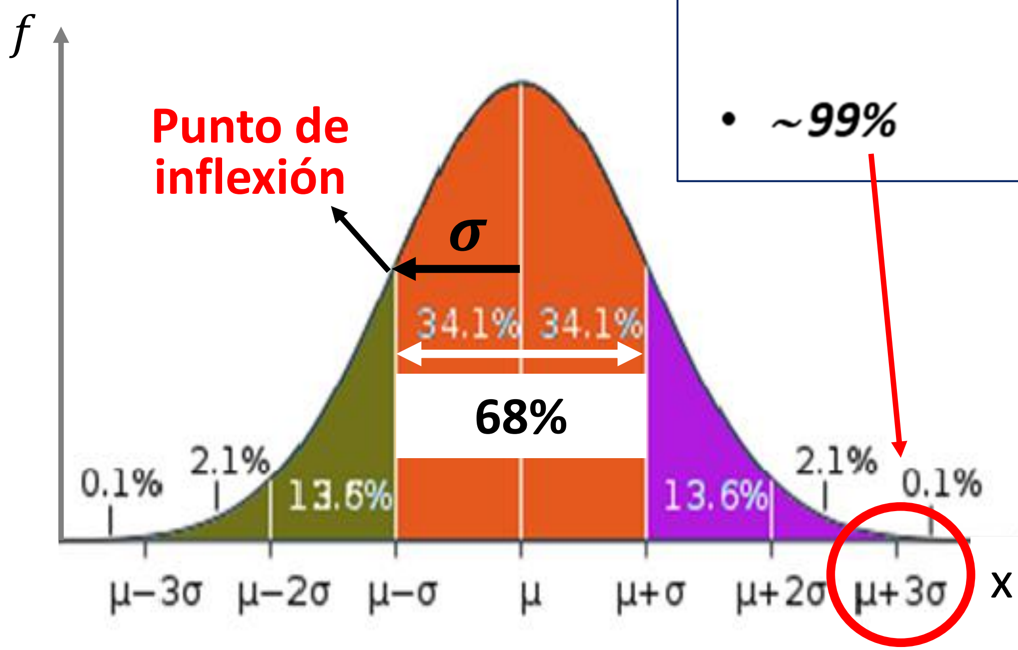
68%



Si realizamos una nueva medición x_i, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo…

$$\left.\begin{array}{c} \mu - \sigma \leq x_i \leq \mu + \sigma \\ \mu - 2\sigma \leq x_i \leq \mu + 2\sigma \\ \mu - 3\sigma \leq x_i \leq \mu + 3\sigma \end{array}\right\}$$

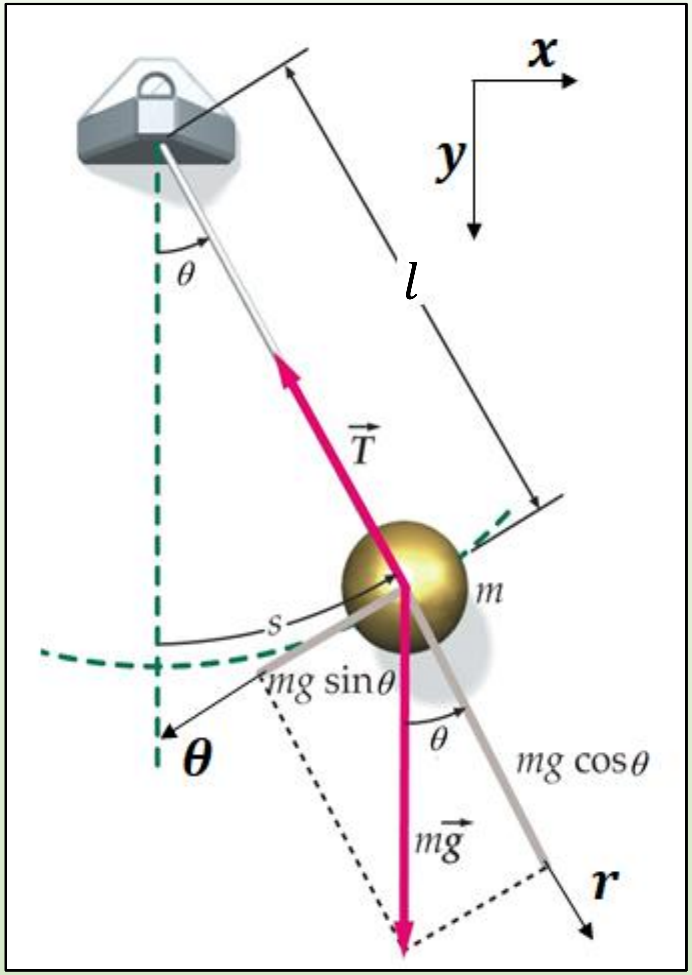
PROBABILIDAD	Una nueva medida de x_i
• *~68%*	$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$
• *~95%*	$(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$
• *~99%*	$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$



Muy baja probabilidad!!

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{r}}: mgcos\theta - T = ma_r \;\rightarrow\; a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \;\rightarrow\; a_\theta = -gsen\theta \end{array} \right.$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

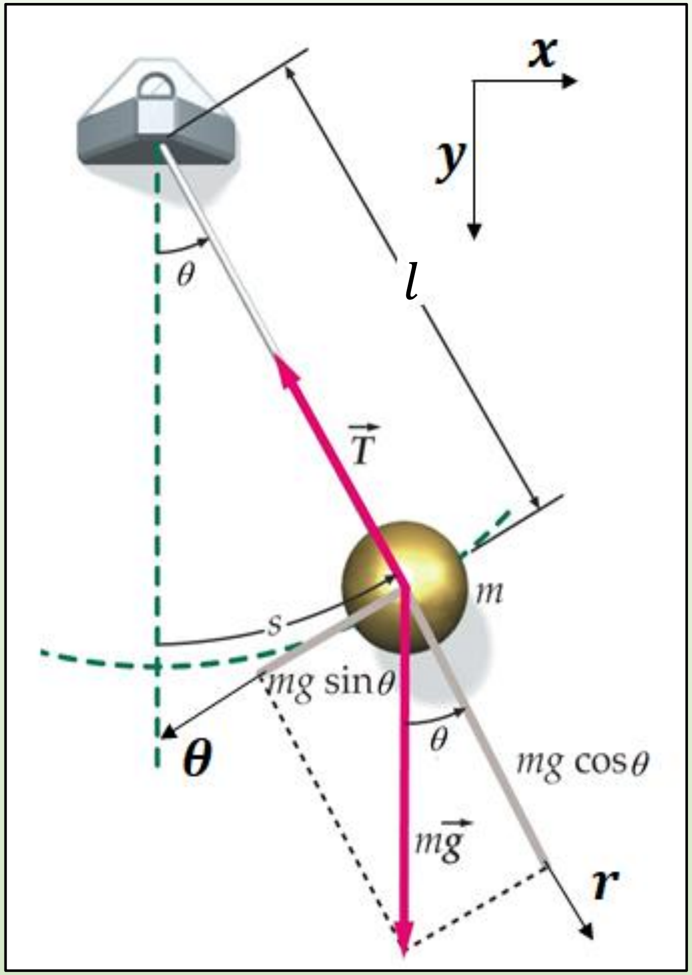
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$$\theta \ll 1 \;\Rightarrow sen\theta \approx \theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Solución: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)}$ $\quad \theta_0 \ll 1$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi} \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

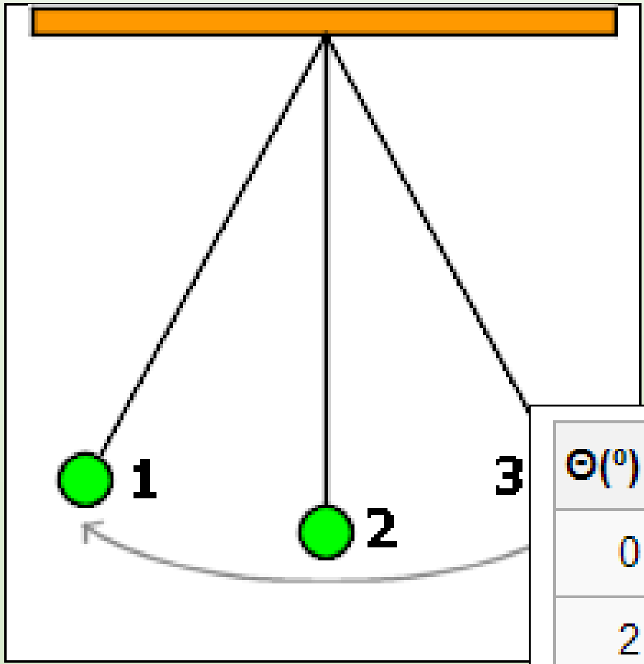
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

EXPERIMENTO

Exp. 2

OBSERVAR EL COMPORTAMIENTO DE LAS MEDIDAS DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO

Período del péndulo



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\theta_0 \ll 1$$

Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2do orden

$$l\,\ddot{\theta} + g sen\theta = 0$$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

ACTIVIDAD 1

EXPERIMENTO

Exp. 2

Armar un Péndulo de 1 m de largo

- Tomar **3 medidas** del período del péndulo ($\theta < 10°$):

  a) **Con un photogate**

  b) **2 integrantes con un cronómetro** contando desde la **misma posición** donde cuenta el photogate.

- Calcular $\boldsymbol{P}$ en cada caso y determinar si debería seguir midiendo.

- Tomar **40 medidas** del período del péndulo ($\theta < 10°$) (**N = 40**) para los casos a) y b), y para el caso:

  c) **Uno de los integrantes que midió con el cronómetro, hágalo de nuevo pero** midiendo desde **otra posición muy diferentes**

- Tomar **40 medidas más** con un **photogate** (**N = 80**)
- Tomar **40 medidas más** con un **photogate** (**N = 120**)

ACTIVIDAD 2

EXPERIMENTO

Exp. 2

Construir Histogramas

- Realizar Histogramas superpuestos de los casos **N = 40**:

  1) 1 Histograma con las medidas del photogate y la de 1 integrante del caso b) (misma posición que cuenta el photogate)

  2) 1 Histograma con las medidas los 2 integrantes, caso b).

  3) 1 Histograma con las medidas del integrante que hizo el caso b) y c).

- **Discusión lo que observa!!** ***¿Observa diferencias? ¿Depende la forma del Histograma del instrumento de medición? ¿Depende del integrante que midió, o desde dónde se midió?***

- Realice un gráfico con los Histogramas superpuestos de **N = 30, 60** y **120** medidos con el photogate. ***¿Observa diferencias? ¿Depende la forma del número de mediciones?***