Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2022

Mediciones Directas III
Incertidumbres Estadística

Lucía Famá, Patricio Grinberg,
Marcos Wappner, Carolina Iacovone,
Justo González Litardo

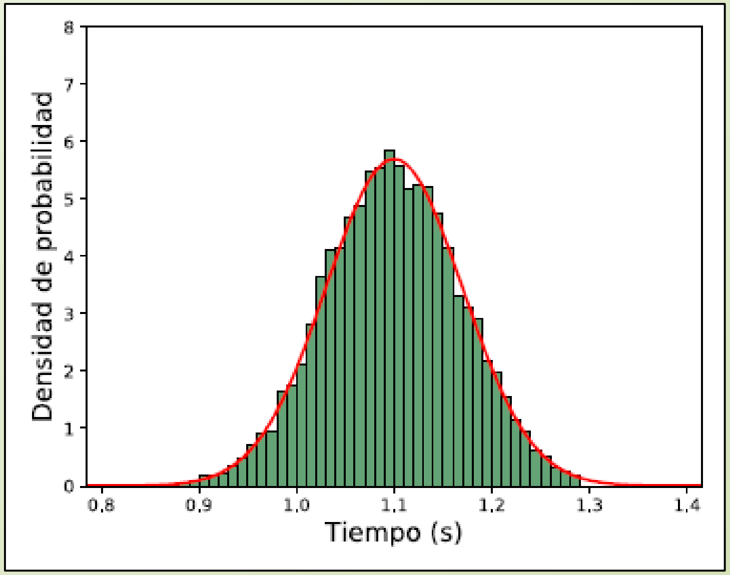
Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Mediciones Directas (MD)

¿Cómo obtenemos el resultado de una MF?

2 - Si mido más de 1 vez y los datos se encuentran **FUERA del intervalo de confianza** $\left[\boldsymbol{\bar{x} - \sigma_{ap}}, \boldsymbol{\bar{x} + \sigma_{ap}}\right]$

Expresión del Resultado $\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.}$



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\boldsymbol{\Delta x}??$

$S = Desviación\ Estándar$

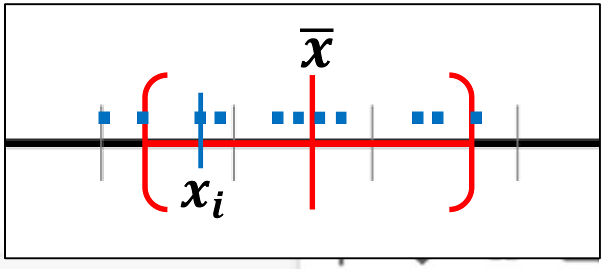
$\sigma_e = Error\ estadístico$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$

```
[ ]  array([32.545, 32.691, 32.58 , 32.546, 32.429, 32.524, 32.63 , 32.409,
            32.554, 32.545, 32.411, 32.347, 32.545, 32.778, 32.646, 32.545,
            32.477, 32.502, 32.6  ])
```

Valor más representativo: Promedio de los datos: $\bar{x}$




```
X = np.mean(x)
print("El valor medio es =", X, "s")
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

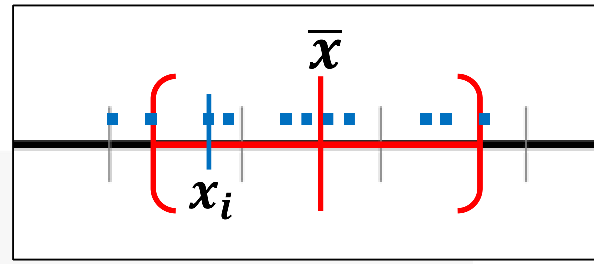
¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

```
[ ] array([32.545, 32.691, 32.58 , 32.546, 32.429, 32.524, 32.63 , 32.409,
           32.554, 32.545, 32.411, 32.347, 32.545, 32.778, 32.646, 32.545,
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```




```
A=x-X
print(A)
```

$x_i - \bar{x}$

```
[ 0.00268421  0.14868421  0.03768421  0.00368421 -0.11331579 -0.01831579
  0.08768421 -0.13331579  0.01168421  0.00268421 -0.13131579 -0.19531579
```

```
AA=A**2
print(AA)
```

$(x_i - \bar{x})^2$

```
[7.20498615e-06 2.21069945e-02 1.42009972e-03 1.35734072e-05
 1.28404681e-02 3.35468144e-04 7.68852078e-03 1.77730997e-02
 1.36520776e-04 7.20498615e-06 1.72438366e-02 3.81482576e-02
```

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

```
AA=A**2
```

$(\bar{x} - x_i)^2$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\ (x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

```
[ ] B=sum(AA)/N
    print(B)
```

```
0.010171163434903048
```

```
C=np.var(x)
print("La varianza es =", C)
```

```
La varianza es = 0.010171163434903046
```

Análisis de estadístico

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio de una serie

$$\boxed{S^2 = Var\,(x)}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
[ ]  D=np.sqrt(C)
     print(D)
```

```
0.10085218606903396
```

Esto también puede obtenerse simplemente como np.std("datos")

```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria $\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N\}$

¿Cómo obtengo la desviación Estandar?

Es una medida que se usa, pero la que vamos a usar nosotros, porque tiene propiedades matemáticas más cómodas es la **varianza**:

$$\mathrm{Var(x)} = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

En general, la varianza la estimamos como:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

Tenemos que tomar raiz:

$$S = \sqrt{\mathrm{Var(x)}}$$

que se llama **Desviación Estandar**.

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución

$N \to \infty$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$\sigma^2 = VAR\,(x)$$

Si realizamos una nueva medición, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

$$[\bar{x} - S\,, \bar{x} + S] \longrightarrow [\mu - \sigma\,, \mu + \sigma]$$

Desviación estándar y sus usos ….

¿Qué se espera de una nueva medida?

Si realizamos una nueva medición x_i

PROBABILIDAD	Una nueva medida de X_i
• ~68%	$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$
• ~95%	$(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$
• ~99%	$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$

$$\mu - S \leq x_i \leq \mu + S$$

$$\mu - 2S \leq x_i \leq \mu + 2S$$

$$\mu - 3S \leq x_i \leq \mu + 3S$$

Comparación: *¿Quién mide en forma más precisa?*

Desviación Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

¿Pero … Δx cómo lo obtengo?

Varias Series de mediciones

Teorema Central del Límite (TCL)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $< \bar{x} >$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

En general se toma una única muestra de N medidas …

Si se toma como **hipótesis** que nuestra serie que comportará como otra de la misma MF bajo la misma metodología:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

Valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Si tomo N medidas: $\Delta x = \boldsymbol{\sigma_e}$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

El error del promedio

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

que en la práctica es:

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Está en todos los libros de estadística.

```
Dx=S/np.sqrt(len(x))
print("El error del promedio es Dx =", Dx, "s")
```

```
El error del promedio es Dx = 0.02313707827947787 s
```

Expresión del resultado

```
print("El resultado de la medición fue: T =", f'({X:.3f} ± {Dx:.3f}) s')
```

```
El resultado de la medición fue: T = (32.542 ± 0.023) s
```

En general se toma una única muestra de N medidas …

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

	1 Serie	N Series
PROBABILIDAD	**Una nueva medida de x_i**	una nueva medida de $\bar{x}_i$
• *~68%*	$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$	$(<\bar{x}> -\sigma_e, <\bar{x}> +\sigma_e)$
• *~95%*	$(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$	$(<\bar{x}> -2\sigma_e, <\bar{x}> +2\sigma_e)$
• *~99%*	$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$	$(<\bar{x}> -3\sigma_e, <\bar{x}> +3\sigma_e)$

Desviación estándar y sus usos ….

<u>Ejemplo:</u>

Mido **N = 91** períodos de un péndulo, calculo los parámetros estadísticos: $\overline{T} = 2.25\ s$, $S = 0.27\ s$, $\sigma_e = 0.09\ s$

a) **El RESULTADO del período** es: $T = (2.25 \pm 0.09)\ s$

Si tomo **una nueva medida** del períodos de un péndulo y obtengo $\mathbf{2.23\ s}$. La nueva medida tendrá aprox. un **68% de probabilidades** de encontrarse en el intervalo de confianza

$$[\overline{T} - S, \overline{T} + S] \Rightarrow [2.16, 2.34]$$

a) El error de la nueva medida será igual al del resto de las medidas, y valdrá: $S = 0.27\ s$

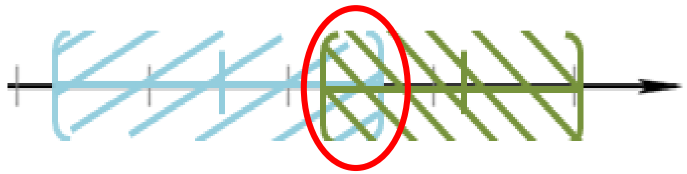
b) El **resultado de la nueva medida** será: $T = (2,23 \pm 0,27)\ s$

Diferencias Significativas

<u>MÉTODO GRÁFICO:</u> Sirve para comparar más de 2 resultados al mismo tiempo

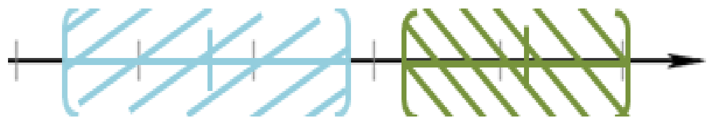
$A = \bar{A} \pm \Delta A$ $\quad$ $B = \bar{B} \pm \Delta B$

Si $A \cap B \neq \emptyset$



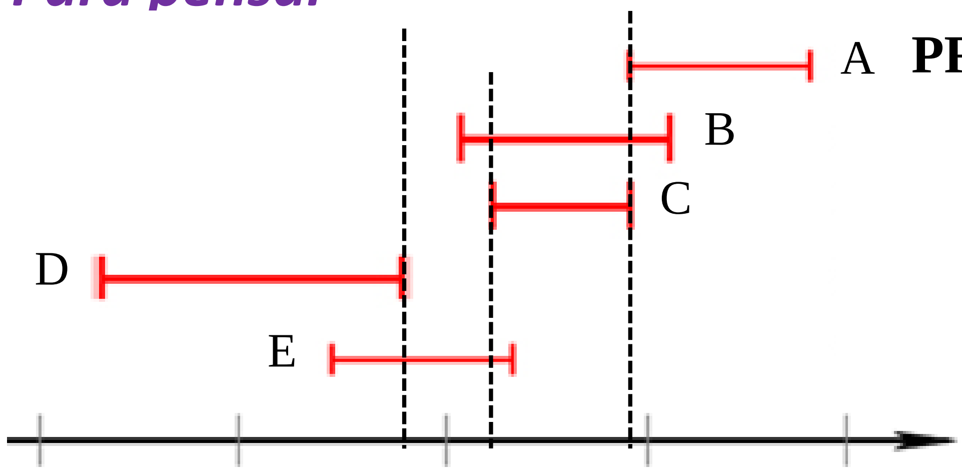
$\Rightarrow$ A y B **NO PRESENTAN** Diferencias Significativas

Si $A \cap B = \emptyset$



$\Rightarrow$ A y B **SÍ PRESENTAN** Diferencias Significativas

Para pensar



Comparando D con A, B y C:
PRESENTAN diferencias significativas

$D \cap A = \emptyset$, $D \cap B = \emptyset$ y $D \cap C = \emptyset$

¿Qué ocurre entre D y E?

¿Y entre A y B, A y C, y A y E?

¿Y entre B y C, y B y E?

Diferencias Significativas

MÉTODO CON FÓRMULA: Se puede usar de a pares de resultados

$$A = \bar{A} \pm \Delta A \qquad B = \bar{B} \pm \Delta B$$

Si $|\bar{A} - \bar{B}| \leq \Delta A + \Delta B$ $\Rightarrow$ A y B **NO PRESENTAN** Diferencias Significativas

Para pensar

A= 2,278 ± 0,023

B= 1,964 ± 0,019

C= 2,11 ± 0,34

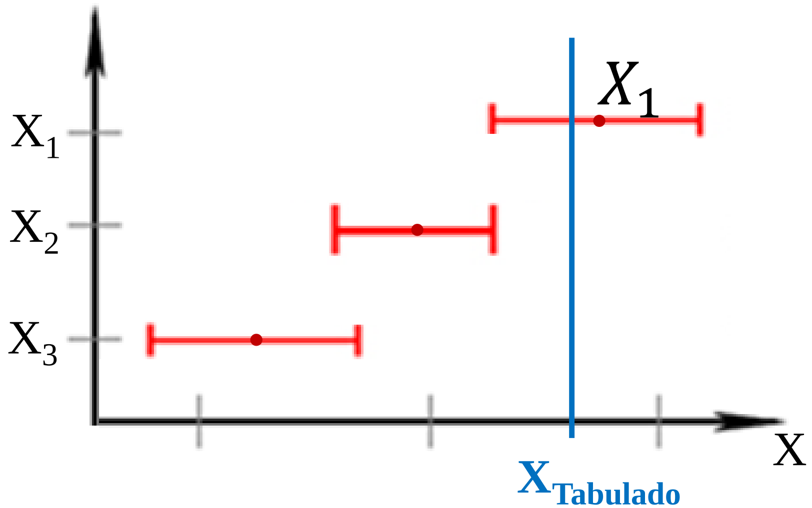
Comparando A con B. Presentan diferencias significativas, porque:

$|\bar{A} - \bar{B}| = 0{,}314$ y $\Delta A + \Delta B = 0{,}042$

Como $0{,}314 > 0{,}042$ $\Rightarrow$ A y B presentan diferencias significativas

¿Qué ocurre entre B y C? ¿Y entre A y C?

¿Cómo comparo Resultados de una misma MF? Exactitud y Precisión



Exactitud:

Se evalúa la cercanía del valor más representativo ($\bar{X}$) de las diferentes medidas con el valor tabulado

El resultado con $\bar{X}$ más cercano al $\mathbf{X_{Tabulado}}$ será el más exacto

Para pensar

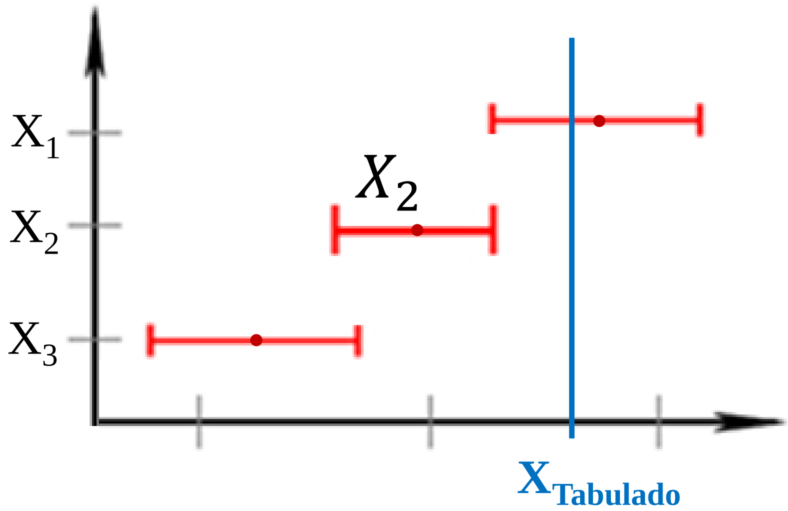
$g_1 = (9{,}81 \pm 0{,}07)\ m/s^2$

$g_2 = (9{,}73 \pm 0{,}03)\ m/s^2$

$g_3 = (9{,}99 \pm 0{,}35)\ m/s^2$

¿Qué resultado es más exacto?

¿Cómo comparo Resultados de una misma MF?
Exactitud y Precisión



Precisión:

Se evalúan los intervalos de confianza (que es lo mismo que evaluar ΔX) de las diferentes medidas.

El resultado con menor valor de ΔX será el más preciso.

Para pensar

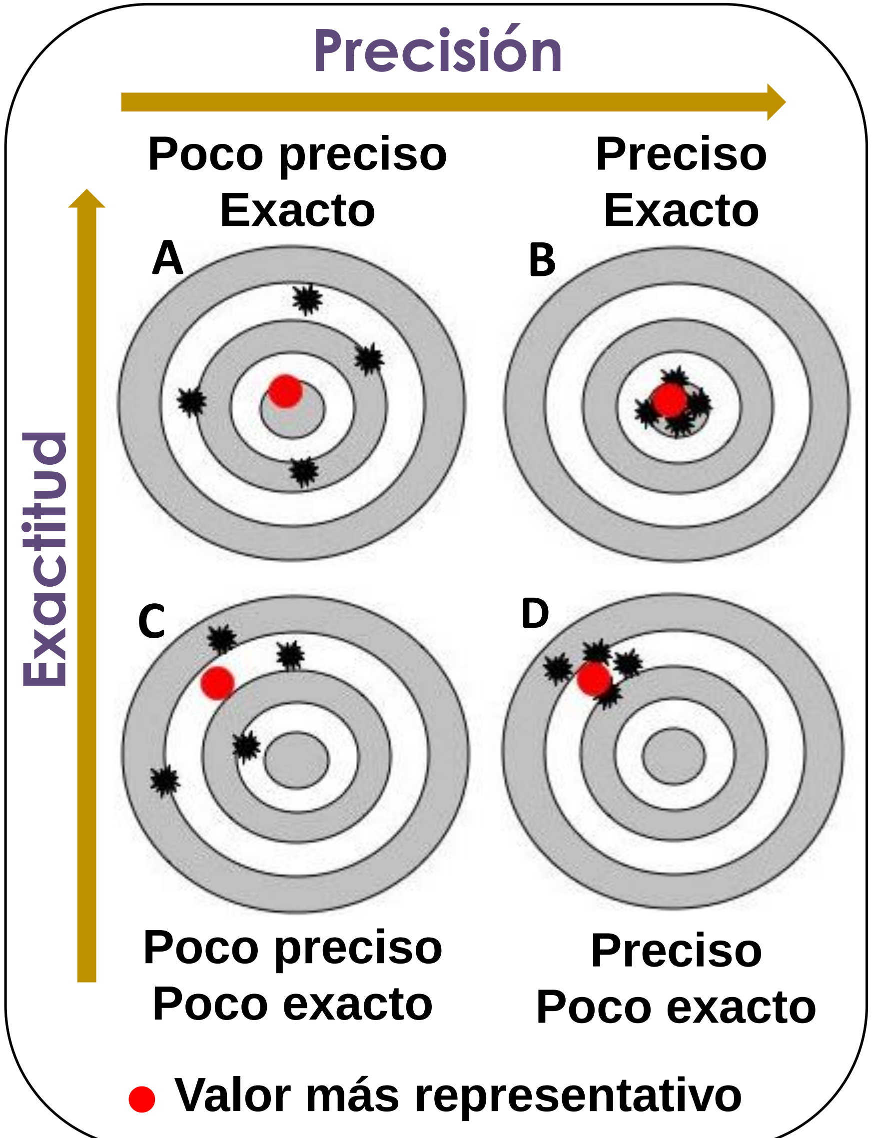
$g_1 = (9{,}81 \pm 0{,}07)\ m/s^2$

$g_2 = (9{,}73 \pm 0{,}03)\ m/s^2$

$g_3 = (9{,}99 \pm 0{,}35)\ m/s^2$

¿Qué resultado es más preciso?

¿Cómo comparo Resultados de una misma MF? Exactitud y Precisión



Exactitud:

Se evalúa la cercanía del valor más representativo ($\bar{X}$) de las diferentes medidas con el valor tabulado

El resultado con $\bar{X}$ más cercano al $\mathbf{X}_{\mathbf{Tabulado}}$ será el más exacto

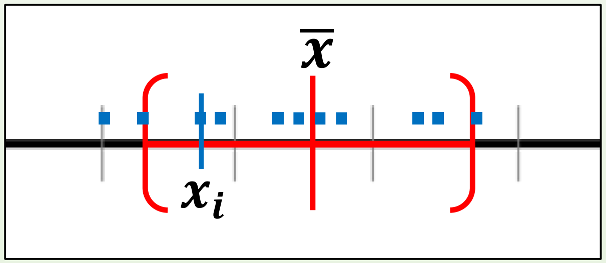
Precisión:

Se evalúan los intervalos de confianza (que es lo mismo que evaluar ΔX) de las diferentes medidas.

El resultado con menor valor de ΔX será el más preciso.

Análisis de estadístico

Comparación: *¿Quién mide en forma más precisa?*



Desviación Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

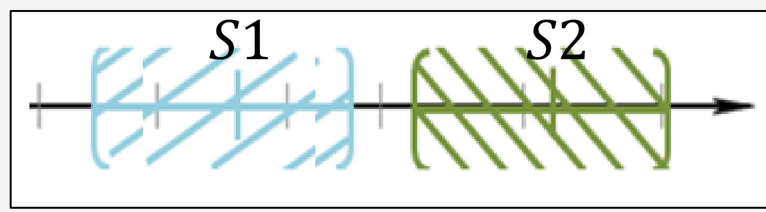
$$\Delta S = \frac{S}{2\sqrt{N-1}}$$

Error de la Desviación Estándar

¿Quién midió en forma más precisa?

Quien obtenga medidas más cercanas entre sí

Menor valor de *S*



$S1$ es menor que $S2$

Quien midió con $S1$ fue más preciso que quien midió con $S2$

EXPERIMENTO

Exp. 3

DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO: T

ACTIVIDAD 1

- Obtener S y ΔS de **N = 10, 20, 30, 40, 60, 90** y **120**. **Comparar $S \pm \Delta S$ de todos los caso *¿Observa diferencias significativas? ¿Cambian con N?***

- **Calcular el RESULTADO del período del péndulo:** $T = (\overline{T} \pm \Delta T)\ Ud$ considerando que **N = 120** es representativo para su experimento. Es decir, usando las ecuaciones (1) y (2), y S obtenido e N = 120. **Discutir si la hipótesis es correcta**.

$$\overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i \qquad (1)$$

$$\Delta T = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}} \qquad (2)$$

ACTIVIDAD 2

EXPERIMENTO

Exp. 3

Armar un Péndulo de 50 cm de largo

- Obtener **120 medidas** con un **photogate** como la clase pasada (haciendo 3 mediciones de N = 40).

- **Calcular el RESULTADO del período del péndulo:** $\boldsymbol{T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud}$

considerando que **N = 120** es representativo para su experimento.

- **Comparar** T **del péndulo de 1 m** de largo con T **del de 50 cm de largo.** ***¿Presenta diferencias significativas? ¿Por qué cree que sucede eso?***

- Obtener S y ΔS de **N = 120** y **compararlo con** el valor de desviación estándar de N = 120 obtenido para **el péndulo de 1 m de largo.** **¿Depende el valor de la desviación estándar de si el tiempo que se midió es mayor o menor?**

EXPERIMENTO

Exp. 3

COMPARAR LAS FORMAS DE MEDIR: S

ACTIVIDAD 3

- Obtener S y ΔS de **N = 120 de los péndulos de 50 cm y 1 m** de largo y **compararlos. *¿Depende el valor de la desviación estándar*** *de si el tiempo que se midió bajo las mismas condiciones experimentales y mismo método es mayor o menor?*

- Obtener S y ΔS de cada caso con **N = 40. Graficar los resultados en 1 única Figura** y discutir **qué método fue más preciso *(¿cronómetro o photgate?*)** y **qué integrante** del grupo **midió en forma más precisa**.

ENTREGA:
8 DE SEPTIEMBRE 8 HS

EXPERIMENTO

Exp. 3

- Resultados de $\boldsymbol{T}$ **del péndulo de 1 m** de largo y de $\boldsymbol{T}$ **del de 50 cm de largo. Comparen precisión y diferencias significativas.**

- Expresar $(\boldsymbol{S} \pm \Delta\boldsymbol{S})\ \boldsymbol{Ud}$. de **N = 120 de los péndulos de 50 cm y 1 m** de largo. **Discusión: *¿Depende la desviación estándar de si el tiempo es mayor o menor si se midió bajo las mismas condiciones?***

- Figura 1. Con $(\boldsymbol{S} \pm \Delta\boldsymbol{S})\ \boldsymbol{Ud}$. **de** cada caso con **N = 40.**

  Discutir **qué método fue más preciso** (*¿cronómetro o photgate?*), **qué integrante fue más preciso al medir** y si al medir en **otra posición** del péndulo se midió diferente precisión.

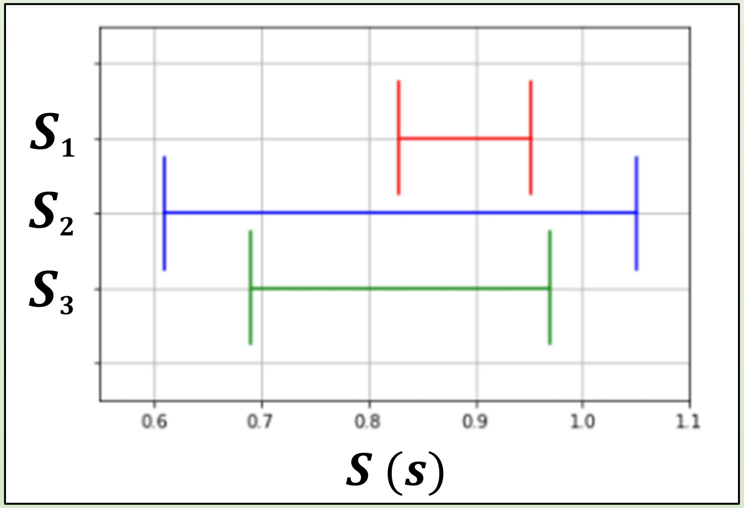


Figura 1. Leyenda de lo que muestran …..