Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2022

Mediciones Indirectas
Determinación del volumen

Lucía Famá, Patricio Grinberg,
Marcos Wappner, Carolina Iacovone,
Justo González Litardo

Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Resultado y una MF y forma de expresarlo

Resultado

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ Ud.$$

$\boldsymbol{\bar{x}}$ ***o*** $\boldsymbol{x_0}$**:** Valor más representativo

$\Delta \boldsymbol{x}$**:** Incerteza Absoluta

Mediciones Directas (MD)

Valor más representativo

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Incerteza Absoluta (Δx) para diferentes casos

1- Si mido dentro del error instrumental → $\boldsymbol{\Delta x = \sigma_{ap}}$

El RESULTADO de MF será:

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_{ap} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{ap}$$

Expresión

$$x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right)\, Ud.$$

2- Si mido fuera del error instrumental

Generalizando … Si tomo **N medidas** de una misma MF bajo las mismas condiciones, tomando como **hipótesis** que **se cumple el Teorema Central del Límite**

El error absoluto de MF será el error de la media → $\boldsymbol{\Delta x = \sigma_e}$

$$\Delta x = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

El RESULTADO de MF será:

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \sigma_e \leq x \leq \bar{x} + \sigma_e$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_e)\ Ud.$$

Si realizamos una NUEVA SERIE DE MEDIDAS DE LA MF, el promedio de la nueva serie tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

$$(\bar{\boldsymbol{x}} - \sigma_e, \bar{\boldsymbol{x}} + \sigma_e)$$

2- Si mido fuera del error instrumental

Generalizando … Si tomo **N medidas** de una misma MF bajo las mismas condiciones, tomando como **hipótesis** que **se cumple el Teorema Central del Límite**

El error de cada medición será: → $\boldsymbol{\Delta x = S}$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

El RESULTADO de cada medición:

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

Expresión

$$x = (\bar{x} \pm S)\ Ud.$$

Si realizamos UNA NUEVA MEDICIÓN, el nuevo dato tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo de confianza:

$$(\boldsymbol{\bar{x}} - S, \boldsymbol{\bar{x}} + S)$$

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$
$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$
$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$
$$\vdots$$

x, y, z … variables independientes

$$\boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$$

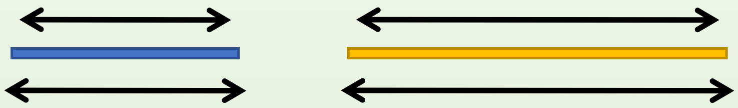
Valor más representativo (W_0)

Error Absoluto (ΔW)

Mediciones Indirectas (MI)

Por ej.: ***SUMA*** de dos MF $\boxed{L = A + B}$ $L = (L_0 \pm \Delta L)\ Ud.$

$B_{mín} = B_0 - \Delta B$

A  ***B***

$B_{Máx} = B_0 + \Delta B$

$A = (A_0 \pm \Delta A)\ Ud.$

$B = (B_0 \pm \Delta B)\ Ud.$

Estimemos un posible valor de L

$L_{mín} \leq L \leq L_{Máx}$

$$L_{mín} = (A_0 - \Delta A) + (B_0 - \Delta B)$$

$$L_{Máx} = (A_0 + \Delta A) + (B_0 + \Delta B)$$

$$\boldsymbol{L_0} = A_0 + B_0 = \boldsymbol{L(A_0, B_0)}$$

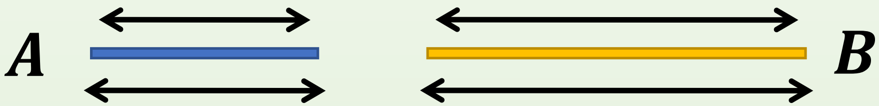
Reemplazar en la fórmula con los valores más representativos

$$L_o = \frac{L_{Máx} + L_{mín}}{2} = \frac{2A_0 + 2B_0}{2} = A_0 + B_0$$

Mediciones Indirectas (MI)

Por ej.: ***SUMA*** de dos MF $\boxed{L = A + B}$ $L = (L_0 \pm \Delta L)\, Ud.$

$$B_{mín} = B_0 - \Delta B$$



$$B_{Máx} = B_0 + \Delta B$$

$$A = (A_0 \pm \Delta A)\, Ud.$$

$$B = (B_0 \pm \Delta B)\, Ud.$$

Estimemos un posible valor de L

$$L_{mín} \leq L \leq L_{Máx}$$

$$\boxed{L_{mín} = (A_0 - \Delta A) + (B_0 - \Delta B)}$$

$$\boxed{L_{Máx} = (A_0 + \Delta A) + (B_0 + \Delta B)}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{L_{Máx} - L_{mín}}{2} = \frac{2\Delta A + 2\Delta B}{2} = \Delta A + \Delta B}$$

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{L} = \Delta A + \Delta B}$$

El error de una suma se puede estimar como la suma de los errores

Estimemos el resultado del Área de un cuadrado

AREA de un cuadrado $\boxed{A = L^2}$

$$\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A)\; Ud.}$$

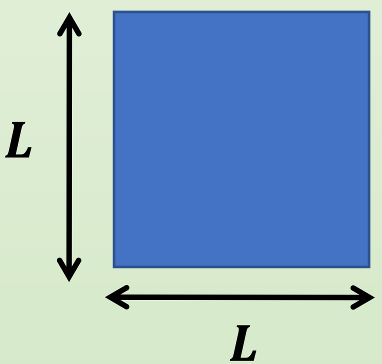
$$A_0 - \Delta A \leq A \leq A_0 + \Delta A$$

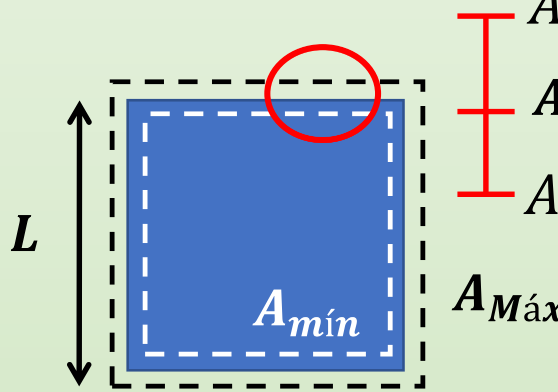
$$A_{mín} \leq A \leq A_{Máx}$$

$$L = (L_0 \pm \Delta L)\; Ud.$$

$$L_0 - \Delta L \leq L \leq L_0 + \Delta L$$

Estimemos un posible valor de A





$$A_{Máx} = (L_0 + \Delta L)^2$$

$$\boldsymbol{A_0}$$

$$A_{mín} = (L_0 - \Delta L)^2$$

Estimemos un posible valor de A

$$\boxed{A = L^2}$$

$A = (A_0 \pm \Delta A)\ Ud.$ $\quad A_{mín} \leq A \leq A_{Máx}$

$$A_{mín} = (L_0 - \Delta L)^2 \qquad A_{Máx} = (L_0 + \Delta L)^2$$

VALOR MÁS REPRESENTATIVO

$$A_0 = L_0^2 = A(L_0)$$

Evaluar en L_0

$$A_o = \frac{A_{Máx} + A_{mín}}{2} \qquad A_o = \frac{2\,{L_0}^2 + \cancel{2\,\Delta L^2}}{2} \approx {L_0}^2$$

INCETIDUMBRE

$$\Delta A = 2\,L_0\,\Delta L$$

$$2\,L_0\,\Delta L = \left.\frac{dA}{dL}\right|_{L_0}$$

$$\Delta A = \frac{A_{Máx} - A_{mín}}{2} \qquad \Delta A = \frac{4\,L_0\,\Delta L}{2} = 2\,L_0\,\Delta L$$

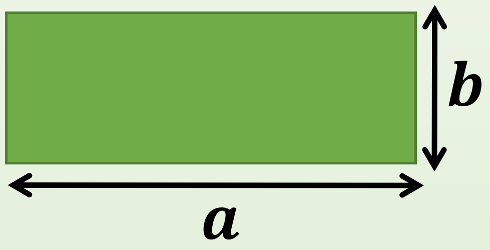
$$\boldsymbol{A = A(L_0) \pm \left.\frac{dA}{dL}\right|_{L_0} \Delta L}$$

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

Ejemplo: **¿Cuál es el valor del área de un rectángulo?**

$$\boldsymbol{A = a.b}$$



$$a = (a_0 \pm \Delta a)\ Ud.$$

$$b = (b_0 \pm \Delta b)\ Ud.$$

a y b variables independientes

$$\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A)\ Ud.}$$

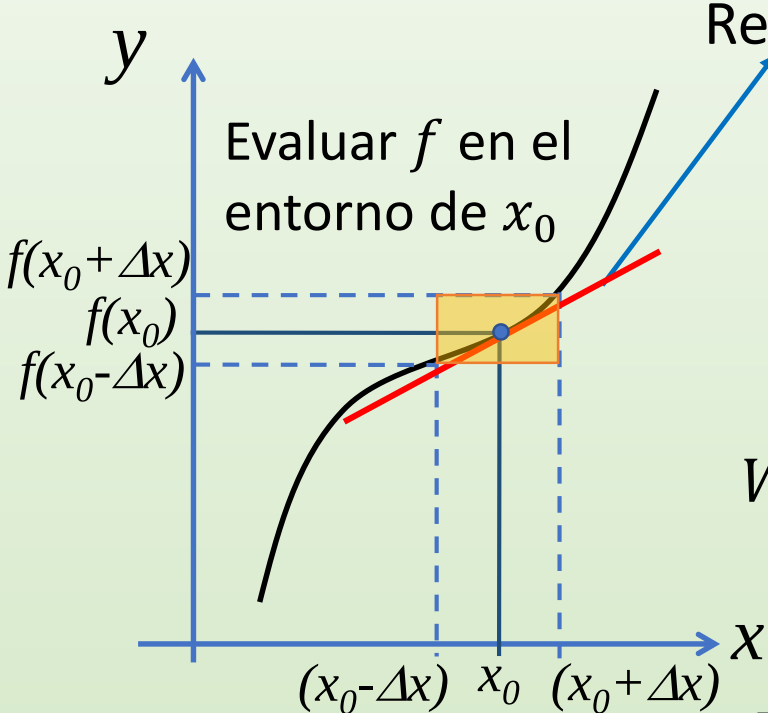
Se Estima el valor de MF

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF

W que depende de otra MF x

$\boxed{W = f(x)}$ $\boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$ $x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$

Recta tangente a $f(x_0)$



La pendiente será: $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$

<u>*Desarrollo de Taylor:*</u>

$$W = f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \overbrace{(x - x_0)}^{\Delta x}} + \ldots$$

$$\boxed{W_0 = f(x_0)}$$

$$\boxed{\Delta W^2 = \left(\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}\right)^2 \Delta x^2}$$

Ejemplo: W que depende de otra MF x

AREA de un cuadrado $\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A)\, Ud.}$

$$\boxed{A = L^2} \qquad L = (L_0 \pm \Delta L)\, Ud.$$

Valor más representativo

$$W_0 = f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$A_0 = f(L_0)$$

$$\boxed{A_0 = {L_0}^2}$$

Error Absoluto

$$\Delta W^2 = \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \right)^2 \Delta x^2$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta A^2 = \left(\left. \frac{dA}{dL} \right|_{L_0} \right)^2 \Delta L^2$$

$$\Delta A^2 = (2L_0)^2 \Delta L^2 \Rightarrow \boxed{\Delta A = 2L_0 \Delta L}$$

RESULTADO del AREA del cuadrado

$$\boxed{\boldsymbol{A = {L_0}^2 \pm 2L_0 \Delta L}}$$

Ejemplo: W que depende de otra MF x

AREA de un cuadrado $\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A)\ Ud.}$

$$\boxed{A = L^2} \qquad L = (15{,}3 \pm 0{,}1)\ cm$$

Valor más representativo

$$W_0 = f(x_0)$$

$$A_0 = f(15{,}3)$$

$$\boxed{A_0 = 15{,}3^2 = 234{,}09\ cm}$$

Error Absoluto

$$\Delta W^2 = \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \right)^2 \Delta x^2$$

$$\Delta A^2 = \left(\left. \frac{dA}{dL} \right|_{15{,}3} \right)^2 0{,}1^2$$

$$\Delta A^2 = (2 * 15{,}3)^2 0{,}1^2 \Rightarrow \boxed{\Delta A = 3{,}06\ cm}$$

Expresión del Resultado con 2 cifras significativas

$$\boxed{\boldsymbol{A = (234,1 \pm 3,1)\ cm}}$$

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF

W que depende de otras 2 MF (x e y)

$$\boxed{W = f(x,y)} \qquad \boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$

x, y son variables independientes

<u>Desarrollo de Taylor</u>

$$W = f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} \underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} + \ \ldots$$

$x \approx x_0$

$y \approx y_0$

Derivada parcial respecto de la variable x

Derivada parcial respecto de la variable x, evaluada en x_0 *e* y_0

Supongamos que queremos determinar el valor de una MF

W que depende de otras 2 MF (x e y)

$$W = f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y - y_0)} + \ \ldots$$

$$\boxed{W_0 = f(x_0,y_0)}$$

$$\boxed{\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\right)^2 \Delta y^2}}$$

DERIVADAS PARCIALES

$$\boxed{\boldsymbol{F = 2xy^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \mathbf{2y^2} \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,\, y_{0,\ldots}} = \mathbf{4x_0y_0}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathbf{4xy} \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,\, y_{0,\ldots}} = \mathbf{2{y_0}^2}$$

Ejemplo

$$\boxed{\boldsymbol{W = 2xy^2}} \rightarrow \boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$$

$$x = (10{,}0 \pm 0{,}1)\ cm$$

$$y = (2{,}22 \pm 0{,}01)\ cm$$

$$\boldsymbol{W_0 = 2x_0{y_0}^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{W_0 = 98{,}568\ cm^3}}$$

$$\Delta W = \sqrt{\underbrace{\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\right)^2}\Delta x^2 + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\right)^2}\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \boldsymbol{2y^2} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \boldsymbol{4xy}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x_0,\\ y_{0,\dots}}} = \boldsymbol{4x_0y_0} = 88{,}8\ cm^2 \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x_0,\\ y_{0,\dots}}} = \boldsymbol{2{y_0}^2} = 9{,}8568\ cm^2$$

$$\Delta W = \sqrt{(88{,}8)^2 0{,}1^2 + (9{,}8568)^2 0{,}01^2} \qquad \boxed{\boldsymbol{\Delta W = 8{,}8\ cm^3}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{W = (98{,}6 \pm 8{,}8)\ cm^3}}$$

Generalizando …

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)} \longrightarrow W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$

$$\vdots$$

x, y, z … variables independientes

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{\substack{x_0,\\ y_0,\dots}}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{\substack{x_0,\\ y_0,\dots}}\right)^2 \Delta y^2 + \ \dots}$$

Casos comunes: Incerteza en MI que podemos aproximar

$$\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A)\ Ud.}$$

Sumas y Restas:

$$\boxed{A = B + C} \qquad \boxed{A_0 = B_0 + C_0}$$

$$\boxed{A = B - C} \qquad \boxed{A_0 = B_0 - C_0}$$

$$\boxed{\Delta A = \Delta B + \Delta C}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_r} = \left|\frac{\Delta A}{A_0}\right|$$

Error Relativo

Multiplicación y División:

$$\boxed{A = B * C} \qquad \boxed{A_0 = B_0 * C_0} \qquad \boxed{\varepsilon_{rA} = \varepsilon_{rB} + \varepsilon_{rC}}$$

$$\boxed{A = B/C} \qquad \boxed{A_0 = B_0/C_0} \qquad \boxed{\varepsilon_{rA} = \varepsilon_{rB} + \varepsilon_{rC}}$$